

Mathématiques et outils de modélisation

Rapport CNRS - 1997

Suite et fin de l'article paru dans le PLOT 79

Tous les quatre ans, le Comité National de la Recherche Scientifique du CNRS - Centre National de la Recherche Scientifique - publie son rapport de conjoncture. Cette radioscopie de la recherche permet de connaître l'état des lieux de chaque grand domaine de la recherche. Le PLOT a déjà publié dans ses numéros les rapports de conjoncture 1989 et 1993 concernant les mathématiques.

Voici la fin de la radioscopie 1997.

La communauté des mathématiciens est vaste et très diverse, mais aussi très unitaire car ses membres ont une démarche commune fondée sur l'élaboration de concepts à valeur universelle et sur l'exigence de démonstrations. Issues d'une longue tradition intellectuelle, les mathématiques construisent un langage et des



2

1 San Francisco	6 Honolulu	11 Damas	16 Madrid
2 Mexico	7 Prague	12 Buenos Aires	17 Paris
3 Londres	8 Shanghai	13 Tokyo	18 Moscou
4 New York	9 Dakar	14 Singapour	19 Séoul
5 Libreville	10 Tunis	15 Sydney	20 Johannesburg

Le tour du monde

Comment trouver un trajet permettant de passer par les vingt villes représentées ? facile !

Il n'y a qu'à étudier tous les parcours possibles et choisir celui qui correspond à une distance minimale !

Mais cette méthode n'est pas réalisable pratiquement.

Pour résoudre ces problèmes, les mathématiciens cherchent à mettre au point des procédés automatiques (des algorithmes) qui minimisent le nombre et le temps de calcul.

outils que la plupart des autres disciplines scientifiques adoptent à plus ou moins long terme pour traiter leurs propres modèles.

Exemples d'interactions externes

1 - Logique et informatique

Sous l'influence de l'informatique, on a assisté, depuis une quinzaine d'années, à un renouveau des méthodes et des problèmes de la logique. Ainsi, les questions de sécurité logicielle qui demandent des preuves de spécifications ont-elles amené le développement théorique et pratique sous la forme de prototypes semi-industriels, de langages de type fonctionnel comme les lambda-calculs typés, basés sur la logique intuitionniste.

Le regain d'intérêt pour cette logique a induit de nouveaux développements théoriques, tels la logique linéaire, apparue en 1986, et qui ne manipule plus des vérités éternelles mais des réalités contingentes, où la notion de coût est essentielle. Cette théorie privilégie la notion d'interaction entre unités, d'où l'intérêt et les espoirs qu'elle suscite dans le monde de l'informatique, en particulier en direction de la programmation parallèle en manque de substrat théorique.

Bien représentée au CNRS, la logique n'est présente en France que dans très peu d'universités, alors que ses applications se font de plus en plus nombreuses.

2 - Algèbre, géométrie et informatique

Il s'agit d'étudier les grands problèmes de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes du point de vue de l'effectivité, de la complexité et de l'efficacité. C'est un retour à la tradition historique calculatoire de l'algèbre, qui a été oubliée pendant une bonne partie du vingtième siècle et revient en force avec l'essor de l'informatique comme outil pratique et discipline scientifique. L'informatique théorique permet de mieux analyser la nature profonde des algorithmes, tandis que l'informatique pratique permet de tester les méthodes sur des exemples et de se tourner vers les applications.

Le calcul formel est bien implanté en France et il est utilisé dans d'autres domaines, l'astronomie par exemple. Le soutien du CNRS, qui a permis la mise au point d'un centre de ressources efficace, joue un rôle important, et il doit être maintenu.

