Théorème, contraposée, réciproque ...

Nicole Bellard et Martine Lewillion, Montpellier

Notre objectif lors de cet atelier : montrer qu'il est nécessaire de prendre en compte la logique des prédicats, pour analyser les théorèmes et les raisonnements mis en jeu, dans l'enseignement de la géométrie au collège.

Le point de départ

Quatre énoncés fabriqués à partir de la relation de Pythagore : le théorème, sa réciproque, la contraposée du théorème et celle de sa réciproque. Nous avons comparé les formulations dans la langue naturelle (en utilisant, comme le conseillent les programmes, des "si ...alors ...") et des formules du type : **∀x [p(x) ==> q(x)]** (avec des prédicats et une quantification universelle comme l'exige une analyse correcte de ce qui est dit). Avec les écritures formelles (qu'il n'est pas question de proposer aux élèves), la quantification universelle est explicite alors que dans les formulations discursives, cette quantification ne l'est pas pour de nombreux élèves.

Deux règles d'inférence nous paraissent indispensables pour effectuer la plupart des raisonnements présents au collège :

- la règle de contraposition : les propositions **p(a) ==> q(a)** et **(¬ q(a) ==> (¬ p(a)** ont même valeur de vérité et il en est de même pour un théorème et sa contraposée.
- la règle du **"modus ponens"**, dite aussi "règle du détachement" ou "règle de séparation" : "si A et si A ==> B, alors B".

La compréhension et l'utilisation de la seconde règle constitue un objectif explicite de l'apprentissage du raisonnement déductif. La première règle ne nous semble pas enseignée. Sa mise en oeuvre dans certains contextes va peut être de soi (le triangle n'est pas isocèle donc il n'est pas équilatéral), surtout si le contrat passé avec les élèves n'exige pas de justifier toutes les affirmations avec des théorèmes explicitement formulés. Mais il n'en est pas de même dans tous les contextes (et cela aussi bien pour des élèves que pour des professeurs

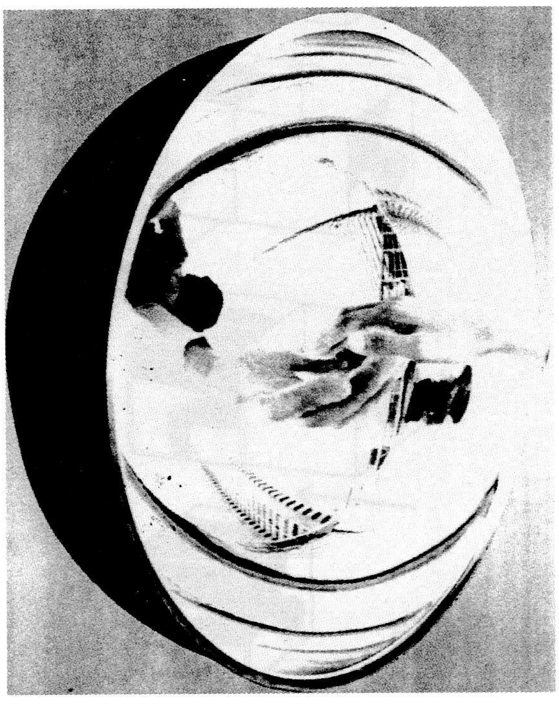


Image flottante

ou des auteurs de manuels et de corrigés d'examens.

C'est ce que nous avons montré en analysant rapidement :
- des réponses d'élèves de seconde à l'évaluation de septembre 1996 (exercice 1 à propos du "théorème de Thalès"),
- des réponses de professeurs à un exercice des épreuves E.V.A.P.M. de la classe de 4°,
- des extraits de livres d'élèves et d'annales corrigées.

Questions :
- la distinction entre un théorème et sa réciproque n'est peut-être pas un objectif à atteindre par tous les élèves du collège,

- un travail sur les liens entre théorème, réciproque et contraposée n'a peut-être pas sa place au collège.

