Ecrit contre oral, analogique ou numérique

Richard Blavy, Mervilla (31)

Contribuer à la formation

L'introduction du propos, s'agissant de parler de l'enseignement des mathématiques, oblige à le situer dans son parti pris à la formation de l'enfant ou de l'adolescent, à sa transformation en un adulte intégré dans le monde moderne.

Ceci nous conduit à définir une philosophie de notre action, peut-être implicitement reconnue ou inconsciemment vécue, nous professons la sagesse, nous recherchons à éveiller chaque être à son sens de la vie ; tel est le tableau vivant auquel nous contribuons par notre présence face aux élèves et notre comportement responsable.

Notre inscription dans la formation de l'adolescent passe par la reconnaissance d'un esprit et d'une âme déjà éveillés, d'un être que rend vulnérable une sensibilité aigüe. Former chacun de nos élèves, lui permettre d'épanouir ses potentialités, d'asseoir sa personnalité et d'engager sa responsabilité.

L'évidence de ce rôle du professeur de mathématiques se dissimule derrière des contenus nécessairement délimités par un programme, s'oublie dans la routine de l'acte quotidien et s'englue dans la matière elle-même.

On admire peu l'exploit du professeur de mathématiques qui conduit une classe de seconde sur une année, à raison de six heures hebdomadaires pour le professeur... cela est banal puisqu'il s'agit de la réalité de milliers de classes de seconde. Vainqueur de la routine, il a pu hisser le niveau de ses élèves ; les convaincre du bien fondé de son enseignement!

A propos d'un thème

Afin de concrétiser l'intention déclarée, nous devrions expliciter une praxis qui permettrait de la traduire et la mettre en oeuvre au quotidien. Contribuer par ce travail à approcher cet objectif, ouvrir une voie praticable, tel est le projet plus modeste auquel nous pouvons nous consacrer.

Le thème proposé ici concerne la partie du programme de seconde énumérant les contenus (pages IX et XX), leur introduction et leur étude s'agissant de <u>"développer une vision géométrique des problèmes, notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation "</u> (page VII). Nous devrons aussi penser que l'enseignement en seconde s'adresse à tous les élèves, à la veille d'un choix d'orientation parmi les plus importants.

Essayons de voir comment nous pourrons mettre en pratique l'intention affichée.

1 - Le contenu du sujet choisi aborde l'articulation géométrique et analyse en seconde. Dans la pratique en classe de seconde : mettre en concurrence les démarches géométrique et algébrique en vu de dérouler l'essentiel du programme.

2 - Pour prendre du recul par rapport à cette pratique, et peut-être rendre compte comment l'intervention va au-delà d'un simple enseignement des mathématiques et contribue à la formation de la personne, nous pourrons initier l'étude du langage employé et mis en place en classe de seconde.

La géométrie : fil rouge

1 - Les contenus du programme

Décrivons comment la géométrie peut

intervenir au niveau des différentes rubriques du programme.

La première rubrique des contenus à enseigner en classe de seconde porte sur des problèmes numériques et algébriques.

Les nombres réels peuvent être représentés par les points d'une droite, on interprétera en géométrie toutes les opérations sur les réels. Les intervalles y sont dessinés, et la valeur absolue est définie à partir de la distance. Classiquement les systèmes d'équations et d'inéquations sont interprétés en géométrie plane.

Les fonctions qui sont à l'étude dans la deuxième rubrique, donnent lieu à une étude graphique donc géométrique. Les courbes représentatives des fonctions affine, carré, cube et inverse peuvent être définies en géométrie affine par de simples constructions à la règle. Les fonctions circulaires sont définies géométriquement à partir du cercle trigonométrique.

La rubrique statistiques est à considérer à part, nous ne la prendrons pas en compte.

La dernière rubrique a pour sujet la géométrie.

Ayant vu que la géométrie est utilisée à chaque rubrique, hormis en statistiques, il reste à montrer comment la mettre en oeuvre de façon cohérente, voir que son langage est universel, si c'est possible!

Plusieurs éléments y contribuent :
- premièrement, la géométrie de la droite est étudiée en plongeant la droite dans le plan et en utilisant les mêmes transformations : les homothéties et les translations.
- deuxièmement, les réels pour la droite, et les vecteurs pour le plan ont des rôles analogues.
- troisièmement, les constructions géométriques des courbes représentatives des fonctions carré, cube et inverse confortent la cohérence des points de vu géométrique et algébrique.

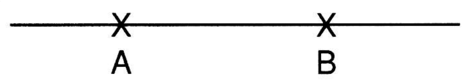
Décrivons de quelle façon nous pourrions procéder pour introduire la géométrie dans cet esprit, pour ce qui concerne les points inhabituels.

