

Cabri, Derive et Maple

Joachim Liorca, La Garde

Albi, j'avais préparé neuf exercices sur le thème Cabri, Derive et Maple du niveau d'une très bonne Terminale S. Le temps imparti à l'atelier m'a obligé à faire un choix ! Ce fut Maple et Derive. Je reproduis ici les énoncés qui ont eu le plus de succès.

Beaucoup de collègues se sont intéressés à l'exercice III. Sur cet exercice, je reprends ici les points qui me paraissent essentiels.

Exercice I

On donne en repère orthonormal le cercle (C) de centre O et de rayon 1. Un point M d'affixe e^{it} décrit (C). Un point P a pour affixe e^{-2it} .

Soit G le milieu de [PM].

1°) Avec Cabri :

- Construire la figure.
- Mettre en évidence le lieu de G quand M décrit (C).

2°) Avec Derive

- Ecrire une représentation paramétrique du lieu G.
- Représenter graphiquement ce lieu.
- G est maintenant le barycentre du système $\{(P, 1), (M, k)\}$. Reprendre la première question puis construire le lieu de G pour différentes valeurs de k. On pourra définir, au sens de Derive, une fonction k motif lieu de G.

Exercice II

On donne un triangle ABC et l'on construit extérieurement à ce triangle, sur les côtés de ce triangle, des triangles isocèles dont l'angle vaut $2\pi/3$. Ce dernier triangle est équilatéral. Prouvez-le !

Avec Maple

En désignant par x, y et z les affixes respectives des sommets opposés aux côtés [BC], [CA] et [AB], calculer les modules des complexes :

$x - y$, $y - z$ et $z - x$ puis conclure.

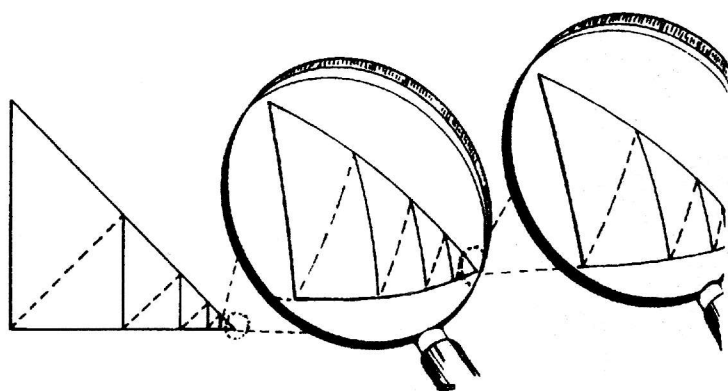
Exercice III

Je vais développer ici l'exemple dû à J.M. Muller (cité dans La recherche d'octobre 1996) qui ne fait intervenir que de modestes fractions rationnelles et une définition non moins modeste de la suite en question par récurrence sur l'entier n.

Voici donc le monstre :

$$\begin{cases} U_0 = 11/2 \\ U_1 = 61/11 \\ U_n = 111 - (1130/U_{n-1}) + (3000/U_{n-1}U_{n-2}) \end{cases} \quad n \geq 2$$

Il s'agit d'une approche guidée, du niveau Terminale S (spécialité) pour les deux premières questions, et du niveau



bac+1 pour la suite..

Pour des raisons de place je ne peux reproduire ici qu'un énoncé partiel.

1°) Donner sous forme de fractions irréductibles les valeurs de U_2 et U_3 . A l'aide de votre calculatrice donner les 25 premiers termes de la suite. Que conjecturez-vous ? Vous pouvez aussi utiliser un tableur.

2°) Démontrer que si cette suite converge alors sa limite l vérifie :

$$l^3 - 111l^2 + 1130l - 3000 = 0.$$

Après avoir remarqué que 5 est une racine évidente de l'équation, montrer qu'il y a deux autres candidats pour la limite éventuelle de la suite.

Parmi les trois candidats, quel est celui qui vous semble, d'après vos calculs, être / ?

3°) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5 \leq U_n \leq 6$$

et que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge. Quelle est sa limite ?