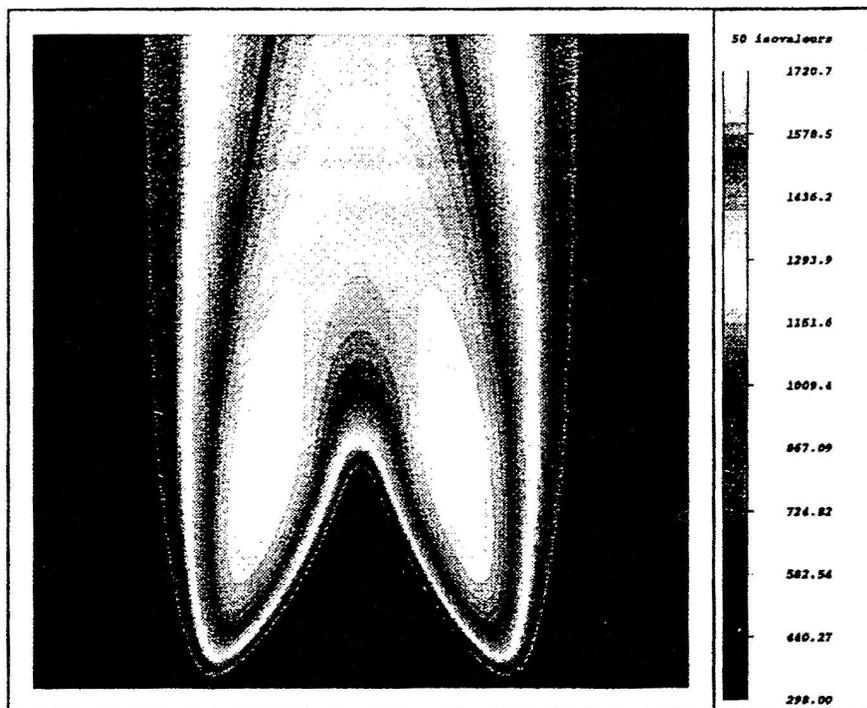
3 - Géométrie et physique

La géométrie différentielle a été dès son origine profondément liée à la physique et les allers-retours conceptuels sont nombreux et féconds. Les noms d'objets géométriques usuels le montrent bien : métriques d'Einstein, opérateurs de Dirac, spineurs, etc. Outre la symétrie miroir déjà évoquée dans un contexte algébrique, de nombreux progrès récents, centrés sur la géométrie, concernent en fait bien d'autres domaines. Les invariants de Seiberg et Witten, utilisant une équation de Dirac particulière, ont permis des avancées spectaculaires dans la compréhension de la topologie de dimension 4 et en topologie symplectique, amplifiant des résultats de la théorie de Donaldson qui, elle, s'appuyait sur les théories de jauge non abéliennes.

Parmi les sujets où les idées des physiciens ont permis de progresser, on peut citer aussi les méthodes variationnelles d'EDP en analyse globale, en particulier sur les relations entre courbure et topologie et la topologie symplectique, dont beaucoup de propriétés sont encore mystérieuses, la géométrie kählérienne et ses liens avec la théorie quantique des champs, la géométrie différentielle non-commutative et les interprétations physiques qu'en propose Alain Connes, l'usage des spineurs en géométrie et la supersymétrie, la géométrie sous-riemannienne et son usage en théorie du contrôle, les approches géométriques à la théorie des nombres, la géométrie à courbure négative et ses liens avec la théorie ergodique et le chaos quantique, etc.

Devant ce foisonnement un peu étourdissant, le fait que la France ait un grand nombre de mathématiciens de talent, travaillant à seulement quelques heures de train les uns des autres, est un atout considérable qui doit lui permettre de continuer d'être à la pointe de la recherche sur des points fondamentaux de la compréhension du monde physique.

Température T pour
une flamme pauvre
hydrogène-air de type
Bunsen.



4 - Modélisation

Les modèles mathématiques, discrets ou continus, déterministes ou stochastiques, prennent en compte des phénomènes non linéaires de plus en plus complexes, dans des géométries multidimensionnelles. Ils s'appliquent à de nouveaux domaines scientifiques (environnement, réseau de neurones, etc.), à des problèmes industriels représentant des enjeux économiques, voire stratégiques. La puissance des ordinateurs actuels, notamment parallèles, permet non seulement la simulation numérique de phénomènes connus mais aussi de véritables "expérimentations numériques", donnant en retour une évaluation des hiérarchies de modèles en confrontation à la situation expérimentale réelle.

La validation est une phase cruciale, et demande au préalable une étude théorique incontournable des phénomènes critiques qui peuvent se produire dans les modèles. A la base, on trouve la théorie des bifurcations et celle des systèmes dynamiques. Toutefois, les problèmes posés par les physiciens, chimistes, biologistes... sont le plus souvent extrêmement complexes et nécessitent le recours à de nombreuses branches des mathématiques: équations aux dérivées partielles, méthodes asymptotiques et homogénéisation, singularités, méthodes géométriques, frontières libres, groupes de Lie et leurs représentations,

probabilités, etc. La démarche du mathématicien modélisateur couvre ainsi tout le spectre, de l'analyse du système jusqu'au code de calcul.