2 - Les outils de la géométrie affine

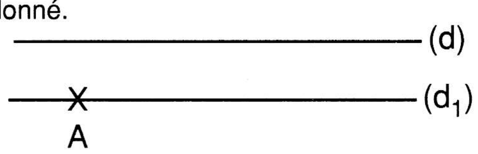
Quel traitement allons nous faire de la géométrie ?

On se plongera dans le plan, avec à notre disposition des points et des droites données ou à construire.

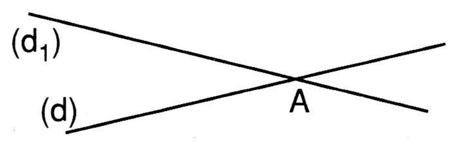
Nous saurons nous servir de la règle pour construire : la droite passant par deux points,



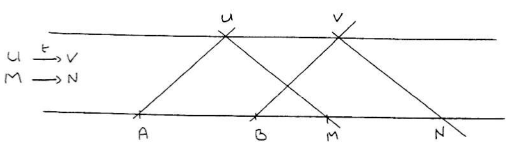
la parallèle à une droite donnée par un point donné.



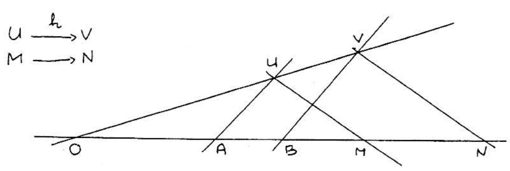
le point de concours de deux droites.



Considérant deux points distincts A, B, nous disposerons de la translation qui envoie le point A sur le point B.



Considérant trois points distincts alignés O, A, B, nous disposerons de l'homothétie de centre O qui envoie le point A sur le point B.



Ceci permet d'explorer toute la géométrie affine du plan. Nous poursuivrons au §4 après avoir considéré la géométrie de la droite au §3.

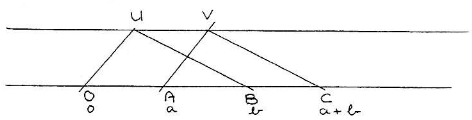
3 - Nombres réels et géométrie de la droite

Pour l'étude de la géométrie de la droite et des nombres réels, on se placera sur une droite plongée dans un plan.

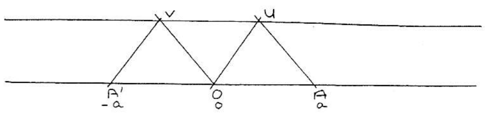
On désignera un repère {O ; I} sur cette droite. Chaque point M de la droite représente un réel x, son abscisse.

Soient A(a) et B(b).

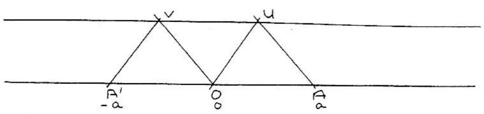
Nous obtenons le point C(a+b) comme image de B par la translation qui envoie O sur A.



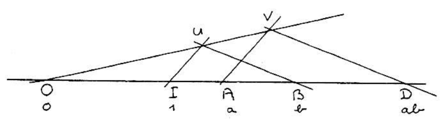
Nous obtenons le point A'(-a) par la translation qui envoie A sur O.



Nous obtenons le point D(ab) comme image de B par l'homothétie de centre O qui envoie I sur A.



Nous obtenons le point $A^{-1}(a^{-1})$ par l'homothétie de centre O qui envoie A surI.



L'identification d'un nombre réel comme un point de la droite se trouve d'emblée réalisée. Les opérations sont interprétées géométriquement.

Cette initiation peut s'envisager explicitement du point de vue concret : le plan est celui de la feuille ou du tableau. Les droites sont tracées à la règle.

<u>Remarque</u> : A la prendre à la lettre, cette initiation pourrait se considérer de façon abstraite et serait susceptible d'autres représentations concrètes.

Le parcours d'une droite de gauche à droite, sinon de bas en haut, définit l'ordre des points. On choisira un repère {O;I} dans cet ordre. Ainsi l'ordre concret des points sur la droite coïncide avec celui des nombres réels. On découvre les intervalles simultanément des points de vu numérique et géométrique.

Le sens d'un couple de points (M;N) est positif ou direct si M et N se rencontrent dans l'ordre, sinon le sens est négatif ou indirect. Sur une même droite ou deux droites parallèles nous saurons reconnaître si deux couples (M;N) et (U;V) sont de même sens ou de sens contraires.