Commentaires :

Ce qui me paraît intéressant, c'est le plus qu'apporte dans ce cas le calcul formel au niveau des conjectures réalisées par nos élèves par rapport aux outils plus classiques (calculatrices, tableurs ...).

1°) Voir la feuille Maple où figure ces résultats aussi bien sous forme exacte que sous une forme approchée.

Voir aussi la feuille de calcul Excel pour comprendre que, là, ce problème numérique d'instabilité est (mal)traité !

2°) Au début il n'y a pas de difficulté.

Pour les étudiants qui calculent à la main, l'aide fournie dans la question est précieuse mais si l'on utilise un logiciel de calcul for-

mel, on peut demander la résolution de l'équation ou la mise en facteur !

Sur la feuille Maple, on peut voir les zéros ou la factorisation : l'aide fournie dans la question est inutile.

Pour ceux qui ne dispose pas d'un logiciel de calcul formel, la réponse est 100. Pour les autres, c'est 6.

3°) Là, nous abordons la partie difficile au niveau des calculs Maple ou Derive ou la TI92, vont nous permettre de souffler ! Il s'agit de prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 6.$$

Nous avons bien : $5 \leq U_0 \leq U_1 \leq 6$.

Mais pour la suite, c'est une toute autre histoire !

Sans un logiciel de calcul formel, l'exercice ne me semble pas être abordable en terminale. La feuille de calcul Maple permet de conjecturer que la suite (U_n) semble être de la forme :

$$n \geq 1 : U_n = a_n / b_n, b_n = a_{n-1}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} a_0 &= 11, a_1 = 61, a_2 = 341, \\ b_0 &= 2, b_1 = 11, b_2 = 61. \end{aligned}$$

Le calcul de U_n en fonction de ces prédécesseurs donne :

$$\begin{aligned} a_n &= 111.a_{n-1} - 1130.a_{n-2} + 3000.a_{n-3}; \\ b_n &= a_{n-1}. \end{aligned}$$

L'étude de la suite (a_n) se fait classiquement, on retrouve l'équation du début et il ne nous reste plus qu'à chercher les constantes a , b et c telles que :

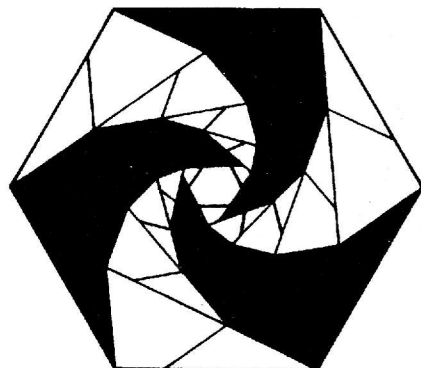
$$a_n = a.100^n + b.5^n + c.6^n.$$

On est conduit à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = 11 \\ 100.a + 5.b + 6.c = 61 \\ 10.000.a + 25.b + 36.c = 341 \end{cases}$$

On obtient :

$a = 0$, $b = 5$ et $c = 6$, ce qui donne



$$U_n = \frac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n}$$

On peut bien entendu vérifier mais surtout démontrer la monotonie et la convergence de (U_n) . Là encore, les calculs se font sans problème !

Feuille de calcul Maple V

```
> restart ; n:= 25
> X:=array (0 .. n) ; X[0] := 11/2 ; X[1]:=
61/11 :
> for k from 2 to n
do
X[k] := 111 - 1130/X[k-1] + 3000/ (X[k-2] * X[k-1])
od
```

A ce stade de travail, on dispose des $n+1$ premiers termes de la suite. On peut demander l'affichage avec 6 digits (par exemple) et/ou l'affichage sous forme rationnelle classique.

```
> for k from 10 to n do evalf (X[k], 6) od
> 5.86095
5.88138
5.89915
5.91452
5.92774
5.93905
5.94869
5.95687
5.96380
5.96965
5.97458
5.97873
5.98221
5.98513
5.98758
5.98963
```

```
> for k from n-5 to n do X[k] od
22413787798580981
3751525871703601
```

```
134005889633282761
22413787798580981
```

```
801651152008680941
134005889633282761
```

```
4797985983097007521
801651152008680941
```

```
28728311253806654501
4797985983097007521
```

```
172071844298962973881
28728311253806654501
```

