

Achetez un billet de 100 euros !



Laboratoire d'économétrie
Ecole polytechnique

L'analyse de ce jeu éclaire les risques et les bénéfices de la libre concurrence.

Les maths et les jeux

"Il est plus facile d'apprendre les mathématiques que de tenter de s'en passer" a dit Henri Cartan. Les mathématiques, très utilisées dans les sciences physiques, sont également fort utiles à l'économiste. Lorsque ce dernier analyse des situations impliquant "un petit nombre de paramètres", il a souvent recours à la théorie des jeux (ces situations concernent tout particulièrement l'étude des secteurs industriels concentrés comme les télécommunications, l'automobile, la production de pâte à papier..., où le nombre de concurrents est très réduit, mais aussi les questions de coordination de politiques macro-économiques au sein de la CEE, du G7, etc.).

La théorie correspondante doit son appellation à l'attrait exercé sur les mathématiciens par l'analyse des jeux de société, situations qui fournirent les premiers modèles pour les développements ultérieurs. Ces mathématiques permettront, dans un avenir proche, de résoudre complètement les jeux les plus répandus comme les dames, les échecs ou le bridge. Elles peuvent déjà élucider totalement les jeux tels que le jeu de Marienbad. On peut s'interroger sur l'avenir des jeux complètement résolus : restera-t-il encore des joueurs d'échecs lorsque les machines, en vente à prix modique dans les supermarchés, batront même le champion du monde ?

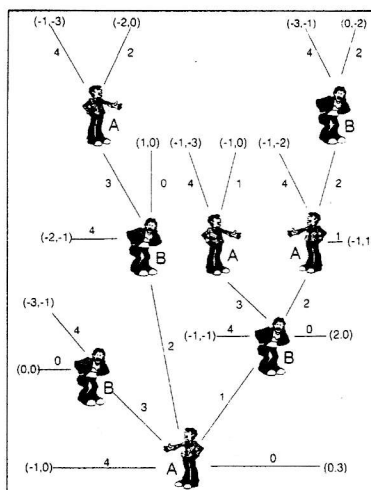
Les jeux économiques

L'analyse des jeux "économiques" est rendue délicate par le fait que ces jeux ne sont plus à "somme nulle", mais à

"somme non nulle". Dans un jeu de société, ce que l'un perd, l'autre le gagne. Dans un jeu économique, il faut simultanément faire croître le gâteau et se le partager. Hélas, bien souvent ces deux objectifs sont difficiles à concilier, et une compétition ruineuse peut détruire plus de richesses qu'elle n'en crée. Qu'apportent dans ces cas les mathématiques ?

Elles soulignent l'importance de la "connaissance commune" pour éviter de tomber dans des pièges dus à la poursuite d'un intérêt purement individuel qui ne tiendrait pas compte des réactions "rationnelles" des autres. En effet, la théorie des jeux fournit un cadre original qui permet d'explorer simultanément les implications logiques associées à des présupposés individuels. Lorsque ces présupposés sont connus de tous, la solution est facilement calculable, et ses propriétés économiques sont faciles à évaluer (c'est la connaissance commune). Lorsque ces présupposés ne sont pas connus, le désastre est pratiquement certain. La théorie nous enseigne donc à cerner rapidement les éléments clés sur lesquels il faudra que les concurrents s'entendent. Evidemment il restera encore à les mettre en œuvre... Cependant, un problème bien posé est déjà à moitié résolu.

Le jeu de la vente aux enchères d'un billet de 100 euros illustre les difficultés, les limites et l'intérêt de telles études.



1 - Arbre du jeu de la vente du billet de trois francs. A côté des traits figure la mise totale du joueur et, entre parenthèses, les pertes ou les gains de chaque joueur.

Imaginons qu'une personne (le commissaire-priseur) mette aux enchères un billet de 100 euros, avec la règle que les deux derniers enchérisseurs paient au commissaire-priseur la somme qu'ils ont mise en dernier ; le dernier enchérisseur garde le billet de 100 euros ; l'avant-dernier enchérisseur perd la totalité de sa mise. Vous pouvez expérimenter la situation au cours d'une soirée, et vous avez, comme nous allons le voir, tout avantage à jouer le rôle du commissaire-priseur.