Le seul choix d'une unité définit la distance sur la droite, le calcul de la distance des points A(a) et B(b) se fait numériquement par la valeur absolue : $|\,b - a\,|$. Changer la distance revient à changer l'échelle. Quelle que soit l'échelle les translations et les symétries conservent la distance ; les rapports de longueurs sont invariants.

4 - Les vecteurs et la géométrie plane

Dans le §2 nous avons introduit la géométrie affine du plan. On soulignera l'analogie de l'utilisation des nombres réels pour l'étude de la droite et celle des vecteurs pour l'étude du plan.

Sur une droite du plan ou deux droites parallèles, nous avons vu au §3 que nous savons reconnaître si deux couples (M;N) et (U;V) sont de même sens ou de sens contraires et que les rapports de longueurs sont invariants dans un changement de métrique sur la droite. Donc nous disposons en géométrie affine du théorème de Thalès et sa réciproque.

Ceci nous permet de développer dans un premier temps la géométrie sans faire appel à l'outil vectoriel. On montrera ensuite comment effectuer une même démonstration soit en géométrie, soit avec le calcul vectoriel. Voir exemple en annexe, comment découvrir le centre de gravité d'un triangle.

On introduit dans le §2 les outils de la géométrie affine.

On a vu que les opérations algébriques sur les nombres réels, s'effectuent avec ces outils en géométrie. Il est donc clair que les courbes représentatives des fonctions affine, carré, cube, inverse ou plus généralement des fonctions rationnelles sont constructibles géométriquement point par point avec ces mêmes outils. La mise en place de ces constructions définit ces courbes en géométrie affine plane. Voir en annexe ces constructions.

Le choix d'une métrique dans le plan équivaut à celui d'un repère {O, I, J} proclamé orthonormé. Un choix différent de repère est beaucoup plus qu'un changement d'échelle, il implique des isométries différentes. Le propos en seconde est de mettre en place aussi les propriétés métriques du plan quand on se place concrètement dans un repère orthonormé.

Le langage des élèves

En début d'année, le choix et la mise en oeuvre en classe d'une activité de découverte des représentations des élèves ; par exemple autour des mots : "nombre" et "droite", par l'explicitation du sens, assurent leur prise en charge pour fonder ce qui va être le travail de l'année.

On utilise les mots du langage de tous les jours, du langage familier où ordinairement la priorité est donnée à l'expression de ses sentiments vers les proches et à la communication. Même si celle-ci est toujours approximative dans le cadre familier, des règles sont implicitement fixées. Elles peuvent être imposées par le respect des convenances liées à la place qu'on occupe dans la hiérarchie des groupes dont on fait partie. Par exemple : on ne s'adresse pas au père comme à la mère ; au directeur de banque comme au guichetier. Les règles de ce langage quotidien doivent permettre la communication de contenus cognitifs : indication d'un itinéraire, d'un mode d'emploi...

A l'école, les mots et le langage se ressourcent dans une culture, l'enseignement vise une socialisation. Si "merde" fait partie du langage ordinaire dans le cadre familial pour exprimer sur le mode scatologique le désappointement ou la désapprobation, il devient à l'école grossier et péjorativement perçu.

De sorte que finalement les mots sont surchargés de sens, à un point tel que la seule compréhension possible est liée à une phrase, un paragraphe, tout un texte, et parfois même le lecteur donne son sens au texte lu.

Les mots en mathématiques

En cours de mathématiques, ces mêmes sont utilisés, on vient de le voir déjà chargés de sens imprimés dans nos mémoires. Utilisés en mathématiques, ils font l'objet de définition, voire de plusieurs définitions successives dans le cursus scolaire.

Examinons, par exemple, le mot *angle.*

Le sens commun est celui de *arête, coin, encoignure, renforcement*.

On a appris à l'enseignement primaire qu'il s'agit d'un quartier qu'on peut découper dans un disque de carton.

Plus tard on considère l'angle comme "la portion du plan délimitée par deux demi droites" de même origine.

On finit par nous rendre compte qu'il s'agit de la figure formée par un point S, sommet de l'angle et de deux demi-droites d'origine S.

Un angle orienté est défini au lycée par un couple de vecteurs unitaires. Tous les différents couples de vecteurs unitaires définissant le même angle doivent être reconnus par les élèves, cela va de soit.

Au même niveau, on identifiera un angle avec l'une de ses mesures.

On pourra encore définir un angle comme une rotation!

L'étude approfondie de cet exemple devrait nous révéler l'origine des difficultés liées à notre maîtrise impossible du langage.

