

Maths 2000 : défaite ou triomphe ?

Apmep, SMF, SMAI, ...
et Palais de la Découverte

Le 7 mars 1997, le Palais de la découverte organisait une réunion-débat autour de ce thème réunissant, outre l'Apmep, la SMF (Société mathématique de France), la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) et l'UPS (Union des professeurs de spéciales).

Les maths jouissent d'un curieux privilège : elles laissent rarement indifférent. Périodiquement, on voit paraître dans la littérature ou les médias, sous des plumes célèbres ou moins célèbres, certaines attaques passionnées contre "la didacture des maths", suscitant des réactions non moins passionnées.

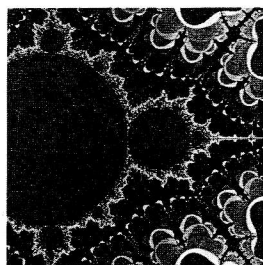
Si l'on s'essaie à une typologie, ces débats portent principalement sur trois points :

- la place des maths dans notre société technologique et industrielle,
- le rôle des maths dans la recherche, hors recherche non mathématique,
- la place des maths dans l'enseignement, sous le double aspect de leur rôle formateur et de leur rôle comme instrument de sélection.

Claude Allègre

La défaite de Platon

ou la science du XX^e siècle



Fayard le temps des sciences

Ces polémiques ne sont pas nouvelles, ni certains des arguments avancés ça et là, notamment concernant le dernier point. Déjà, en 1746, M. de la Chapelle, dans un Discours sur l'étude mathématique, où l'on essaye d'établir que les enfants sont capables de s'y appliquer, devait répondre à l'objection que "les mathématiques pourraient bien éteindre l'imagination".

Dans son dernier ouvrage, avant d'être Ministre de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie, *La défaite de Platon*, Claude Allègre alimentait de nouveau la polémique, sur les trois points cités, en examinant "au galop" les rapports des maths au réel et aux autres sciences et leur place dans l'enseignement.

Les participants à cette réunion-débat animée par Michèle Chouchan (France-Culture) étaient : Claude Allègre (géophysicien), Michel Broué (mathématicien), François Cuzin (biologiste), Ivar Ekeland (mathématicien), Luc Ferry (Président du Conseil National des Programmes) et Didier Dacunha-Castelle (ancien Président du CNP).



Ce débat, loin de satisfaire les praticiens-pédagogues présents, a laissé d'autant plus d'amertume que le "méchant" de l'équipe occupe une position éminente et stratégique dans le nouveau gouvernement pour l'enseignement des sciences.

Ce qu'en disent les participants de l'Apmep

Claude Allègre y a suivi un raisonnement du type :

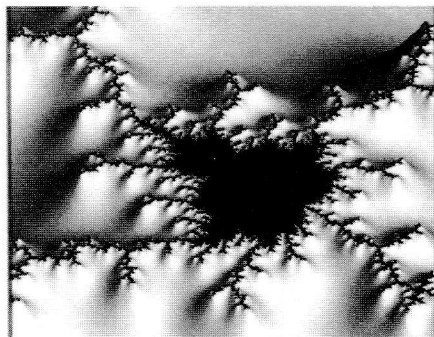
- les mathématiques n'ont pas à se confronter au réel à cause de leur mode de validation, au contraire des autres sciences. Par suite, les modèles mathématiques peuvent être un obstacle à la reconnaissance des faits expérimentaux.

- l'enseignement des mathématiques tend à promouvoir les raisonnements hypothético-déductifs, qui ne recouvrent pas l'activité scientifique dans la confrontation avec le réel. Claude Allègre dénonce l'inculture mathématique de la population, justifiant une remise en cause de son enseignement. Il y a trop de cours et pas assez de place laissée à l'autonomie des élèves et à l'expérimentation.