Si l est un candidat, alors l est l'un des éléments de l'ensemble E :

```
> E := {solve (l^3 - 111l^2 + 1130l - 3000 =
0, l)};
factor (l^3 - 111l^2 + 1130l - 3000)
E := {5, 6, 100}
(l - 100).(l - 5).(l - 6)
```

Pour conjecturer, ce qui suit est important:

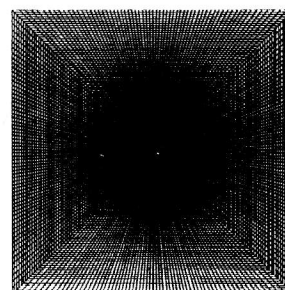
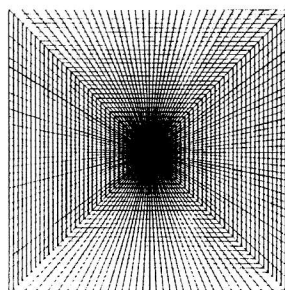
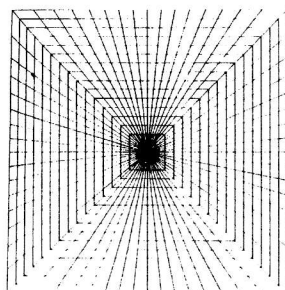
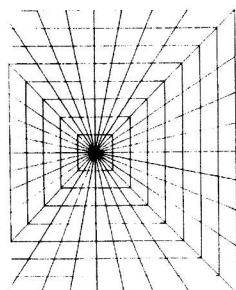
```
> seq (X[i] , i = 0 .. 9) ;
```

```
11 61 341 1921 10901 92281
2 ' 11 ' 61 ' 341 ' 1921 ' 10901
```

```
358061 2070241 12030821 70231801
62281 ' 358061 ' 2070241 ' 12030821
```

On va maintenant faire un peu de calcul formel !

```
> n:='n' ; u[n] := 111 - 1130 / (a[n-1]/b[n-1]) +
3000 / (a[n-1].a[n-2]/b[n-1] .b[n-2]) ;
>
> b[n-1] := a[n-2]; b[n-2] :=a[n-3]
u[n] := factor (u[n]) ;
```



$$u_n := 111 - 1130 \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + 3000 \frac{b_{n-1} b_{n-2}}{a_{n-1} a_{n-2}}$$

$$u_n := \frac{111 a_{n-1} - 1130 a_{n-2} + 3000 a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

On a donc :

$$> a[n] = 111 \ a_{n-1} - 1130 \ a_{n-2} + 3000 \ a_{n-3}:$$

```
> solve ({a+b+c=11, 100a+5b+6c=61,
10.000a+25b+36c=341}, {a, b, c}) ;
      {c = 6, a = 0, b = 5}
```

$$> \quad u_n := \frac{5^{(n+1)} + 6^{(n+1)}}{5^n + 6^n}$$

On peut vérifier !

```
> for n from 0 to 9 do
```

$$u[n] := (5^{(n+1)} + 6^{(n+1)}) / (5^n + 6^n) \text{ od}$$

```
> seq (u[k] , k =0 .. 9) ;
```

```
> n:='n' ; assume (n, integer) ;
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5^{n+1} + 6^{n+1})}{(5^n + 6^n)},$$
$$n \rightarrow \infty;$$

$$\frac{11}{2}, \frac{61}{11}, \frac{341}{61}, \frac{1921}{341}, \frac{10901}{1921}, \frac{92281}{10901}$$

$$\frac{358061}{62281}, \frac{2070241}{358061}, \frac{12030821}{2070241}, \frac{70231801}{12030821}$$

$$n := n$$

6

Considérons maintenant l'applica-

tion:

```
> u:=n->(5^(n+1) +6^(n+1)) / (5^n+6^n) ;
```

$$u_n := n \rightarrow \frac{5^{(n+1)} + 6^{(n+1)}}{5^n + 6^n}$$

Sous cette forme calculons :