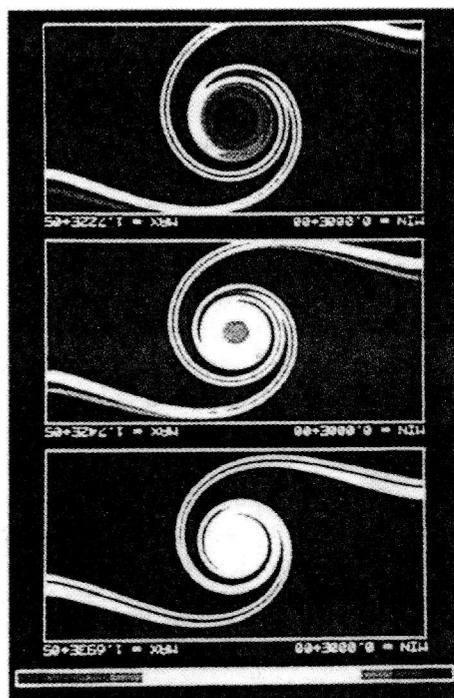
Voici une liste, non limitative, des domaines où la modélisation est en plein essor :

Mécanique des fluides

Les équations de la mécanique des fluides sont depuis longtemps l'objet de simulations numériques : actuellement la création d'un nouvel avion repose majoritairement sur des expérimentations numériques "en taille réelle". Bien qu'étudiées depuis longtemps, les instabilités hydrodynamiques, transition vers la turbulence et chaos, ou ondes de surface par exemple, sont encore largement incomprises. De grands efforts sont en cours concernant les fluides non newtoniens, le vaste domaine de la combustion, à l'interface entre l'hydrodynamique et la chimie, le couplage fluide-structure.

Nouveaux matériaux

La modélisation ne se limite plus aux plaques, elle s'applique actuellement aux nouveaux matériaux parmi lesquels ceux dits intelligents (à mémoire) et à l'optimisation de forme sous contraintes technologiques (Conception Assistée par Ordinateur).



Configurations d'allumage dans un tourbillon. L'allumage apparaît dans les bras du tourbillon et dans le noyau de réactifs prémélangés.

Électromagnétisme

L'évolution récente de la technique de détection par les radars conduit à de nouveaux problèmes liés à la furtivité, soit par des méthodes actives de type antennes, soit par l'utilisation de nouveaux matériaux. Ces problèmes requièrent la modélisation et la simulation numérique précise des ondes électromagnétiques.

Interaction laser-matière

La construction de lasers de haute puissance laisse entrevoir la possibilité de l'étude mathématique d'un domaine de la physique inexploré jusqu'alors.

Environnement

Cette rubrique regroupe des thèmes en pleine évolution, en climatologie, météorologie, géologie, glaciologie, systèmes écologiques, etc. La mécanique des fluides géophysiques dans des milieux souvent aléatoires fait intervenir des échelles d'espaces et de temps considérables. Il est donc indispensable d'élaborer des modèles simplifiés globaux, par exemple pour les interactions océan-atmosphère ou la circulation de l'air en milieu urbain. Les techniques à cheval sur les probabilités et le calcul scientifique sont encore trop peu développées en France.

Mathématiques du vivant

Il s'agit là d'une branche des mathématiques appliquées, nouvelle en France, sur laquelle plusieurs groupes commencent à travailler. Citons, parmi les recherches en cours, les problèmes de propagation d'épidémies, le séquençage de génomes, les écoulements sanguins, la morphologie du cœur. Des collaborations entre biologistes, médecins et mathématiciens devraient être encouragées.

Réseaux de neurones

Les problèmes posés par les réseaux de neurones et la vision artificielle sont étudiés par des équipes au double profil mathématique et informatique, avec de multiples interactions.