Opposant mathématiques et sciences du réel, C. Allègre y a restreint les mathématiques et leur raisonnement à un «raisonnement cartésien», aussi hégémonique que restreint et sclérosé.

Ce point de vue, comme quelques autres, ont montré que les pratiques nouvelles de l'enseignement des mathématiques issues des formations des IREM sont encore aujourd'hui trop méconnues du public et peut-être aussi de beaucoup d'enseignants.

Comment faire connaître à tous les évolutions de l'enseignement des mathématiques depuis 20 ans ? Des activités par "résolution de problèmes" aux Projets d'actions éducatives (les PAE scientifiques et mathématiques) en passant par les multiples "Rallyes" et autres activités de type "Maths en jeans" ?



La défaite de Platon Claude Allègre, Fayard, 1995 Quelques extraits

Page 426 : **Mathématiques et Nature**

« Tout ceci nous invite à nous pencher sur la question des mathématiques et de leur rôle dans les Sciences de la Nature.

Comme on l'aura noté, nous ne les avons pas mentionnées en tant que telles parmi les composantes de la science. Ce n'est pas un oubli : les mathématiques ne constituent pas à proprement parler une science, et ne sont pas en tout cas une "science comme les autres". Le physicien-théoricien Murray Gell-Mann, grand admirateur de cette discipline s'il en est, écrit pourtant : «Les mathématiques ne sont pas vraiment une science si l'on entend par science une discipline vouée à la description de la Nature et de ses lois».

Page suivante, on trouve :

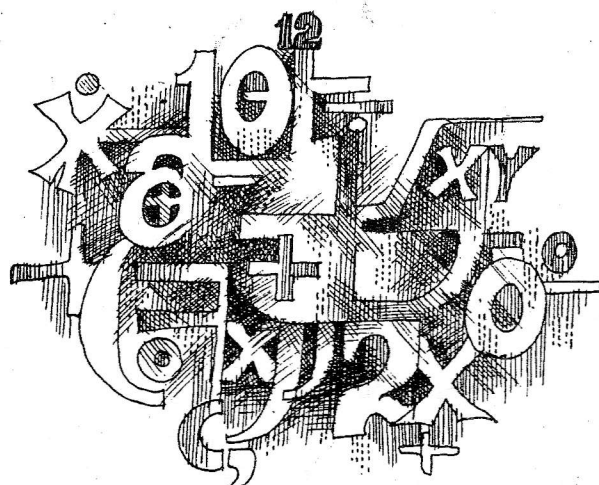
et l'observation du réel ?

«Evidemment, construction mentale, les mathématiques, discipline des formes, des nombres et des relations, prennent leurs racines dans le réel.

La géométrie est d'abord née de l'observation des figures géométriques existant dans le monde réel (voir Michel Serres : les origines de la géométrie. Flammarion, 1995). Les répertorier, les classer, découvrir leurs propriétés est une démarche identique à celle de la physique, car, une fois définies, ces lois (le théorème de Pythagore, par exemple) peuvent être confrontées à l'observation du réel. Mais en est-il de même lorsqu'on développe des géométries abstraites, multidimensionnelles, ou particulières, comme celle de Lobatchevski qui stipule que par un point on peut mener plusieurs parallèles à une droite donnée, ou encore celle de Riemann, géométrie sphérique à trois dimensions, ou d'autres encore plus abstraites, comme celle de Hilbert (même si, ultérieurement, elles peuvent se révéler utiles en Physique)».

Page 432 : **des maths pour l'autotoute**

« Je résumerais volontiers le rôle des mathématiques dans les sciences du réel par la métaphore suivante : elles sont de très belles voitures destinées à parcourir le



“champ” de la science ; lorsque ce “champ” est une route bien balisée, elles permettent d’aller vite et loin ; lorsqu’il est un désert inexploré (sans faits expérimentaux), elles peuvent aider à mener l’exploration rapidement, mais ne remplacent pas la boussole (l’intuition) ; lorsqu’il s’agit d’une jungle touffue (trop de faits d’observation complexes et entremêlés), elles s’arrêtent à l’orée, impuissantes.



