Du lycée au 1er cycle des Ecoles d'architecture,

QUELLE GEOMETRIE ?

F. Bonafé & T. Berthomier, Montpellier

Depuis 1992, quelques enseignants du groupe géométrie de l'IREM de Montpellier, en activité dans le secondaire, collaborent (comme vacataires) à l'enseignement de la géométrie à l'EARL.

Cette collaboration a permis de cerner plus clairement le profil et les lacunes des entrants à l'EARL, un contenu et des méthodes pour l'enseignement de la géométrie (distinct de l'enseignement de la représentation) paraissant les mieux adaptés à cette population.

Afin de cerner plus précisément la population concernée, nous proposons un test à tous les étudiants de première année le jour de la rentrée (ce questionnaire fait l'objet de l'annexe 1). Nous présentons ci après quelques résultats dégagés des réponses obtenues lors des rentrées de 1993 et 1995 (durant cette période les dénominations des divers baccalauréats ainsi que les contenus enseignés ont étés quelque peu modifiés).

Les entrants à l'EARL

Nous avons classé les étudiants de première année en trois catégories:
- **S** : il s'agit de ceux qui entrent avec un baccalauréat général à caractère scientifique récent (moins de quatre ans).
- **L** : ce sont ceux qui entrent avec un baccalauréat général à caractère non scientifique récent (moins de quatre ans).
- **T** : nous avons regroupé là les étudiants possédant un diplôme à caractère technologique récent (moins de quatre ans) ainsi que les étudiants ayant une expérience professionnelle, quel que soit le niveau acquis en fin d'études secondaires.

Pour les deux années observées, ils se répartissent de la façon suivante (en %).

	S	L	T
Année 93/94	45	21	34
Année 95/96	59	21	20

On peut remarquer que la part des L est constante alors qu'il y a une baisse des T au profit des S. Ce choix est peut-être le résultat d'une politique locale puisque il y a une sélection des candidatures à l'entrée. Peut-être est-il fortuit ? En tout cas il ne modifie pas la part de la population ayant une formation à caractère scientifique ou technologique.

Cette répartition est une spécificité de l'EARL. On ne la retrouve pas dans les autres filières de l'enseignement supérieur.

Test et résultats

Le dépouillement du questionnaire (qui se trouve en annexe 1) fait apparaître des résultats globalement peu différents pour les deux années observées. On peut simplement noter qu'ils sont identiques en L, et pour 1995 légèrement inférieurs en S et légèrement supérieurs en T à ceux de l'année 1993.

Les résultats aux premières questions sont conformes aux pronostics: égalités remarquables, médiatrices, sont bien connues de tous. Il n'en est pas de même de l'ellipse, mais là aussi c'est conforme aux pronostics car elle n'est étudiée que dans certaines classes scientifiques. Pour les autres étudiants, elle relève simplement de la culture acquise sur le sujet.

La question 5

a) Comment détermine-t-on graphiquement le centre de gravité d'un triangle quelconque?
Réponse:

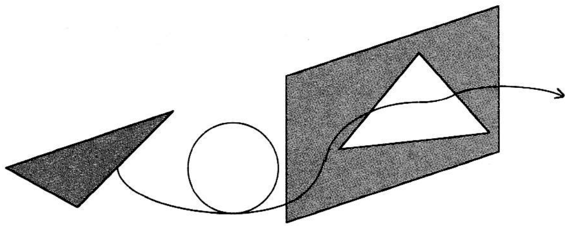
b) Quelle est sa propriété ?
Réponse:

La question 6

Figure ci-dessous.

Enoncer clairement, à l'aide de termes géométriques élémentaires, la condition nécessaire et suffisante pour que le triangle quelconque, plein, passe par le trou triangulaire quelconque (ces deux triangles étant différents et supposés sans épaisseur).

Réponse:



Environ 70% des candidats donnent une bonne dÉfinition du centre de gravité. Cela va de 58% pour les L ou les T à 85 % pour les S. On observe quelques contradictions entre la figure qui est toujours correcte quand elle est présente et le langage associé qui lui est parfois incorrect (médiane étant remplacé par médiatrice ou hauteur).

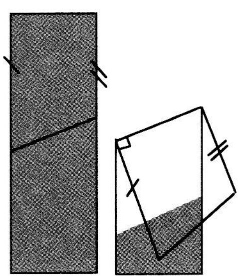
Quand il s'agit de donner sa propriété (il faut en choisir une), il ne reste que 38% des étudiants pour donner une propriété correcte (et cohérente avec leur précédente réponse) du centre de gravité. Cela va de 53% pour les S à 25% pour les T et 20% pour les L.