Le commissaire-priseur joue et gagne

Supposons, pour simplifier, qu'il n'y ait que deux enchérisseurs A et B (il s'agit d'un jeu à deux joueurs) et que les enchères augmentent par montant de 10 euros. A mise 10 euros et B renchérit en misant 20 euros. Si A ne fait rien, il perd 10 euros et B, qui empoche le billet, gagne 80 euros. La situation reste similaire au cours des enchères suivantes, jusqu'à ce que la somme des deux enchères atteigne la valeur du billet : par exemple, A a misé 40 euros et B 50 euros. Au cours du déroulement des enchères, c'est la première situation critique. Que fait A ? S'il abandonne, il perd 40 euros et B en gagne 50. Si A mise 60 euros, il risque ces 60 euros et peut gagner 40 euros ; B s'il arrête alors, perd 50 euros et le commissaire-priseur gagne 10 euros. Une première solution apparaît en pleine lumière, mais les enchérisseurs auraient pu l'entrevoir avant : A et B peuvent s'entendre pour faire perdre le commissaire-priseur en arrêtant les enchères très tôt et en se partageant ensuite la différence entre 100 euros et le total de leur mise. On

dit que cette technique est pratiquée par les professionnels dans les salles de ventes.

En termes juridiques, nous sommes dans une situation d'entente, et cette pratique serait passible de fortes amendes. La théorie des jeux sert maintenant de référence pour "dire" pourquoi il y a entente. Dans ce cas précis, des présupposés qui consisteraient à se mettre d'accord à l'avance sur le dos du commissaire-priseur ressembleraient, sur un marché, à une entente sur les prix, entente défavorable aux consommateurs (ici représentés par le commissaire-priseur). Les profits acquis correspondants seraient "injustes".

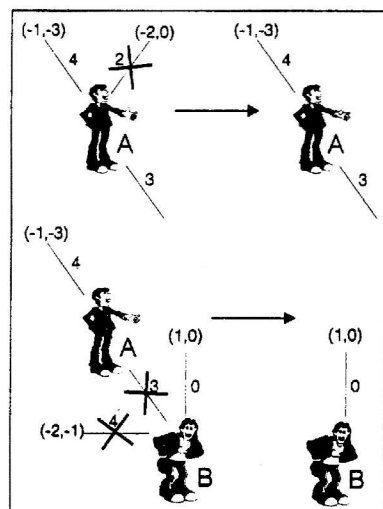
L'entente illicite

Donc A et B ne peuvent pas s'entendre, ce qui veut dire que les enchères doivent continuer tant que chacun d'eux estime que c'est dans son propre intérêt. Souvent ils continuent à miser pour ne pas perdre leur dernière mise. Une seconde situation critique apparaît quand l'enchère d'un des joueurs dépasse la valeur du billet. B vient de miser 100 euros et A s'interroge : dois-je perdre ma dernière mise avec certitude, par exemple 90 euros, ou enchérir à 110 euros et, si B abandonne alors, ne perdre que 10 euros ? Le malheur pour A et pour B est que B, après la dernière enchère de A, se tient un raisonnement analogue (avec une enchère possible de 120 euros). Dans la pratique, les deux joueurs A et B continueront à enchérir jusqu'à ce qu'ils atteignent la somme maximale qu'ils peuvent ou veulent perdre. Le paradoxe est que A et B risqueront plus de 100 euros, alors qu'ils sont maintenant certains de perdre quelque chose, et cela pour perdre moins !

Ce type de paradoxe apparaît dans de nombreuses situations sociales : courses aux armements, courses aux brevets, escalades commerciales diverses. Pratiquée au cours de soirées entre amis, la vente du billet de 100 euros aboutit le plus souvent à l'enrichissement du commissaire-priseur.

L'arbre des jeux

Pour illustrer un raisonnement de théoricien des jeux, reprenons cet exemple



2 - Les décisions rationnelles permettent d'éliminer les branches "dominées"

en détail en réduisant quelque peu le montant des enchères pour faciliter les calculs: le dernier enchérisseur empoche trois euros (au lieu de 100 euros); A et B disposent chacun, au départ, d'une somme de quatre euros; les enchères se font par un franc (au lieu de dix euros). La figure 1 représente "l'arbre de jeu".