Tel est le rôle des mathématiques comme auxiliaires des sciences de la nature : important, parfois décisif, mais non central. Pour autant, les “mathématiques appliquées” sont-elles destinées à ne devenir qu’un langage ? Quand on connaît les relations entre les progrès de l’ordinateur et ceux de la biologie moderne, qui sont toutes deux cybernétiques, mais ont aussi comme caractéristique commune d’avoir maintenu les mathématiques à la lisière de leurs développements, on peut s’interroger sur ce que sera à l’avenir cette nouvelle répartition des rôles.

Et pour finir, page 435 :

le hold-up intellectuel.

En fait, par le biais d’une succession de penseurs qui, héritiers de Descartes à Auguste Comte, s’est développée, notamment en France, l’idée que dans le développement scientifique, l’abstraction est plus importante que l’observation et l’expérience, que le raisonnement déductif l’emporte sur le cheminement inductif. C’est cette école de pensée, qui s’est donné les mathématiques pour emblème, que nous appellerons l’«école platonicienne». Elle s’est emparée de l’enseignement des sciences et, par là, de l’image que l’on a de la science, réalisant ainsi un véritable hold-up intellectuel. C’est ainsi que les mathématiques et leur mode de raisonnement ont envahi l’enseignement des sciences et toute la formation des esprits.

Les sciences en ont pâti. Les mathématiques aussi, car éloignées du réel, elles n’ont pas pleinement joué leur rôle. Ni sur le plan culturel ni sur le plan esthétique.



Tatouage faciale
chez une femme Makwa



Quelques éléments de “réponses” écrits avant et après.

Jacobi (lettre à Legendre, Juillet 1830)

J'ai lu avec plaisir le rapport de M. Poisson sur mon ouvrage (*Œuvres complètes de Jacobi*, vol.1, p. 454) et je crois pouvoir en être très content ... mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son rapport une phrase peu adroite de M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne pas nous être occupé de préférence, du mouvement de la chaleur. Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels. Un philosophe tel que lui aurait dû savoir que le but unique de la Science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que, sous ce titre, une question de nombres vaut bien une question de système du monde.

Von Neumann (in The mathematician. Complete works, vol 1. p 1-9)

Je crois que c'est une relativement bonne approximation de la vérité - qui est bien trop compliquée pour permettre autre chose qu'une approximation - que les idées

mathématiques ont leur origine dans l'empirique, bien que la généalogie soit quelquefois longue et obscure. Mais une fois qu'elles sont ainsi conçues, le sujet commence une vie propre à soi, qu'il vaut mieux comparer à une vie créative, gouvernée par des motivations presque entièrement esthétiques, plutôt qu'à n'importe quoi d'autre, et en particulier à la science empirique.

Il y a cependant un autre point sur lequel, je crois, il faut insister. Quand une discipline mathématique voyage loin de ses sources empiriques, ou plus encore, si c'est une deuxième ou troisième génération inspirée seulement indirectement des idées provenant de la “réalité”, elle est sujette à de très graves dangers. Elle devient de plus en plus esthétisante, de plus en plus l'art pour l'art (en français dans le texte). Ceci n'est pas forcément mauvais, si le domaine de cette discipline est encore entouré de sujets qui ont des relations plus proches avec l'empirique, ou si la discipline se trouve sous l'influence d'hommes avec un goût exceptionnellement bien développé. Mais il y a un grave danger que le sujet se développera sur la ligne de moindre résistance: que le courant, loin de ses sources, se séparera en une multitude de branches insignifiantes, et que la discipline deviendra une masse désorganisée de détails et de complexités.