Enfin au sujet de l'exercice 6, seulement 29% font référence à une hauteur d'un triangle (pas toujours le bon d'ailleurs). Ils se répartissent en 38% pour les S, 32% pour les T, et seulement 8% des L.

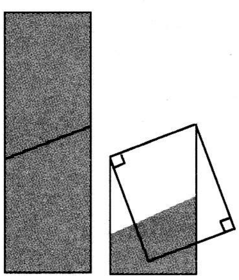
Le tableau qui suit résume ces résultats.

	S	L	T	Ensemble
Question 5a	85	58	58	70
Question 5b	53	20	25	38
Question 6	36	8	32	29

Au-delà des simples questions de vocabulaire on constate une méconnaissance profonde des concepts de centre de gravité et de hauteur dans un triangle.



Priorité aux longueurs des bords

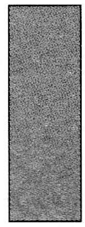


Priorité aux angles droits de l'extrémité

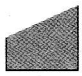
La question 7

Figure 2 ci-dessous.

Sur une bande de papier rectangulaire, tracer un pli rectiligne (Éviter 45° qui est particulier). Dessiner à main levée le plus rigoureusement possible cette bande repliée avec les indications nécessaires et suffisantes pour valider l'exactitude de votre figure.



Déplié
Indiquer le pli.



Replié
Compléter la figure.

Dans 6% des copies la réponse est absente. Seulement 39% des candidats proposent une solution correcte à cet exercice (en acceptant les solutions où les indications sont omises ou incomplètes). Cela va de 48% en S à seulement 23% en L. Si l'on s'intéresse à la notion d'invariant, c'est l'angle droit supérieur qui est le plus souvent conservé, c'est vrai pour 70% des dessins. Les longueurs sont de façon approximative conservées dans 60% des dessins, les autres angles (pliage) ne le sont que dans seulement 45% des cas.

Par contre 37% des dessins montrent les bords de la partie repliée perpendiculaires au pli ce qui conduit à un choix concernant les invariances d'angles ou de longueur. Les dessins suivants sont des prototypes de ces dernières réponses.

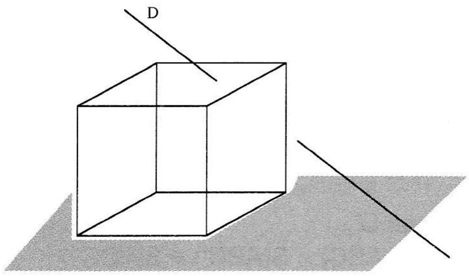
Pour plus d'un tiers des étudiants, l'invariance dans un déplacement n'affecte pas de façon globale une figure. Cette notion est parcellaire et peut affecter longueurs ou angles de façon indépendante.

La question .

Figure 3 ci-contre.

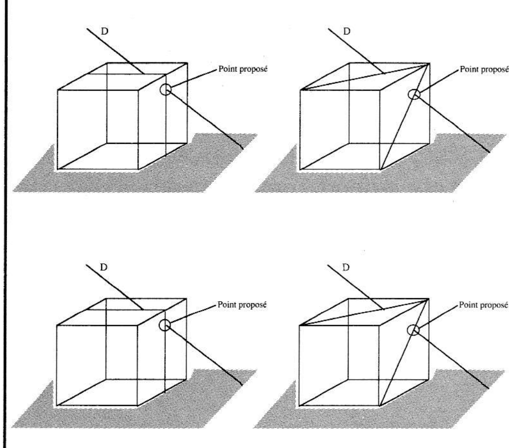
Pouvez-vous dÉterminer graphiquement, à main levée mais avec précision sur cette perspective d'un cube posé sur un plan, le point ou la droite (D) sort de la face latérale de ce cube?

La question posée n'impose pas explicitement une réponse graphique, deux étudiants ont d'ailleurs affirmé qu'il ne leur était pas possible de répondre, les données étant pour eux insuffisantes. Dans 8% des copies la réponse est absente sans qu'une explication soit fournie. Dans 6% des copies seulement, le dessin est correct, il ne contient pas d'incohérence, et il montre que les deux points où la droite D parait traverser des plans horizontaux ont étés utilisés dans la construction.