```
> expand (numer (factor (6-u(n)))) :
```

```
> expand (numer (factor (u(n)-5))) :
```

```
> expand (numer (factor (u(n+1)-u(n)))) :
```

$5^n, 6^n, 6^n, 5^n$

Toutes ces différences sont positives.

La suite est donc bien bornée par 5 et 6, croissante, de limite 6.

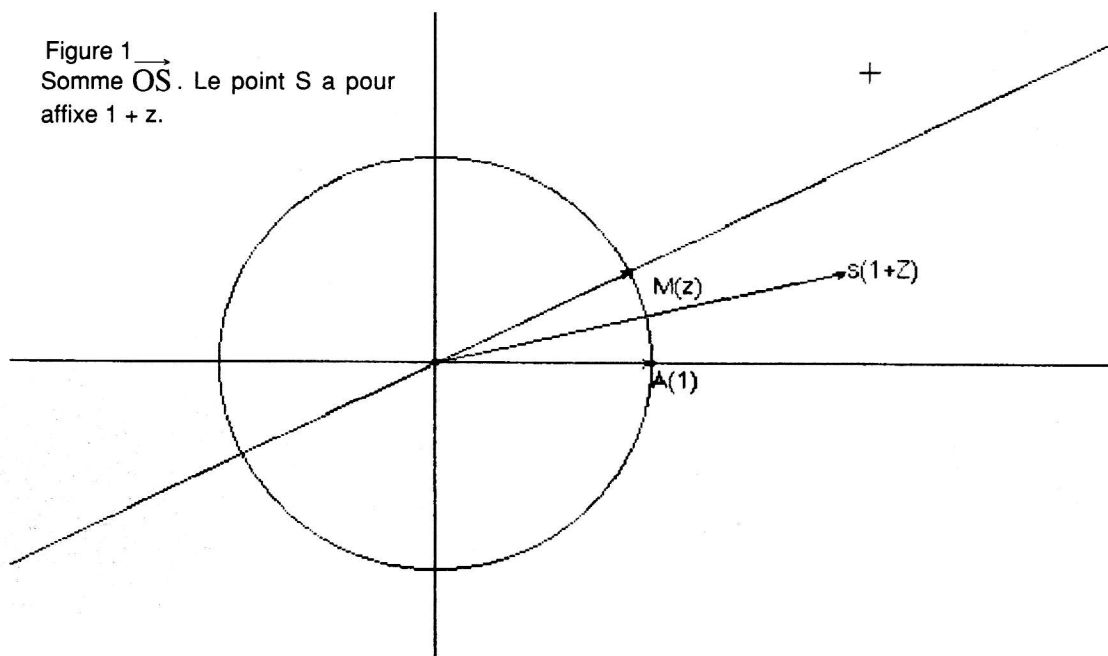
La géométrie des complexes

Voici un exercice qui a beaucoup de succès : le début est facile à étudier avec Cabri2, c'est un exercice de construction et d'introduction pour l'aspect géométrique des nombres complexes ; pour la suite de l'exercice on peut utiliser une calculatrice graphique, Derive, Maple...

Soit z un complexe de module 1 et f l'application définie par :

$$f(z) = 1 + z + z^2$$

Figure 1 $\rightarrow$
Somme $\overrightarrow{OS}$. Le point S a pour
affixe $1 + z$.



On se propose de déterminer l'ensemble des points $M(f(z))$. Dans ce qui suit on confond un point et son affixe au niveau des notations.

1- Si vous n'êtes pas encore un virtuose des calculs sur les complexes profitez de cet exercice pour retenir beaucoup de résultats. Utilisez Cabri2 pour faire la figure. Commencez par placer z : il est de module 1, son image est donc sur le cercle trigonométrique, z^2 a même module et un argument double, on peut donc aussi le placer facilement. Avec la somme de vecteurs de Cabri2 vous pouvez construire $1 + z$ puis $f(z)$.

Demandez maintenant le lieu de $f(z)$.

2- Si vous savez calculer (si vous ne savez pas, il faut apprendre !), il est facile de passer sous forme trigonométrique et d'obtenir, en séparant parties réelles et imaginaires de $f(z)$, une représentation paramétrique de l'ensemble cherché.

$$\begin{cases} x = 1 + \cos \theta + \cos(2\theta) \\ y = \sin \theta + \sin(2\theta) \end{cases}$$

3- Il vous reste à étudier la représentation précédente pour obtenir la courbe associée à l'ensemble cherché.

Voici quelques figures exécutées avec Cabri 2.

On commence par construire le cercle, le point $A(1)$ et le point $M(z)$. On définit les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OM}$ puis leur somme $\vec{OS}$. Le point s a pour affixe $1 + z$ (figure 1).

On construit ensuite le point N d'affixe z^2 . N est le symétrique de A par rapport à la droite OM . On définit le vecteur $\vec{ON}$ et la somme $\vec{OS} + \vec{ON} = \vec{OS'}$ (figure 2).

A ce stade du travail on peut déplacer M et observer le déplacement de S . On peut demander le lieu de S quand M varie, voici le résultat : (figure 3).

Programme :