Autrement dit, loin de ses sources empiriques, ou après beaucoup d'hybridations, un sujet mathématique est en danger de dégénérescence. Au début, le style est classique ; quand il montre des signes de devenir baroque, alors le signal du danger s'élève. Il est facile de donner des exemples, de tracer une évolution concrète dans le baroque ou le haut baroque mais, de nouveau, ce serait classique.

Femme Tsonga
(province de Gaza)



Von Neumann in "The role of mathematics in the sciences and in the society" (Complete works, vol VI p. 477)

Mais toujours, une bonne partie des mathématiques qui deviennent utiles se sont développées sans aucun désir d'être utiles, dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quels domaines elles deviendraient utiles. Il n'y avait aucune indication générale qu'elles deviendraient utiles. C'est vrai de toute la science. Les succès sont en large mesure dûs au fait qu'on oublie complètement ce que l'on veut au bout du compte, ou même si l'on voulait quoi que ce soit au bout du compte, en refusant de porter ses investigations sur les choses qui profitent et en se guidant seulement sur des critères d'élégance intellectuelle.

Et je crois qu'il est extrêmement instructif de regarder le rôle que la science joue dans la vie de tous les jours et de noter que dans ce domaine le principe du laisser-faire a conduit à des résultats étranges et merveilleux.

Mathématiques et imagination

Rémy Langevin
(Université de Bourgogne
janvier 1977)

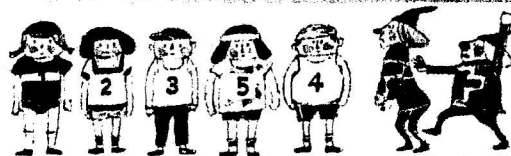
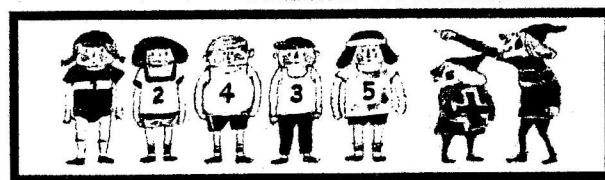
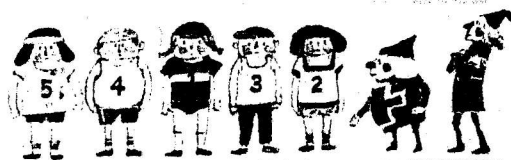
Il est aujourd'hui à la mode de critiquer les mathématiques, identifiées à des calculs longs et fastidieux, ou à un vocabulaire ésotérique, et de trouver toutes les

vertus au "concret". Seule l'initiation précoce aux sciences expérimentales permettrait de donner aux générations à venir les capacités d'imagination et d'adaptation qui leur font aujourd'hui défaut. Il est vrai que les sciences expérimentales ont été négligées en France, surtout au cours des siècles passés, quand le clerc de notaire ou l'homme cultivé étaient d'abord hommes d'églises.

Afin de ruiner la prétention des mathématiques à contribuer à une formation équilibrée des esprits, il faut commencer par bâtir une caricature des mathématiciens. J. Swift l'avait fait avec talent dans les voyages de Gulliver. Ses Laputiens ont besoin de domestiques pour leur frapper la bouche ou les oreilles avec une petite vessie gonflée afin qu'ils dédaignent délaissier leurs profondes spéculations mathématiques un instant pour répondre à leur interlocuteur ou écouter celui-ci. Il est très facile, après une telle caricature, de faire des mathématiques une rhétorique stérile.

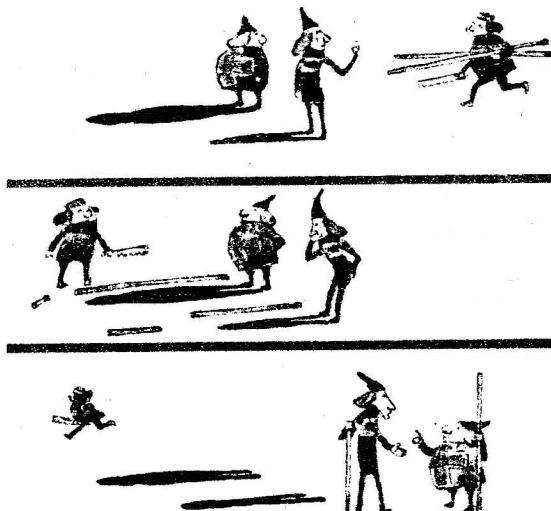
Et vive la liberté de l'imagination !