Dans 35% des copies la réponse semble relever du hasard, peut-être de l'esthétique, on n'observe pas de trait de construction. Ce type de réponse parait indépendant de l'origine de l'étudiant, les résultats sont identiques quels que soient l'année observée ou leur formation antérieure.

Dans tous les autres cas présentant des éléments de construction, on observe des incohérences entre les "théorèmes" mis en oeuvre et les données du problème. Ces incohérences conduisent les étudiants ne prendre en compte qu'un seul point donné et une direction arbitraire pour définir la droite D. Les figures suivantes sont des prototypes de leurs productions.



Les propriétés d'incidence, maîtrisées par les étudiants en géométrie plane, ne sont pas prises en compte dans les problèmes faisant intervenir des représentations spatiales.

L'essentiel des résultats dégagés à partir de ces tests vient confirmer les résultats énoncés par AUDIBERT G.(1982) pour ce qui est de la géométrie plane et ceux de AUDIBERT G (1985) et CHEVALIER A (1988). pour la géométrie de l'espace.

La géométrie de l'architecte

Existe-t-il, au delà des modes, une géométrie des architectes? Lorsqu'on les interroge à ce sujet, les réponses sont très diverses et directement en prise avec leur secteur d'activité.

Cela peut varier de "la géométrie de l'angle droit" à "la géométrie de la représentation" ou bien "la géométrie du triangle".

Ces points de vues quelque peu réducteurs laissent de côté toutes les possibilités qu'une structuration rigoureuse du plan et de l'espace laissent à l'invention.

Depuis que l'architecte dessine, il n'a jamais cessé d'emprunter à la géométrie.

Aujourd'hui, l'espace est considéré comme son domaine privilégié, et cela explique sans doute l'importance accordée aux espaces de représentation architecturaux, systèmes qui se nourrissent de l'espace géométrique proprement dit. Deux exemples évidents: on ne peut circonscrire un cercle par plus de six cercles qui lui sont égaux ni développer une surface non développable dans le plan. Cela pour dire qu'on ne peut manipuler l'espace géométrique selon son bon vouloir. Il y a une limitation géométrique propre et cela reste une donnée primitive.

Des systèmes de contraintes autres que l'espace géométrique, retenons principalement pour les registres les plus couramment aperçus et utilisés en architecture, les modes graphiques, cartographiques, topologiques et figuratifs.

Tracer, localiser, explorer, figurer sont des pratiques qui peuvent procéder d'un autre enseignement. Le notre s'attache à clarifier les données primitives de l'espace géométrique afin d'assurer son transfert par les systèmes de représentation.

Dans les enseignements voisins que sont la géométrie descriptive et la perspective, on constate trop souvent les difficultés des étudiants qui confondent géométrie de l'objet et celle de sa représentation, à aborder ces géométries.

Ils ont tendance à croire que la représentation définira l'objet alors qu'elle ne peut que communiquer - à sa manière -

une information présente dans l'espace géométrique, information qu'ils énoncent souvent avec imprécision. Par exemple, un étudiant qui traite de l'intersection d'une droite et d'un plan en géométrie descriptive mémorise un ensemble de procédures qui en fait, décomposent le problème en intersection de deux plans puis de deux droites, décompositions trop souvent passées sous silence au bénéfice de routines aussi facilement oubliées qu'apprises.

Quelle géométrie pour l'élève architecte ?

Compte tenu de la nature de la population des étudiants de première année à l'EARL (répartition, précisions apportées à son sujet par les tests), compte tenu également des horaires accordés localement à l'enseignement de la géométrie (en dehors des questions de représentation, les étudiants ont 30 heures de géométrie sur l'année) nous avons dû effectuer des choix sur les contenus à enseigner et sur les méthodes de travail.

Pour ce qui est des méthodes, après avoir goûté au cours magistral en amphi suivi de travaux dirigés comme cela se pratique dans de nombreuses universités, nous avons opté pour un système que nous appelons cours/T.D où les étudiants sont répartis par groupes inférieurs à 40. Cela permet une activité plus soutenue de leur part. Nous avons également réalisé un polycopié [1] qui contient l'essentiel des questions abordées et, entre les examens partiels, nous leurs proposons des travaux à réaliser en autonomie que l'on nomme "sujets d'études" dont un exemple figure en annexe 2.