5 - Mathématiques et économie

Parmi les nombreuses interventions des mathématiques en économie, l'exemple des mathématiques financières montre bien l'explosion des besoins. En effet, avec l'ouverture des marchés organisés en France à la suite des États-Unis et de la Grande-Bretagne, s'est développée une activité financière dont les enjeux sont considérables et qui rapproche la banque de l'assurance. Il y a dans ce domaine un grand

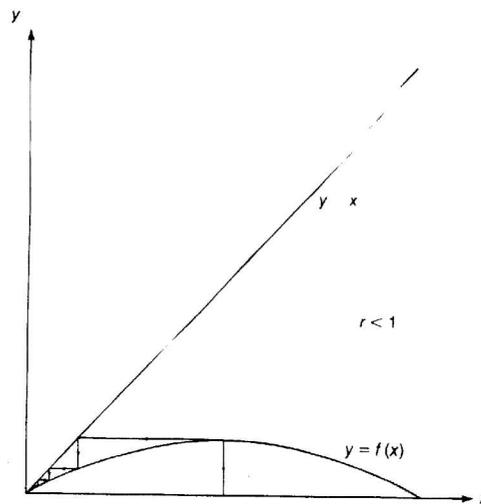
besoin de modèles, d'ingénieurs mathématiciens capables de faire tourner des calculs en temps réel, de nombreuses questions de recherche et de développement.

L'objet d'étude lui-même est abstrait, l'exemple le plus simple en est la couverture des produits dérivés. Il n'est pas étonnant que les modèles soient assez sophistiqués. Ils font intervenir, le plus souvent simultanément, les problèmes inverses en EDP, les équations différentielles stochastiques, les simulations statistiques, et renvoient à de nombreuses questions théoriques de ces domaines.

Les banques et les assurances devraient jouer leur rôle d'industriels en finançant une recherche appliquée de qualité qui pourrait utiliser la richesse du niveau de formation mathématique en France.

La situation française et le contexte international

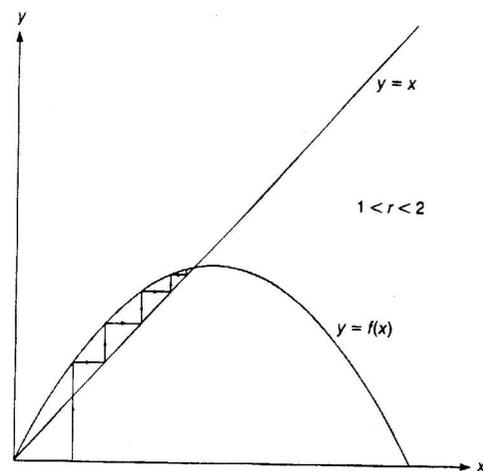
La situation des mathématiques françaises est très bonne. Elle est excellente au niveau scientifique : en effet, rares sont les secteurs des mathématiques non représentés en France, et dans certains notre pays a une bonne avance. Cela est dû en partie à la place importante que les mathématiques occupent dans l'enseignement français. Au niveau matériel, la situation est aussi relativement bonne dans l'ensemble. L'existence du CNRS est un atout d'une importance incomparable pour le maintien au plus haut niveau de la recherche mathématique. Il est primordial de préserver ces



(a)

6

Itération correspondant à la suite logistique à l'aide des deux courbes $y = rx(1 - x)$ et $y = x$. On choisit une valeur d'entrée x_1 ; la valeur de sortie est obtenue en traçant à partir de là une droite verticale jusqu'à l'intersection avec la courbe $y = rx(1 - x)$. On recommence avec cette nouvelle valeur x_2 . On répète le processus indéfiniment.



(b)

deux atouts, le CNRS et la qualité de l'enseignement, et il convient de ne lâcher ni sur l'un, ni sur l'autre.

Il est également important de s'intéresser à la situation dans les autres pays et de défendre la science chez nos partenaires. Un événement majeur est l'effondrement survenu dans les pays de l'Est, et notamment en Russie. Cet énorme bassin de connaissances mathématiques et de savoir-faire s'est ouvert largement aux contacts et, en même temps, il a été déstabilisé par un arrêt brutal des moyens matériels mis à disposition. Il en a résulté un grand remue-ménage des idées et des hommes dans presque tous les champs des mathématiques. La France en a largement bénéficié grâce à d'excellentes initiatives comme les postes d'accueil CNRS ou les postes PAST. Une des conséquences de ces bouleversements est que, désormais, tous les mathématiciens travaillent dans le même monde. Il n'existe plus cet au-delà où des théories inconnues étaient en mouvement - on en a vu plusieurs émerger récemment -, et où certains travaux méprisés à tort pouvaient trouver un écho favorable : le défrichage du travail de De Branges par l'école de Leningrad en est un exemple.