Cependant, rien de plus loin de l'imagination d'un peintre, par exemple, que la juxtaposition de coups de pinceau aléatoires. Un tableau du Titien ou de Matisse est construit avec des proportions soigneusement choisies. Les chercher est presque un exercice de géométrie. C'est souvent le mélange de l'imagination et de la rigueur qui permet la création artistique. Il en va de même en mathématiques. La liberté dans le choix des axiomes, dans le



Les nombres en ordre

Plus grand, plus petit



choix des problèmes, des sources d'inspiration est féconde si elle est suivie de rigueur dans les déductions. Cela implique qu'il y ait tant de manières de faire des mathématiques : le calcul, le dessin en deux parmi d'autres.

Confiner les mathématiques à un rôle d'outil de calcul au service de l'économie ou des sciences expérimentales reviendrait à priver ces dernières de certaines de leur plus belles avancées. Comment Kepler aurait-il pu se rendre compte que les orbites des planètes étaient elliptiques si les anciens n'avaient pas d'abord reconnu et étudié cette courbe ?

Faut-il enfin laisser les mathématiques à quelques spécialistes, car elles exigent trop d'efforts pour le profane ? Les nombreux lycéens qui se passionnent pour la résolution d'un problème s'inscriront en faux. La solution d'un problème de mathématique intéressant peut être à la fois non mécanique, surprenante et élémentaire. Peu de domaines peuvent à tous les niveaux offrir des défis accessibles.

Il serait dommage de se priver d'une aussi belle école d'esthétique, de rigueur et d'imagination.

**Contribution au
groupe de travail
de l'Apmep
"Prospective Bac"**

Régis Gras et Annie Larher
(octobre 1996)

Question 1 : Les mathématiques sont-elles seulement une discipline de service ? Pourrait-on se contenter, dans une formation

générale, de faire enseigner par chaque discipline les mathématiques dont elle a besoin ?

**Apports spécifiques de l'enseignement
mathématique par rapport aux autres
disciplines**

L'enseignement des mathématiques vise à faire atteindre par les élèves, de façon plus spécifique que les autres disciplines, les objectifs suivants :

- effectuer un calcul en utilisant un algorithme formel, donc assez général pour être utilisé dans différentes circonstances, c'est-à-dire instanciable de façon quelconque, contrairement aux situations des autres sciences où les grandeurs sont spécifiées,
- optimiser un résultat à partir d'une famille de résultats plausibles, en utilisant des critères objectifs (par exemple en utilisant la fonction max-min ou le maximum de vraisemblance ou le minimum de risque),
- représenter une situation par un graphique, un diagramme qui fassent apparaître les propriétés relationnelles (par exemple, entre 2 ou 3 variables qualitatives), topologiques (un plan de circulation) algébriques (entre variables réelles, par ex),..., des objets de la réalité physique ou des objets mathématiques,
- modéliser et formaliser une situation-problème en fonction de contraintes imposées ou de degrés admis dans celle-ci,
- différencier ce qui est général de ce qui est particulier (mise en garde à l'égard de l'induction ou de l'analogie hâtives). De plus, exprimer ce qui est général dans une classe de situations voisines, par l'explicitation des invariants,

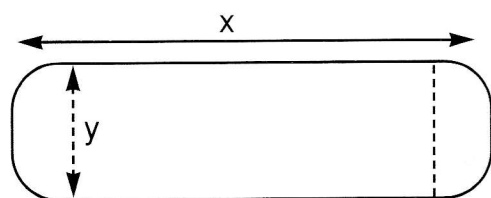
- structurer une ensemble de données selon les méthodes géométriques ou combinatoires pour l'analyser, pour permettre d'émettre des hypothèses, de proposer des inférences, tout en contrôlant le degré de confiance,

- disposer de méthodes sur la base de la logique propositionnelle (connecteurs, quantificateurs) qui permettent de conduire à un raisonnement indépendant de la sémantique pouvant être irréfutable dans un champ déterminé et sur la base d'hypothèses admises.