Pour ce qui est des contenus nous avons privilégié trois thèmes qui nous paraissent incontournables.

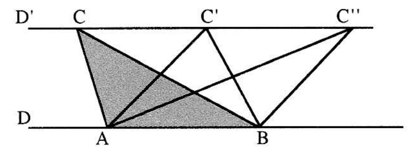
THEME 1 : Figuration et formalisme

Il s'agit pour l'essentiel d'exploiter visuellement une figure à partir de simples propriétés sur les surfaces, afin d'établir et d'utiliser d'autres propriétés déjà connues ou à découvrir comme les théorèmes de Thalès, de Céva, de Pappus. Nous axons notre travail sur l'aire du triangle et quelques propriétés communément admises à son sujet.

Règle 1:
la surface d'un triangle est invariante dans tout déplacement ou retournement.

Elle est donnée par
quelles que soient la base b et la hauteur h correspondante.

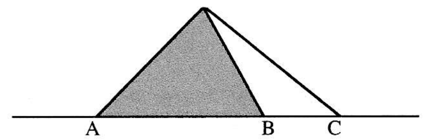
Règle 2 :
Si D et D' sont parallèles, la surface du triangle ABC est indépendante de la position



de C sur D'.

$$S(ABC) = S(ABC') = S(ABC'')$$

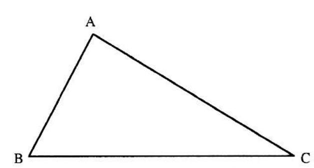
Règle 3 :
réciproquement, si un triangle a une surface fixe donnée et un côté AB fixe, son troisième sommet C situé d'un côté donné de AB, est sur une droite parallèle à AB.



Règle 4:
A, B, C étant alignés, les surfaces des triangles ABS et BCS sont dans le rapport de leurs bases AB et BC.

$$\frac{S(ABS)}{S(BCS)} = \frac{AB}{BC}$$

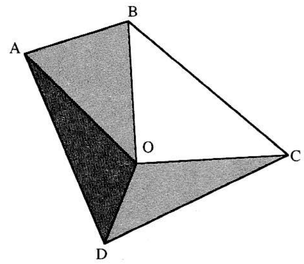
C'est notre point de départ, il nous permet de réconcilier avec la pratique de la géométrie ceux qui ont pour des raisons diverses rejeté toute activité mathématiques. De plus, il ne les met pas en position de retrait par rapport à ceux possédant déjà une bonne expérience et un usage convenable du langage formel, ce qui favorise leur activité. Ce travail permet à tous d'aborder des exercices dont la solution n'est pas évidente



comme les questions suivantes.

ABC est un triangle. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que S(ABM) = S(ACM) ?

ou encore...

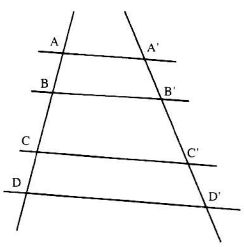


ABCD est un quadrilatère convexe. Peut-on construire à l'intérieur un point O tel que:

S(OAB) = S(OBC) = S(OCD) = S(ODA) ?

Deux points de vue coexistent :

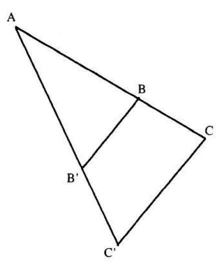
Lignes proportionnelles



Des parallèles déterminent sur des sécantes des segments proportionnels.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}$$

Triangles semblables



Si l'on trace une parallèle à un côté d'un triangle, elle détermine deux triangles à côtés proportionnels.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\frac{BB'}{CC'}$$

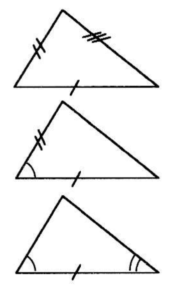
Une fois abordés les divers points de vue sur le théorème de Thalès (d'accès facile par les aires) et le travail sur les proportions qui les accompagne .la similtude vient naturellement servir de synthèse à ces résultats.

THEME 2 : Résolutions des triangles

Ce thème résume pour l'essentiel, les diverses méthodes qui permettent lorsque un triangle est fixé, d'en calculer les divers éléments. Il prend appui sur ce que nous appelons les trois cas d'existence d'un triangle (la majeure partie du travail effectué dans ce chapitre nécessite quelques connaissances et savoir-faire en trigonométrie dont l'essentiel doit être remis en mémoire).