Nous avons le souci de la rigueur, et aussi l'illusion d'être rigoureux.

La rigueur : combien de confusions entretenues en son nom : elle est nécessaire pour convaincre, et aussi pour de justes prévisions, pour que l'instrument mis en place soit opérationnel. Elle est superfétatoire s'il s'agit d'être rigoureux dans l'absolu. Le souci de la rigueur gène et bloque la pensée au moment de la recherche, puisqu'elle est dans l'instant hors de question quand il faut privilégier l'imagination.

A la manière d'"angle", on recherchera si les mots utilisés en mathématiques ont un sens multiple ou multivoque, on rendra compte s'ils donnent lieu à des représentations diverses qui peuvent familiariser avec l'"objet", le sens usuel est apposé au sens mathématique. Le sens donné par la définition mathématique d'un concept dont le mot Français sert de nom, est en général de nature opérationnelle. Apparemment on perçoit cette apposition comme une source de difficulté. Confortée et bien gérée, en appuyant la prise en charge du concept, elle aide à comprendre le sens nouveau du mot et facilite l'utilisation du concept qu'il définit.

On avance paradoxalement : avoir alors clairement à l'esprit : d'un côté, structure, forme et raisonnement logique, en géométrie : analogique ; en algèbre : digital, de l'autre ,paradigme, modèle physique, représentation ou projection dans le monde, raisonnement empirique et démonstration expérimentale.

Communiquer

Le langage est semble-t-il de nature fluctuante. Certes les mots renvoient à un signe, noyau dur, idée ou concept originel, présent à l'instant de la communication, ce qui la rend possible. Mais précisément nous surchargerons le message, pour rendre compte de la situation actuelle, ce qui la rend difficile. Aussi bien, la communication pour être simple doit exclure du discours immédiat ce qui prendra son sens plus tard. Une information, prématurée peut perturber la genèse de la pensée : la construction est plus sûre quand la voie est dégagée des détails. Par retouches successives on complète le dessein.

Il va s'agir en classe de communiquer sur différents modes :
- transmettre des contenus : la géométrie du triangle, le centre de gravité,
- faire l'apprentissage du raisonnement, de la rigueur, en somme de la pensée cognitive,
- intégrer le discours dans la pensée de l'auditeur, permettre à celui-ci d'entendre dans sa structure cognitive actuelle ce qui lui est raconté,
- si la vie, la passion sont présents, parler au coeur ou l'ignorer, explique ce qui est passion et distinguer ce qui est savoir.

Le centre de gravité d'un triangle

Par exemple, montrons en géométrie, puis avec le calcul vectoriel comment mettre en place le centre de gravité d'un triangle ABC.

1 - En géométrie

Nous utiliserons les outils mis en place au §1.
On trace les parallèles à chaque côté du triangle par le sommet opposé. On obtient un triangle A'B'C' doublant le triangle initial comme le montre la figure ci-dessous.

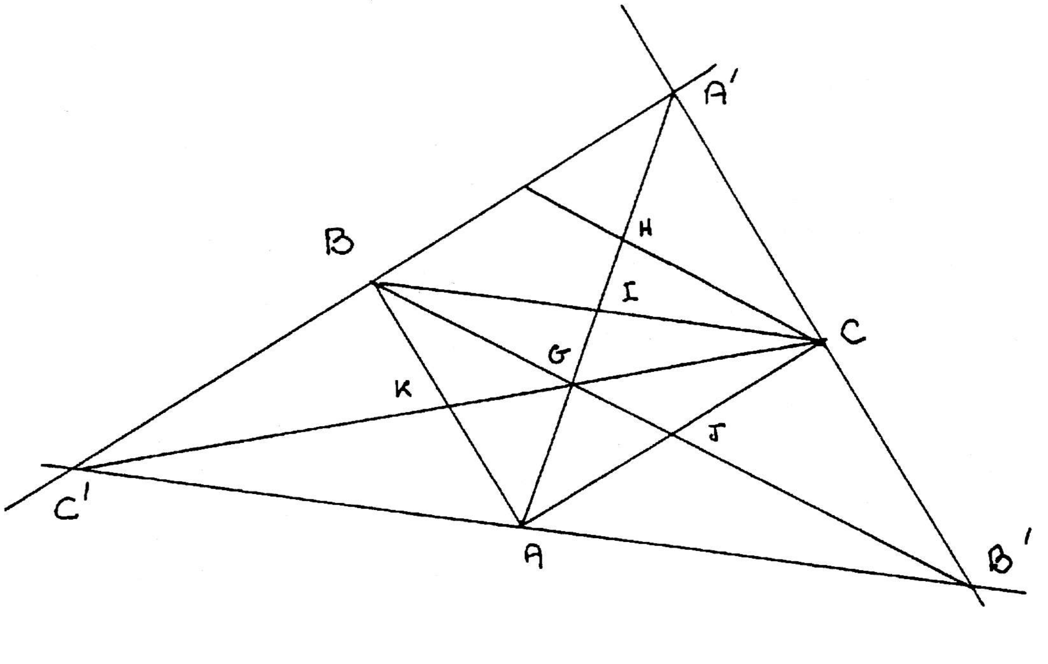
On remarque que :