De façon plus générale, dans leur formation scientifique et sociale, l'enseignement des mathématiques contribue fortement à munir les élèves de modes de pensée et d'outils permettant entre autres de refuter des arguments d'autorité.

Un même problème, deux présentations, deux types d'enseignement (d'après une activité de l'IREM de Strasbourg)

I - La figure ci-dessous représente un rectangle accolé en demi-cercles dont le diamètre est égal à la largeur du rectangle.



1 - Sachant que le périmètre de cette figure vaut 40, en déduire une relation entre x et y .

2 - Montrer que l'aire du rectangle, en fonction de x , est égale à :

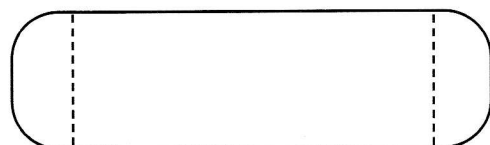
$$A(x) = x\left(\frac{40}{\pi} - \frac{2x}{\pi}\right)$$

3 - Représenter graphiquement la fonction A pour $x \in [0 ; 20]$

4 - Quelle conjoncture découle de cette représentation graphique quant au maximum de la fonction A sur l'intervalle $[0 ; 20]$?

5 - Montrer que $A(x) \leq \frac{200}{\pi}$ pour tout x de l'intervalle $[0 ; 20]$.

6 - Pour quelle valeur de x , de l'intervalle $[0 ; 20]$, l'aire du rectangle est-elle maximale?



II - Le maire d'une petite ville de province projette de construire un nouveau terrain de sport. Celui-ci doit avoir une forme rectangulaire et disposer à chacune de ses extrémités de deux aires en forme de demi-disque de diamètre égal à la largeur du rectangle. Lors de l'établissement du budget prévisionnel, le conseil municipal a décidé l'achat de la pose d'une clôture de 400 m de long au maximum.

Le maire tient à ce que l'on utilise le maximum de clôture permis, tout en veillant à ce que la partie rectangulaire du nouveau terrain occupe la plus grande surface possible. Dans ce but, il demande donc de déterminer ses mesures avant d'entreprendre les travaux.

Et si c'est l'aire totale du terrain qui doit être la plus grande possible ?

Question 2 : A quoi sert l'épreuve de mathématiques dans un examen de fin d'études comme le baccalauréat ? Est-elle nécessaire ? Si oui, à quoi ?

Fonctions de l'évaluation

Dans les faits, on considère généralement que l'épreuve de mathématiques au baccalauréat doit remplir (actuellement plus ou moins bien) une double fonction :

- sommative : évaluer par un bilan les acquisitions de l'élève au cours de ses études dans l'enseignement secondaire et dans la filière choisie, à la fois à travers ses connaissances et ses démarches ;

- prédictive ou pronostique : évaluer les capacités de l'élève à poursuivre des études ultérieures qui sont le plus souvent visées par le choix de la filière donc contribuer à son orientation de façon positive.

Ceci signifie que cette dernière fonction ne peut être véritablement bien assumée que si les résultats de l'examen sont couplés à ceux d'un contrôle continu. De plus les variantes de formation après bac sont telles (courtes ou longues par exemple) que la spécification des capacités devrait prendre en compte, sans s'illusionner sur la portée du pronostic qui ne peut intégrer les motivations et les contraintes sociales et économiques.