```
> x := θ → 1 + cos( θ ) + cos (2θ) ;
```

```
> y := θ → sin(θ ) + sin(2θ) ;
```

```
> derx := D(x)(θ) ;
```

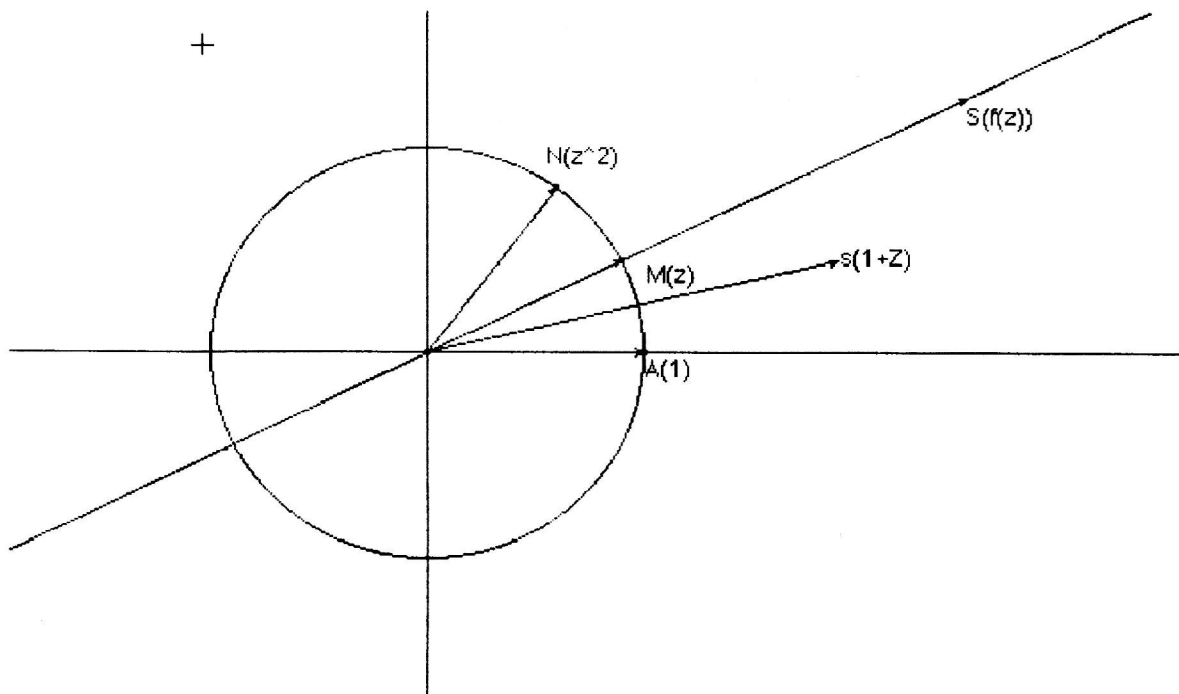
```
> dery := D(y)(θ) ;
```