- les segments [AA'] et [BC] se coupent en leur milieu I
- les segments [BB''] et [CA] se coupent en leur milieu J
- les segments [CC'] et [AC] se coupent en leur milieu K

On notera G le point de concours des droites AA' et BB'.

On considère l'homothétie de centre G qui renvoie le point A' sur A.

On vérifie successivement que :
- le point B' a pour image B.



- le point C' a pour image C.
- le point A a pour image I.
- le point B a pour image J.
- le point C a pour image K

Le point G se trouve donc aussi sur la droite (CC').

Conclusion : les médianes du triangle ABC sont concourantes en G. G est le centre de gravité du triangle.

Par C on trace la parallèle à BB' qui coupe AA' en H;

C est le milieu de [A'B'] donc H est le milieu de [A'G].

J est le milieu de [AC] donc G est le milieu de [AH].

On conclut donc que AG = 1/3 AA' et donc aussi AG = 2/3 AI.

Les points A, G, I sont alignés et dans cet ordre, on a donc aussi

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}$$

et de la même façon :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{BJ} \qquad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\,CK$$

On calcule

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\,(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK}) =$$

$$\frac{1}{3}\,(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \frac{1}{3}\left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right] = 0$$

Conclusion : le centre de gravité G du triangle ABC est tel que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$

2 - Avec le calcul vectoriel

Du point de vue vectoriel, on considère le triangle ABC et G tel que :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$$

Le point G est le point du plan défini par :

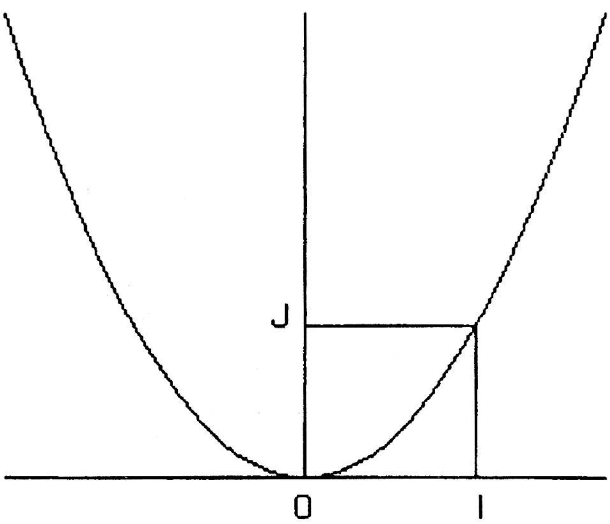
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AA'}$$

où A' est le quatrième sommet du parallélogramme ABA'C. Ce point G existe donc, il est unique, et la droite (AG) confondue avec la droite (AA') pase par le milieu I de [BC] centre du parallélogramme ABA'C.

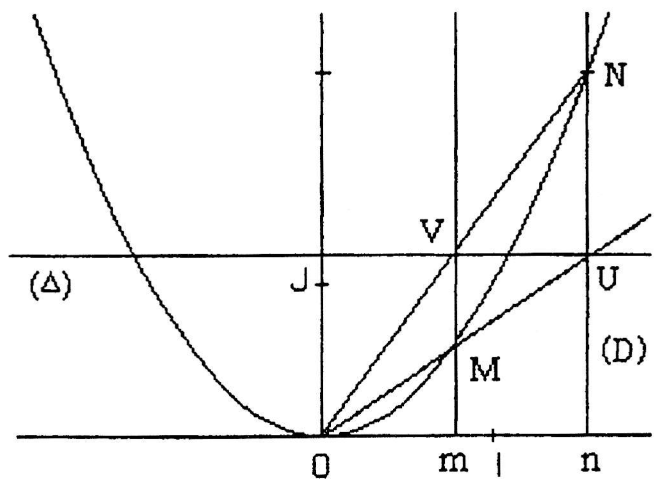
De même la droite BG passe par le milieu J de [AC] et la droite CG par le mileu K de [BC].