Il semble qu'aux Etats-Unis la situation soit moins bonne, avec moins d'emplois, moins de moyens, et un fléchissement déjà perceptible dans certains domaines. Il est indéniable que le nombre de colloques importants y a diminué. Il faut espérer que cette période défavorable ne durera pas et que nos collègues américains retrouveront rapidement de meilleures conditions de recherche.

En Europe, on assiste à une coopération renforcée entre les pays. Il s'y déroule de plus en plus fréquemment des colloques importants, de sorte que les mathématiciens français rencontrent leurs collègues allemands, britanniques, suisses, italiens ou autres ailleurs que dans une université américaine. Les centres de rencontres européens (Oberwolfach, CIRM à Marseille-Luminy) se sont imposés comme des lieux privilégiés pour organiser des colloques mathématiques et sont donc très recherchés. Des instituts accueillant un grand nombre de visiteurs ont été créés dans la plupart des pays du monde. Ceux qui sont situés en Europe (Institut Max Planck à

Bonn, Institut Isaac Newton à Cambridge, ICTP à Trieste, Institut Mittag-Leffler en Suède, Institut Henri Poincaré à Paris et Institut des Hautes Etudes Scientifiques à Bures-sur-Yvette, etc.) ont un grand rayonnement. L'augmentation des crédits européens pour la recherche joue aussi un rôle fondamental dans cette évolution. Cette situation très positive n'exclut pas quelques dysfonctionnements au niveau des programmes de la Commission Européenne et des erreurs de répartition, auxquels il est urgent de remédier en instaurant des structures d'administration de la recherche mieux adaptées aux besoins de chaque discipline.

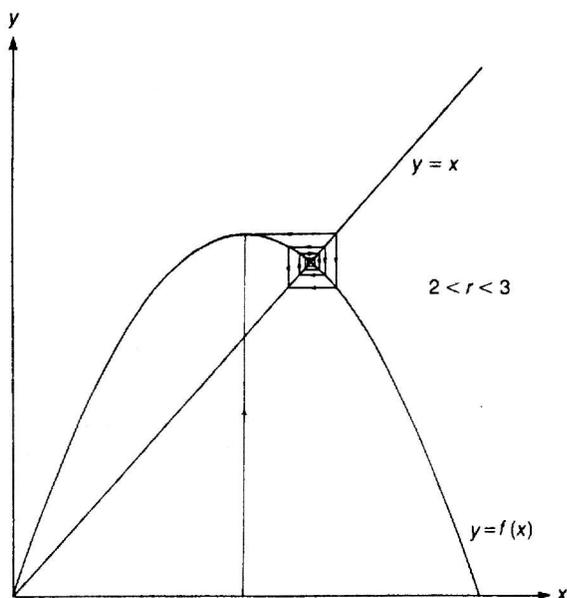
Dans les pays en développement, la situation n'a guère évolué. Parfois, elle s'est même aggravée, par exemple en Algérie. Il faut pouvoir accueillir des étudiants et des chercheurs de ces pays dans de bonnes conditions. Mais il faut aussi préserver les structures de formation qui y existent et multiplier les initiatives de coopération, telles celles mises en œuvre par le CIMPA. Dans le sud-est asiatique, certains pays atteignent un niveau de développement économique élevé, et l'émergence d'universités fortes est à prévoir. Il est important que les mathématiques y prennent leur place, et les mathématiciens français doivent s'y employer.

Vœux sur les moyens et les hommes

Les mathématiques, comme toute science, ont un coût, et les considérations socio-économiques ont leur importance. Les désastres qui frappent la recherche dans certains pays appellent à la vigilance.

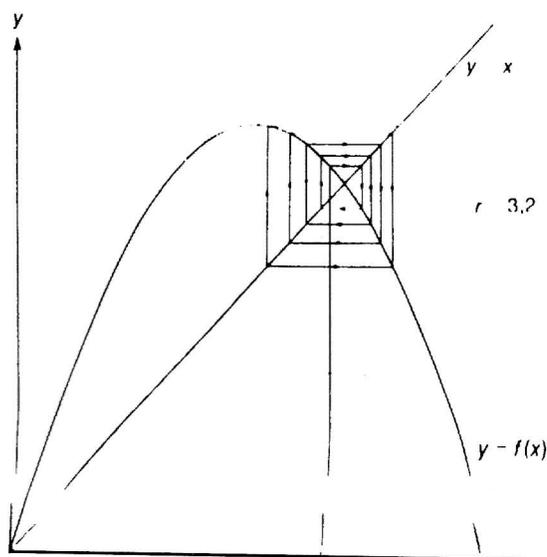
1 - Renouveau du potentiel humain

La recherche mathématique en France est très majoritairement universitaire, mais le CNRS, avec seulement un dixième des mathématiciens, occupe une place de premier plan et aide à maintenir l'excellence. Il existe un flux sortant vers l'université, cinq à dix chargés de recherche devenant professeurs chaque année. Le nombre de recrutements doit compenser ces sorties, renouveler les générations et