```
> solve(derx = 0) ;
```

```
> solve(dery =0) ;
```

Figure 2

Le point S a pour affixe $f(z)$.

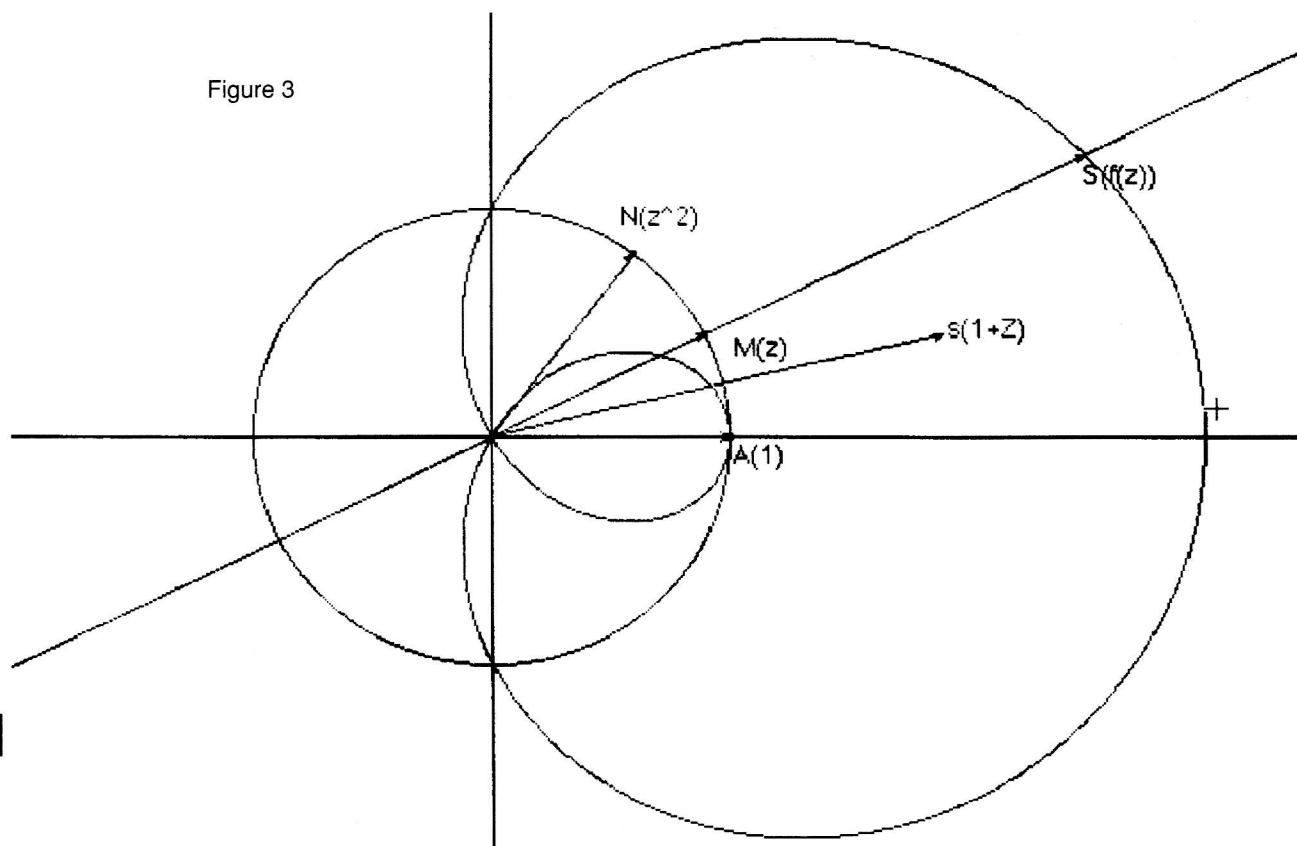


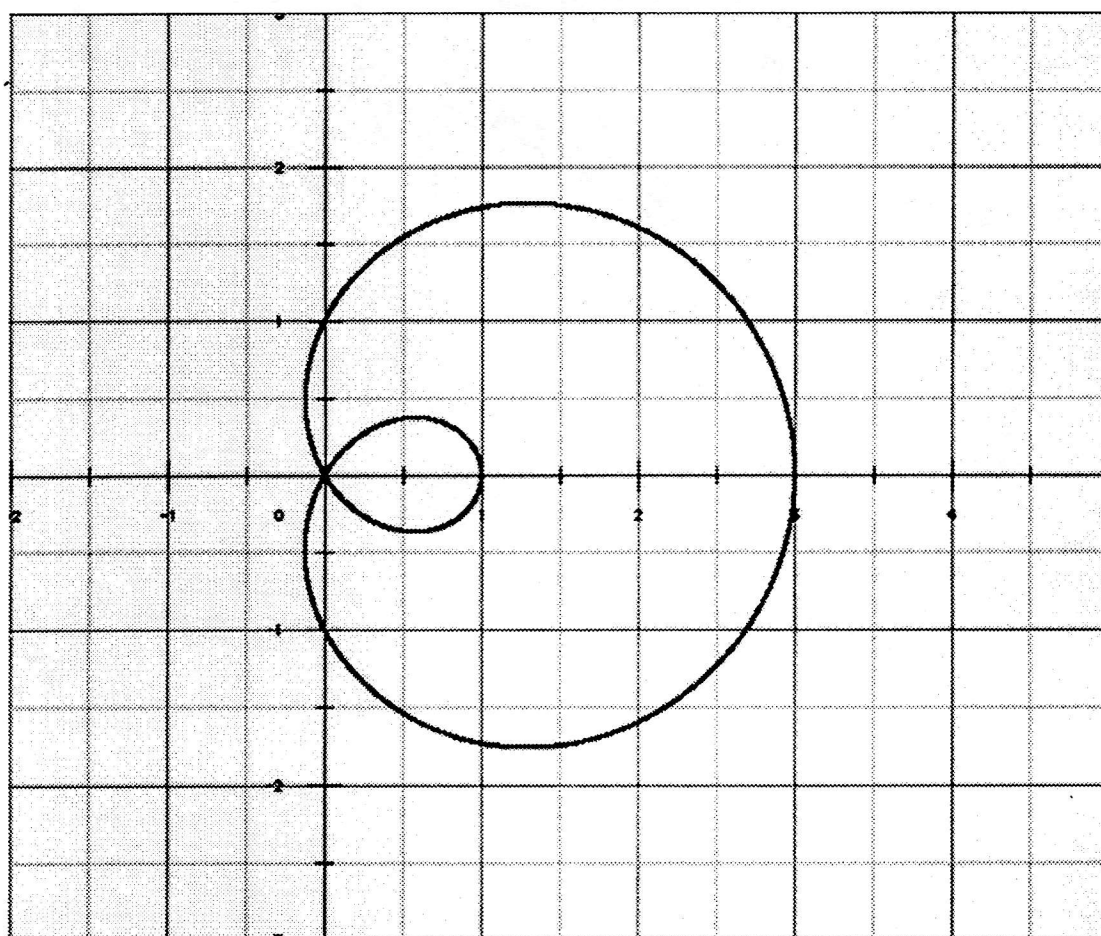
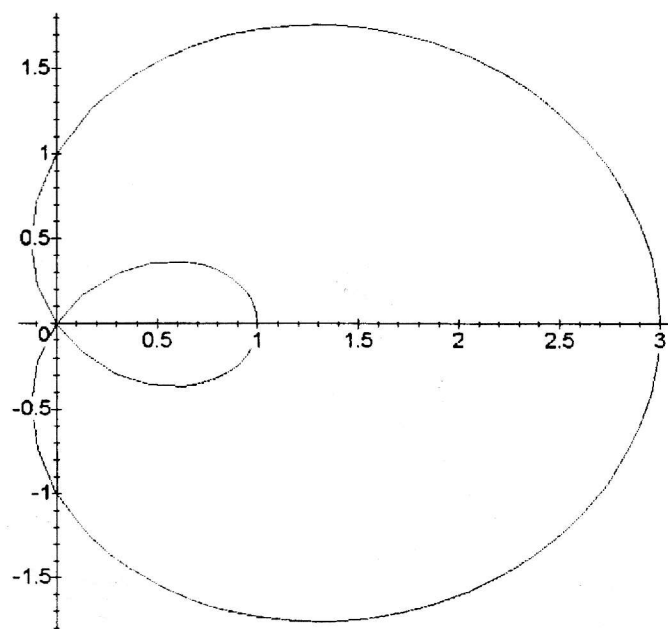
```