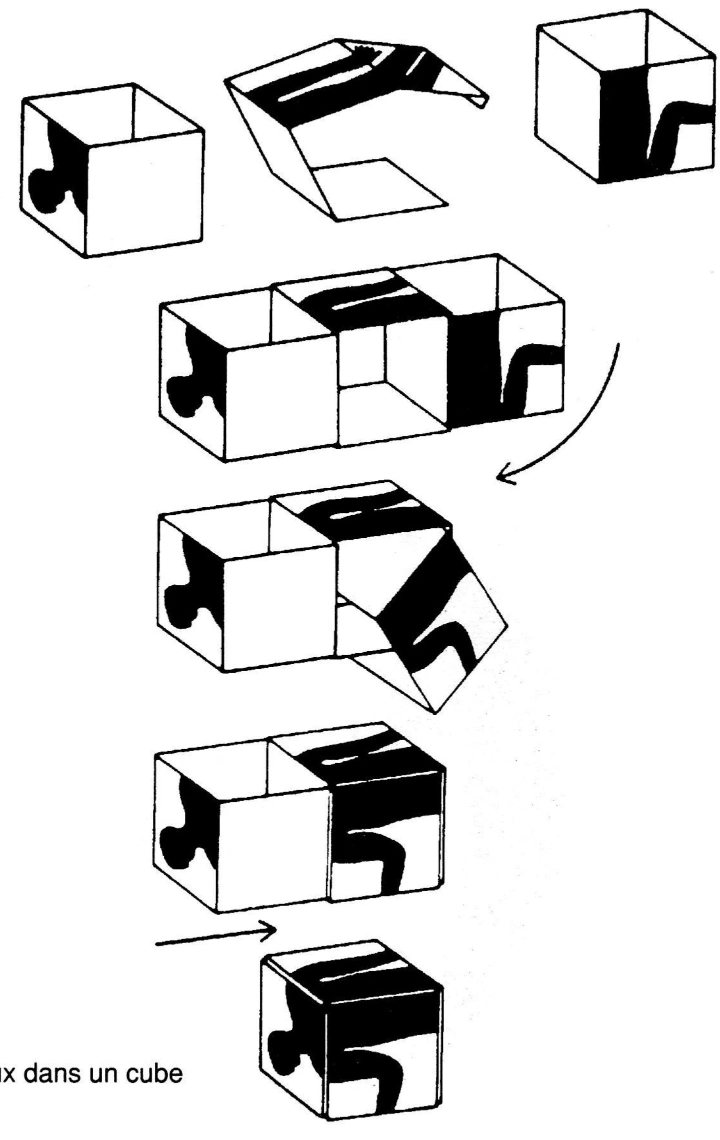
Nos objectifs

Nous avons présenté des situations réelles de classe (cf. bibliographie et des publications ultérieures de l'IREM de Montpellier) construites autour des objectifs suivants :

- comprendre la quantification universelle implicite dans les théorèmes étudiés,

- chercher un contre exemple pour réfuter une conjecture,

- distinguer les parties "prémisses" et "conclusion" dans un théorème en utilisant, à côté de la formulation en langue naturelle des théorèmes, des représentations non discursives sous forme de "schéma fléché" [Bellard 1993] et [Bellard Lewillion 1996] (qui, malheureusement, ne prennent pas vraiment en compte la quantification universelle),



Deux dans un cube

- distinguer un théorème de sa réciproque (une représentation non discursive étant ici encore un outil largement utilisé),
- mettre en oeuvre la règle du "modus ponens",
- distinguer la réciproque d'un théorème d'avec sa contraposée.

Nous n'ignorons pas que les années d'enseignement au collège sont insuffisantes pour atteindre ces objectifs, avec tous les élèves, mais nous trouvons important d'entreprendre un travail qui se poursuivra au lycée.

Nous indiquerons seulement que, faute d'avoir trouvé mieux, pour les théorèmes pour lesquels des confusions sont possibles et fréquentes entre "réciproque" et "contraposée", nous différencions, par écrit et dans la résolution de problèmes, avec les élèves, trois formulations : le théorème, le théorème "que l'on en déduit" (la contraposée) et la réciproque. Cela signifie qu'au lycée certainement, une mise au point s'impose, pour unifier ces notions et présenter la contraposée d'un théorème comme équivalente au théorème. ❑

Bibliographie

Bellard Nicole et Guin Dominique (1994)
Quels types de schémas pourraient être une aide à la compréhension des énoncés de théorèmes de géométrie ? Représentation graphique et symbolique de la maternelle à l'université, Tome 1, pp 60 à 68, Actes de la 46° CIEAEM, Editeur IREM de Toulouse.

Bellard Nicole (1996)
Représentations non discursives de théorèmes de géométrie, Actes du Colloque Inter-Irem de Géométrie de Bayonne, Editeur IREM de Bordeaux (à paraître).

Brousseau Guy (1987)
Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7.2, Editions La Pensée Sauvage.

Chevallard Yves (1985)
La transposition didactique, Grenoble, Editions La Pensée Sauvage.

Duval Raymond (1993)
Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 5, Editeur IREM de Strasbourg.

Duval Raymond (1994)
Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche mathématique, Repères IREM, vol 17, Topiques Éditions.

Egret Marie Agnès et Duval Raymond (1989)
Comment une classe de 4∞ a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 2, Editeur IREM de Strasbourg.

Guin Dominique (1989)
Réflexions sur l'aide à la démonstration, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 2, Editeur IREM de Strasbourg.

Durand Guerrier Viviane (1995)
Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, Différents types de savoirs et leur articulation, Editions La Pensée Sauvage.

Legrand Marc (1990)
Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 9.3, Editions La Pensée Sauvage.

Noirfalise Robert (1991)
Figures prégnantes en géométrie, Repères - IREM, vol 2, Topiques Éditions.

Noirfalise Robert (1993)
Contribution à l'étude didactique de la démonstration, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 13.3, Editions La Pensée Sauvage.