(c)

Les illustrations de c à f montrent des situations correspondant à diverses valeurs du gain r . On voit que l'itération est très sensible aux variations de la valeur de r .



(d)

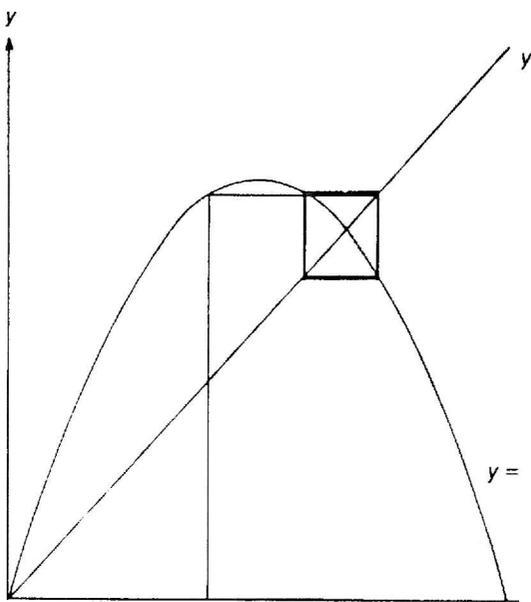
commencer à lisser le choix prévisible des départs massifs à la retraite d'enseignants-chercheurs dans la période 2000-2010. Le fléchage volontariste "deux tiers en province, un tiers à Paris" pour les affectations des entrants a permis une consolidation très positive des équipes de province. Toutefois, il conduit au vieillissement des équipes parisiennes. Un fléchage plus précis des lieux d'affectation ou des thèmes de recherche n'est pas très adapté aux mathématiques dans la mesure où le CNRS recrute des chercheurs a priori capables de s'adapter et d'être mobiles.

L'âge moyen de promotion ou d'accès au grade de directeur de recherche a tendance à augmenter, ce qui est logique vu le nombre d'entrants qui est très largement supérieur au nombre de promus. Les

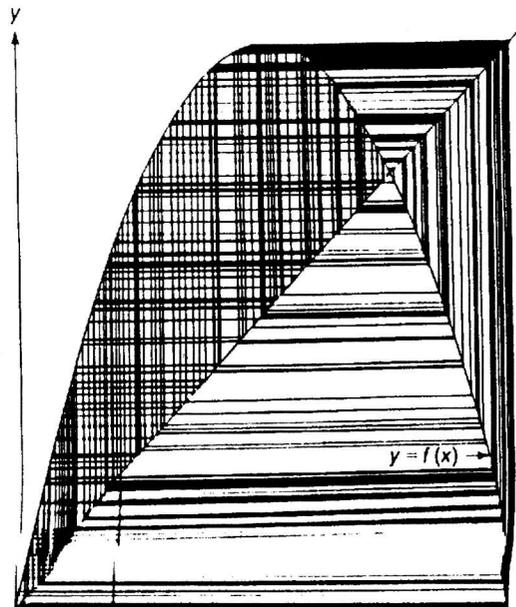
universitaires, qui aimeraient profiter de détachements au CNRS pour avoir plus de temps à consacrer à la recherche, tout comme les chargés de recherche, qui ont un grand retard de carrière par rapport à leurs collègues enseignants-chercheurs, vivent difficilement cette situation qui n'est pas saine à long terme. En mathématiques, la recherche se développe par une symbiose entre le CNRS et l'Université. C'est une très bonne chose, et il faudrait lever certains obstacles administratifs pour favoriser encore plus les échanges entre ces institutions.

2 - De grands équipements en mathématiques ?