Cet arbre va nous aider à explorer les décisions rationnelles. Nous allons déjà supprimer des branches "dominées"; nous supposons que les deux joueurs cherchent à maximiser leur gain ou à minimiser leur perte.

La branche supérieure, où le joueur A abandonne (mise 0) ou mise 2, pour une mise totale de 4, donne pour résultat $(-1, -3)$ ou $(-2, 0)$. Il est clair qu'il préfère ne perdre qu'un franc (résultat -1) et n'abandonnera pas. Nous pouvons donc supprimer la branche où il abandonne. Nous avons supprimé une branche. Au coup précédent, le joueur B a maintenant trois possibilités: il abandonne et perd 0, il enchérit de 3 et perd 3, il enchérit de 4 et perd 1. Il choisira de minimiser sa perte et abandonnera. Nous éliminons deux branches (voir la figure 2).

De proche en proche, nous supprimons ainsi diverses possibilités pour arriver à un arbre réduit (voir la figure 3).

A ce stade, deux scénarios rationnels apparaissent clairement: ou bien A choisit la branche 2 et obtient un franc (en général, ce scénario revient à enchérir de la valeur du billet moins la mise incrémentale de un franc) ou bien il choisit la branche 1 et obtient deux euros (en général, ce scénario correspond à enchérir du "reste" de la division euclidienne du budget disponible pour le montant du billet, soit ici $4 = 1 \text{ modulo } 3$).

Le premier scénario correspond à un raisonnement à la marge typique de la théorie de la concurrence parfaite. Le deuxième scénario correspond à la "concurrence imparfaite", c'est-à-dire à un raisonnement valable lorsqu'on fait face à un petit nombre d'agents. Il faut alors étudier les anticipations de chacun avec une grande finesse. Après une enchère de un franc, B doit "observer" qu'une surenchère de sa part ne pourra qu'entraîner "un coup de massue" de A (enchérir tout de suite de la totalité de la valeur du billet, ici trois euros), même si cette stratégie est "indifférente" par rapport à sortir du jeu. En effet, il serait contradictoire pour A de commencer par enchérir de un franc s'il anticipait ensuite d'abandonner (ce qui justifierait la suren-

chère de B et rendrait incohérent le choix initial de A).

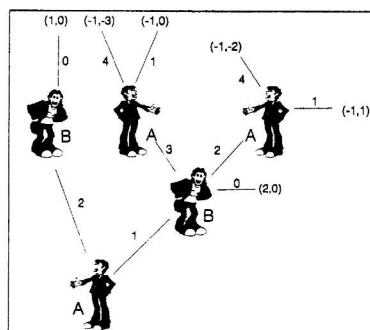
Entente ou concurrence

Tandis que le premier scénario conduit en gros à l'élimination des profits (ce qui est un résultat général pour les situations relevant de la concurrence parfaite), le second préserve un profit, profit qui ira à celui qui, par hasard ou parce qu'il a les coûts d'accès les plus bas, fera la première "bonne" enchère. Encore faut-il que les autres soient fair-play en attendant d'être, par hasard ou parce qu'ils auront alors les coûts d'accès les plus bas, les premiers à enchérir dans une nouvelle partie.

Préserver les profits qui sont "justes" est une bonne chose pour la société, car les profits sont la récompense d'une action entrepreneuriale qui bénéficie à tous (dans cet exemple, il n'y a pas d'action entrepreneuriale proprement dite; en général celles-ci sont associées à la création de nouvelles technologies, de nouveaux produits, à des implantations judicieuses..., et la peur des copies, des imitations ou des surenchères abusives peut limiter ces actions).

Résumons-nous: lorsqu'il y a un petit nombre d'agents, une compréhension fine des enjeux stratégiques est utile à tous. Cette compréhension permet de montrer que la frontière est fragile entre les situations de concurrence destructrice, l'entente abusive et la concurrence saine et loyale. Au moment où les interdépendances entre nations se multiplient, ce message n'est pas sans intérêt.

L'étude des situations de concurrence imparfaite et des modes de réglementation les plus favorables pour la société dans son ensemble constitue l'un des axes de recherche du Laboratoire d'économie de l'Ecole polytechnique. □



3 - La suppression des branches dominées fait apparaître deux stratégies possibles