Conclusion : les trois médians d'un triangle sont concourantes, le point de concours est l'unique point G défini par

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = 0$$



Courbe représentative de la fonction : $x \mapsto y = x^2$.



Construction d'un point de la parabole sur une droite D ll à D_O.

La parabole

Le programme de seconde prévoit l'étude et la représentation graphique de la fonction carré : x -> y = x^2.

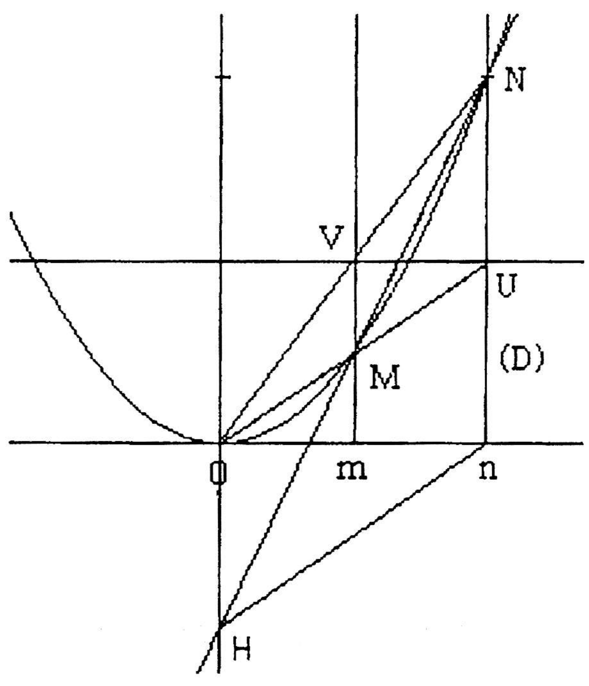
Le tracé réalisé en classe se fait point par point à partir d'un tableau de valeurs.

On peut proposer la construction géométrique suivante (figure ci-dessus)

Dans le repère {O,I,J} appelons Δ_0 la droite OI et D_0 la droite OJ. Supposons donner un point M(a,a^2) de la parabole, ce peut-être, par exemple le point A(1,1). Soit m(a,0) la projection de M sur la droite Δ_0 prallèlement à la doite D_O.

Soit D une droite parallèle à la droite D_0 d'équation x = b. Un seul point N de la parabole est sur D.

Il s'agit de déterminer géométriquement N :



1 - la droite D coupe la droite OM en U(b, ab)
2 - la droite Δ, parallèle à la droite Δ_0 menée par U coupe la droite Mm en V(a, ab)
3 - La droite OV coupe la droite D en N(b, b^2).

En seconde on ne considère pas les droites tangentes, il est cependant aisé de déterminer ces droites tangentes à la parabole.

Pour déterminer la tangente en M, considérons la sécante (MN), et sa position particulière quand N se confond avec M.

Nous étalissons d'abord une propriété de la sécante (MN) : par application du théorème de Thalès

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{UN}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{MU}} = \frac{\overline{VO}}{\overline{VN}} = \frac{\overline{Un}}{\overline{UN}}$$

et donc $\overline{OH} = \overline{Un}$

Le quadrilatère OUnH est donc un parallélogramme. On remarque que la sécante (MN) passe par le point H, c'est la droite (MH).

Quand N se confond avec M, les points U et V coincident avec OMmH. La sécante (MN) i.e. la droite (MH) est une diagonale de parallélogramme OMmH. C'est la tangente en M.

Construction en géométrie affine

Nous avons vu comment construire la pabole d'équation $y = x^2$. De la même façon montrons comment obtenir par des constructions à la règle, les points des courbes d'équations

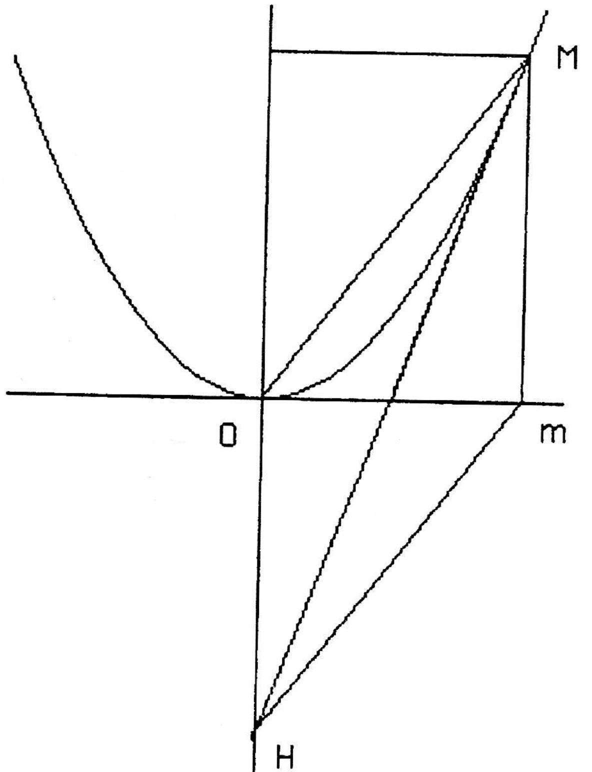
$$y = x^2,\ y = x^3, y = x^4 \ldots y = \frac{1}{x}$$