Jusqu'à ces dernières années, les seuls grands équipements en mathéma-



(e)



(f)

tiques étaient les centres de rencontres et les bibliothèques. Bien sûr, celles-ci ont encore une importance fondamentale, mais des évolutions sont en cours. Leur informatisation a besoin d'être généralisée, ainsi que le développement de bases de données. La transmission informatique de documents se développe de plus en plus. On voit apparaître des revues électroniques consultables par ordinateur. Certains mathématiciens se contentent désormais de mettre leurs pré-publications sur leur "page-maison" dans Internet et de diffuser une note brève par courrier électronique à leurs correspondants du monde entier.

Le développement de réseaux de communication efficaces est donc ressenti comme une nécessité de plus en plus cru-

ciale. Ce problème ne date pas d'hier, mais comment ces réseaux seront-ils financés ?

D'autres besoins d'un type nouveau sont aussi apparus. L'accroissement de la complexité des problèmes étudiés nécessite le développement d'ordinateurs très puissants. En particulier, les machines parallèles et les stations de travail en grappe promettent pour l'avenir un énorme essor du potentiel de calcul, pour peu que les algorithmes nécessaires à leur utilisation soient disponibles. Il faut encourager le développement de gros moyens de calcul internes aux laboratoires des Universités et du CNRS, pour qu'un chercheur désirent justifier ses résultats théoriques ou d'analyse numérique n'ait plus à faire appel à des "calculateurs" dans le privé ou à l'étranger. D'autre part, il faut

absolument veiller à la formation de chercheurs capables d'écrire ou de superviser l'écriture de grands programmes de calcul, notamment sur les machines parallèles : ces logiciels doivent pouvoir être écrits en langages modernes et compatibles avec plusieurs types de machines. Néanmoins, le besoin le plus criant à l'heure actuelle est celui d'ingénieurs informaticiens, indispensables pour la maintenance des réseaux déjà installés dans les laboratoires.

Les mathématiciens sont donc maintenant demandeurs de grands équipements. Des efforts importants ont été faits dans la période récente, mais il est nécessaire de ne pas couper l'élan donné pour que les mathématiques françaises puissent rester dans le peloton de tête.

Conclusion

Les interactions

On peut constater dans la période récente une nette augmentation des interactions, à la fois entre les différentes branches des mathématiques, mais aussi entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques. De nombreux résultats exigent des connaissances profondes dans plusieurs domaines fondamentaux. Le cloisonnement entre mathématiciens purs et mathématiciens appliqués est de plus en plus flou, et il est clair que de nombreuses coopérations se mettent en place. D'un autre côté, les mathématiciens ont de plus en plus d'échanges et de collaborations avec leurs collègues des autres disciplines. C'est le cas pour la physique, mais aussi pour l'informatique, la biologie et la chimie.

Enfin, les liens avec l'économie sont aussi en progression. Il est significatif de voir que le congrès international de physique mathématique qui s'est tenu à Paris en 1994 impliquait un groupe exceptionnel de mathématiciens.

Le CNRS est certainement un lieu privilégié pour la mise en place de structures adaptées à des équipes interactives. Cependant, l'évaluation n'est pas toujours facile dans le cas d'actions pluridisciplinaires, et

la rigueur de gestion indispensable doit pouvoir être imposée dans un cadre adéquat.

L'avenir des mathématiques

Les mathématiques françaises se portent très bien. Elles continuent de jouer un rôle important. Elles en sont redevables pour une bonne part au CNRS. Toutefois, il convient de comprendre les contingences et les raisons de cette situation et de ne pas se contenter des succès récemment obtenus sur la scène internationale. Les mathématiciens ont fait preuve, depuis quelques années, d'une grande ouverture, bénéfique à bien des égards. Les applications apportent beaucoup, et pas seulement au niveau financier. Mais un équilibre doit être maintenu, et il faut consolider au niveau théorique les avancées venues des applications. Il est remarquable que ce soit la collaboration ouverte entre des mathématiciens théoriciens très curieux et des modélisateurs soucieux de rigueur qui ait permis une avancée significative dans plusieurs domaines, comme la théorie des ondelettes. Cela nous montre avec force qu'il est essentiel de préserver l'unité des mathématiques. Les mathématiques françaises ne doivent pas perdre leur identité en se morcelant, elles doivent garder une structure cohérente. □

Parions que la vitalité des mathématiques permettra de surmonter les difficultés, comme le laisse à penser la phrase suivante d'Edward Witten :

"I do think that, looking at things in the long run, some of the most exciting mysteries we know about in trying to expand our knowledge of fundamental nature law are mathematical".