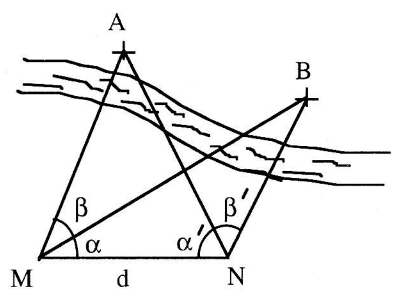
Un triangle est défini (à une isométrie près):

- Soit par ses trois côtés,
- Soit par deux côtés et l'angle qu'ils déterminent,
- Soit par deux angles et le côté qui leur est commun.



Les étudiants d'aujourd'hui n'ont pas été formés en géométrie à partir des cas d'égalité (ou de similitude) des triangles, ce sont les isométries et l'homothétie qui constituent le fil conducteur de la géométrie dans l'enseignement obligatoire. Comme le souligne CHEVALIER A. (1988) dans ses conclusions "la construction d'un triangle n'est pas définitivement acquise par tous les élèves de l'enseignement secondaire."

D'autre part, l'essentiel du travail sur les relations métriques dans le triangle s'effectue dans les classes de première scientifique seulement. Notre objectif est que les étudiants acquièrent une certaine autonomie dans le traitement des exercices comme le suivant.



Sur la figure ci-dessus A et B sont deux points inaccessibles dont on veut mesurer la distance.

A partir de deux points accessibles M et N dont on connaît la distance d, on relève les angles:

$$\widehat{BMN}=\alpha,\ \widehat{BMA}=\beta,\ \widehat{ANM}=\alpha',\ \widehat{ANB}=\beta'$$

Calculer la distance AB en fonction de d,

THEME 3: Géométrie plane et problèmes spatiaux

De nombreux problèmes de géométrie dans l'espace se ramènent souvent à des problèmes de géométrie plane dès lors qu'un "bon plan" dans lequel on va travailler a été mis en évidence.

L'objectif de ce thème est de montrer sur quelques situations simples comment interviennent les résultats déjà obtenus dans les chapitres précédents pour résoudre des problèmes spatiaux.

Règles d'incidence :

1) Deux points distincts déterminent une droite et une seule.

2) Trois points non alignés déterminent un plan et un seul. (Ou bien deux droites distinctes et parallèles déterminent un plan et un seul.)

3) Si deux points distincts sont contenus dans un plan, la droite qu'ils déterminent est entièrement contenue dans ce plan.

4) L'intersection de deux plans distincts est une droite.

5) Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et cela suivant deux droites parallèles.

Règles d'orthogonalité :

1) Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles issues d'un même point sont perpendiculaires.

2) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

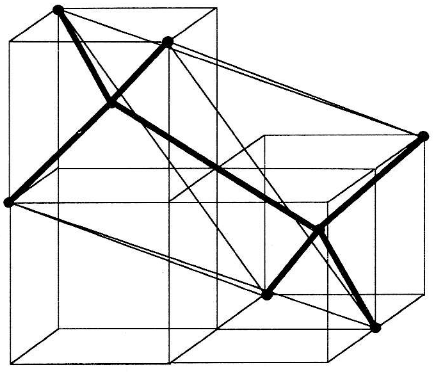
3) Si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

4) Deux plans sont perpendiculaires si une droite de l'un est perpendiculaire à l'autre.

Théorème du toît :

Si un plan parallèle à une droite D coupe deux plans P et P' contenant D suivant deux droites Δ et Δ' respectivement alors Δ et Δ' sont des droites parallèles à D.

L'essentiel des situations rencontrées concernent le cube ou le pavé, c'est pourquoi les premiers paragraphes traitent des sections planes du cube. Afin de pouvoir effectuer un travail déductif rigoureux, nous procédons à un rappel des principaux résultats de géométrie dans l'espace.



La structure tubulaire ci-contre (en traits épais) a été créée à partir d'un réseau de cubes de 1 m d'arête (en traits fins) et de leur structure tétraédrique. Les traits moyens représentent des câbles.

Calculer les longueurs de tube et de câble nécessaires à sa réalisation.