Dans le repère {O,I,J} appelons Δ_0 la droite OI et D_o la droite OJ. Soit A(1,1). Soit D une droite parallèle à la droite Do d'équation x = a.

1° - la droite D coupe la droite OA en U1(a,a).
2° - la droite Δ_1, parallèle à la droite Δ_o menée par U_1 coupe la droite (IA) en $V_1(1,a)$.
3° - la droite OV_1 oupe la droite D en $U_2(a,a^2)$.

On répète partant de U_2 les constructions 2° et 3°.

2° - la droite Δ_2, parallèle à la droite Δ_o menée par U_2 coupe la droite (IA) en $V_2(1,a^2)$.



La tangente en M est la diagonale du parallélogramme OMmH.

3° - la droite OV_2 oupe la droite D en $U_3(a,a^3)$.

On répète partant de U_3 les constructions 2° et 3°.

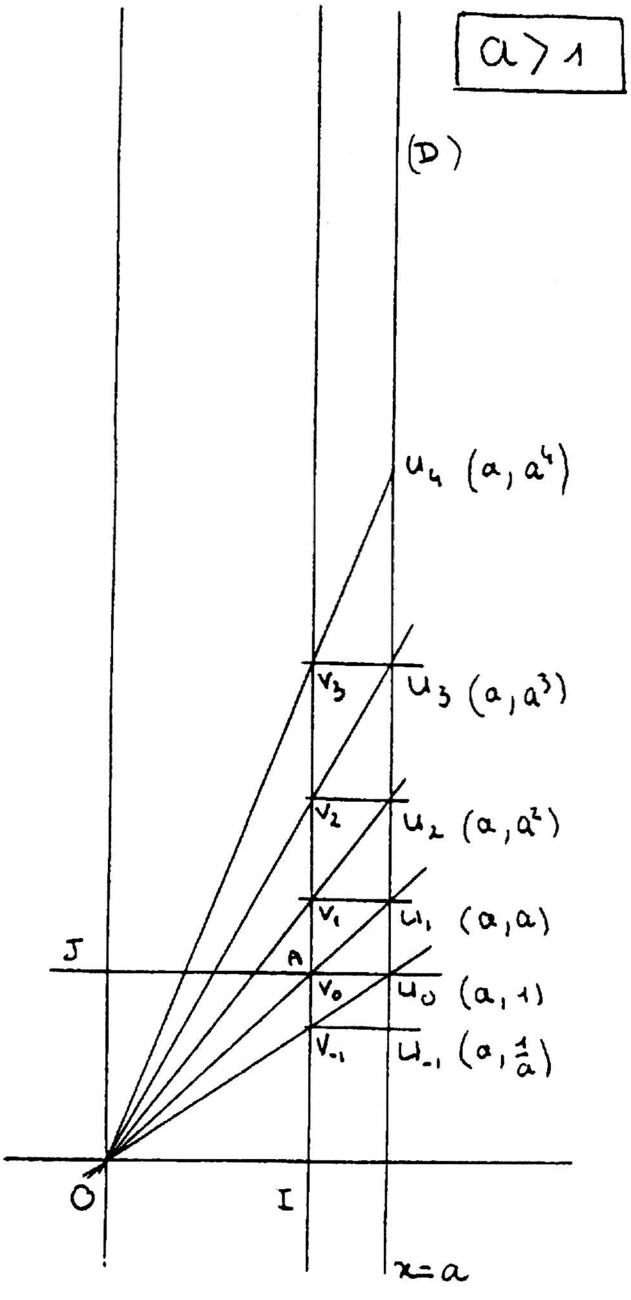
2° - la droite Δ_3, parallèle à la droite Δ_o menée par U_3 coupe la droite (IA) en $V_3(1,a^3)$.
3° - la droite OV_3 oupe la droite D en $U_4(a,a^4)$.