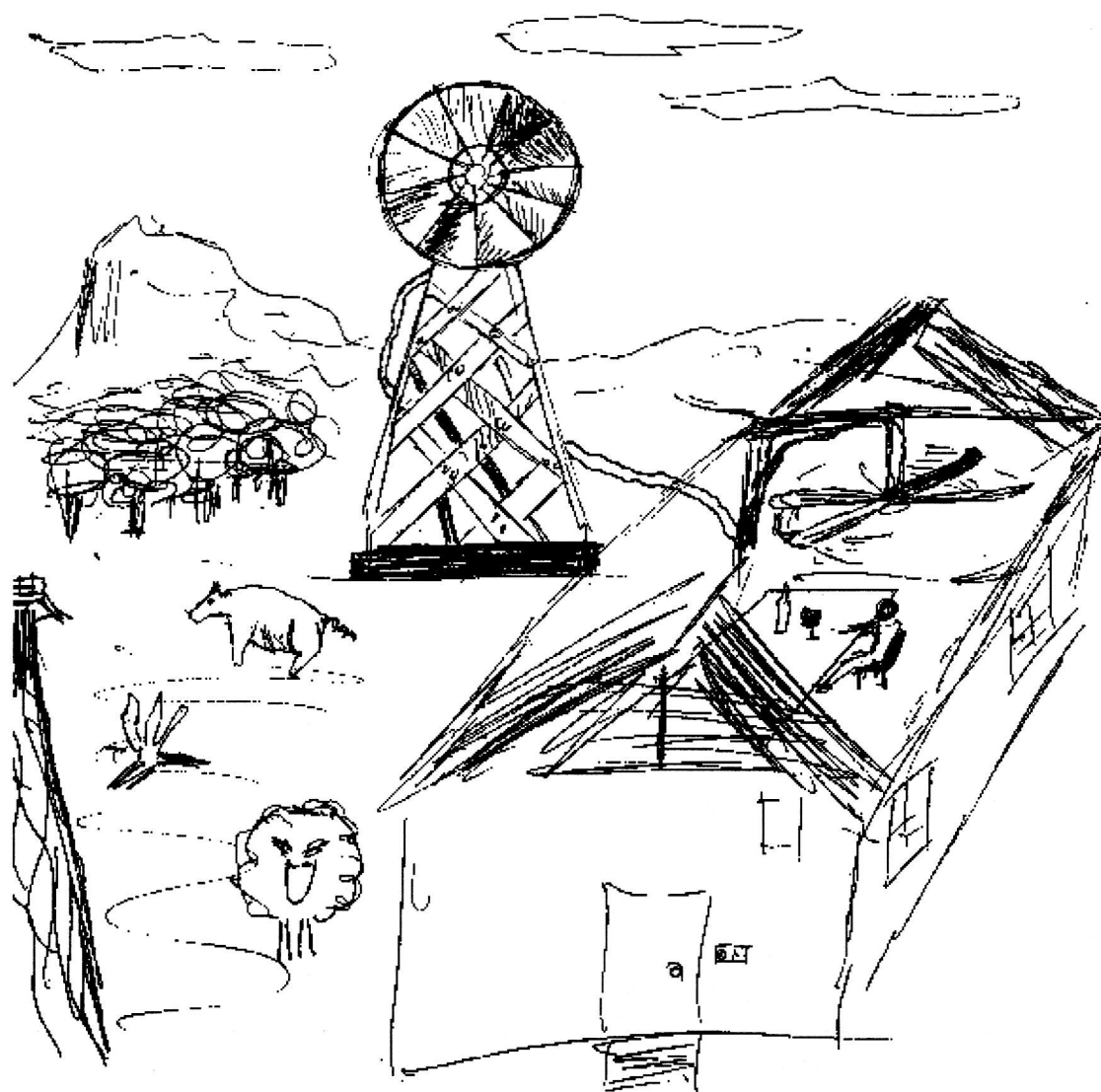
> plot([x(θ), y(θ), θ = 0 .. 2π])
>
0, π, -arctan(√15)+π, -arctan(√15)-π
arccos(-1/8 + 1/8√33), arccos(-1/8 - 1/8√33)

```

Figure 3







L'air, La terre, L'eau et le feu (+ le vin)