Pour l'essentiel ces règles sont ignorées des étudiants, et bien souvent ils ne pensent pas que même à main levée, un croquis de situation spatiale puisse de certaine façon en dépendre. Nous tentons alors de leur donner quelques méthodes de recherche qui seront réinvesties aussi bien en géométrie descriptive qu'en perspective. On traite par exemple la recherche de l'intersection entre une droite et un plan qui nécessite le choix d'un plan auxiliaire contenant la droite. Ici, l'autonomie des élèves est recherchée pour le traitement des exercices comme celui qui suit.

Et après ?

Au-delà de ces trois thèmes qui répétons-le nous paraissent incontournables, les sujets qui sont abordés ne sont que des compléments de culture et de pratique pour un architecte qui vont souvent venir comme applications de ce travail.

C'est le cas par exemple, de l'étude des polygones réguliers, des frises et des pavages du plan, on s'intéresse alors à des problèmes comme :

Peut-on recouvrir une bande de plan ou le plan tout entier à l'aide d'un seul type de polygones réguliers de même taille ?

Trois dessins représentent une même arche, d'abord en perspective, puis en vue de dessus et vue de face.

Le volume extérieur ABCDA'B'C'D' est un cube d'arête a.

Le volume intérieur EFGHE'F'G'H' est un cube d'arête b, (b < a).

Ces deux cubes ont un même axe de symétrie vertical et leurs faces sont parallèles.

Calculer l'angle dièdre d'arête AE après avoir calculé successivement les cosinus et sinus des angles E' F, A F, A E'.
L'étude des angles dièdres ou trièdres occupe parfois pour l'architecte une place importante, il peut avoir à traiter le type de question qui suit:

Nous abordons également l'étude des polyèdres et de quelques pavages de l'espace, bien sur, ce sont les polyèdres réguliers qui sont au centre de notre travail, par exemple:

Ainsi que le montre la figure ci-dessous, le dodécaèdre régulier peut être considéré comme l'assemblage de six polyèdres identiques sur chacune des six faces d'un cube.

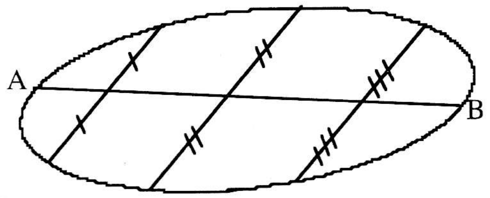
Soit c la longueur de l'ar'te du cube et a celle de l'arête du dodécaèdre .
On a:

AB = BC = CD = DA = a et
AE = BE = CF = DF = c.

1- Connaissant les angles du polygone régulier, préciser les angles B A, B¬E, A F, E¬D. En déduire une relation entre a et c.

2- Calculer les angles dièdres d'arêtes AB, BC et EF.

Nous accordons également une place privilégiée au travail sur l'ellipse pour

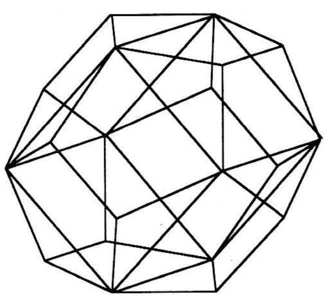


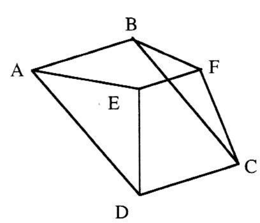
l'importance qu'elle peut prendre dans les problèmes de représentation alors qu'elle est quasiment ignorée de l'enseignement secondaire. C'est la notion de diamètres conjugués qui permet d'envisager des tracés approchés, c'est pourquoi nous proposons:

1- En utilisant l'affinité, démontrer que les milieux des cordes parallèles d'une ellipse sont alignés et définissent un segment [AB].

2- Sachant que parmi toutes les cordes parallèles à une corde donnée figure nécessairement un diamètre, démontrer que [AB] et ce diamètre sont deux diamètres conjugués.

Nous proposons en annexes 3 et 4 et en guise de conclusion les deux sujets d'examen des années passées. ❑





Bibliographie

AUDIBERT G. (1982) Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Vol. 1 et 2. Publication N° 56 de l'APMEP

AUDIBERT G. (1985) Une problèmatique en géométrie de l'espace. Edition IREM-USTL, Place E. Bataillon, Montpellier.

BERTHOMIER T. (1995) Géométrie pour l'élève architecte. CoÉdition IREM-USTL, Place E.Bataillon, Montpellier et EALR Montpellier.

CHEVALIER A. (1988) Procédures de constructions de triangles. Edition IREM-USTL, Place E.Bataillon, Montpellier.