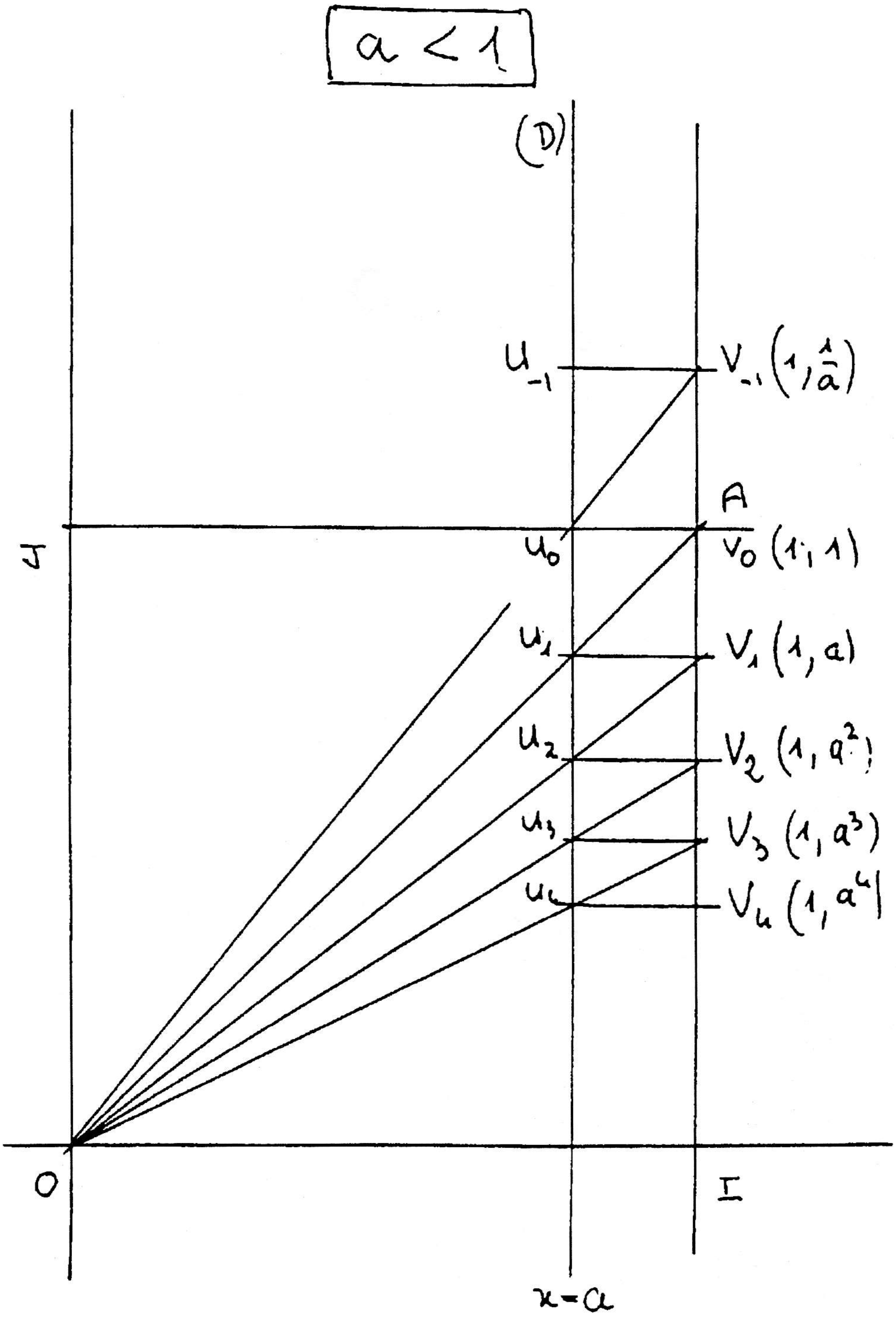
... inversement :

a - la droite Δ, parallèle à la droite Δ_o menée par $A = V_o$ coupe la droite D en $U_o(a,1)$
b - la droite OU_o coupe la droite IA en

$$V_{-1}(1,\frac{1}{a})$$

c - la droite Δ_{-1}, parallèle à la droite Δ_o menée par V_{-1} coupe la droite D en $U_{-1}(1,a^{-1})$ ❑




a < 1
(D)
U_{-1}
$V_{-1}\left(1,\frac{1}{a}\right)$
A
J
U_0
$V_0\ (1,1)$
U_1
$V_1\ (1,a)$
U_2
$V_2\ (1,a^2)$
U_3
$V_3\ (1,a^3)$
U_4
$V_4\ (1,a^4)$
O
I
$x=a$