Question 3 : Si l'on sait assez bien évaluer l'acquisition des connaissances, qu'en est-

il de l'évaluation des démarches que l'enseignement des mathématiques est censé faire acquérir ? Sont-elles indépendantes des filières suivies (bilan) et visées (pronostic) ?

Remarques au sujet des démarches

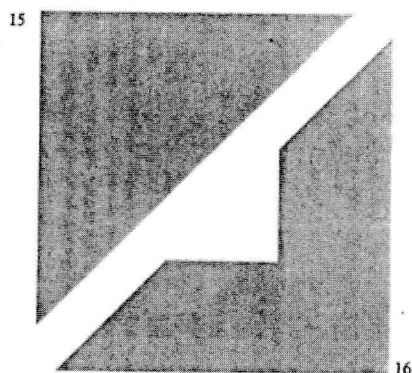
Certes les acquisitions de connaissances peuvent varier d'une filière à une autre, mais des démarches communes sont partagées entre ces différentes filières et évaluables ; citons à titre d'exemple :

- communiquer oralement ou par écrit, de façon claire et soignée un résultat ou une représentation (graphique, tableau, plan...);
- conduire un raisonnement de 3 à 5 pas de façon rigoureuse sans paralogisme (erreur de bonne foi), donc en particulier, sans "cercle vicieux", aussi bien dans un cadre

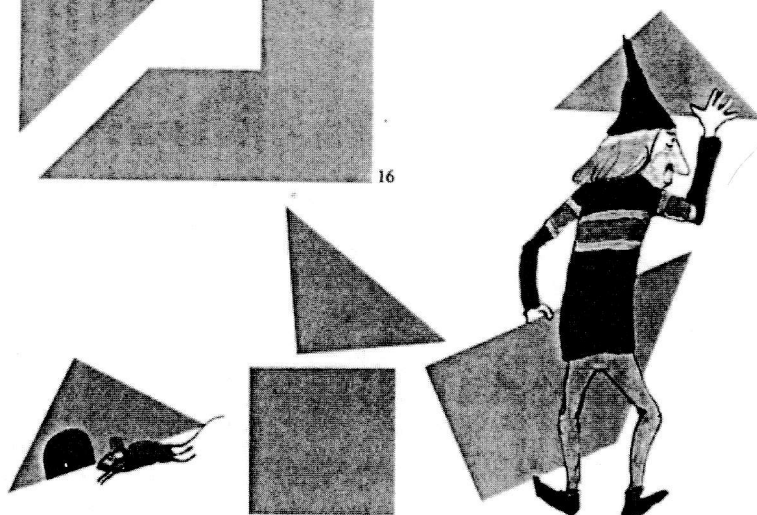
géométrique, que dans des cadres arithmétiques ou algébriques ;

- adopter une attitude critique face à un résultat, par exemple numérique (vraisemblance : ordre de grandeur ; pertinence : précision, nombre de décimales ; adéquation : conformité à la situation, ...) mais aussi bien face à un texte argumentatif ;
- fournir un exemple iconique ou numérique pour une situation générale ;
- émettre des hypothèses de plausibilité en faisant le choix de ce qui semble le plus probable ;
- faire choix d'une méthode ou d'une stratégie ayant les meilleures chances de déboucher sur une solution. De façon plus générale, se servir des espaces de libertés laissés dans ou hors du temps d'enseignement pour exercer sa créativité, voire sa fantaisie inventive.

Mais assembler n'est pas tout.
On peut aussi jouer à séparer



Méli et Mélo ont inventé un
produit qui sépare ce qui
était soudé



Monsieur Allègre et Descartes

Vincent Jullien,
mathématicien, historien et
philosophe
Ecole Normale Supérieure
de Fontenay
(Le Monde, 22 juin 1997)

J'ai récemment eu sous les yeux un texte de Claude Allègre (le point n° 1279) intitulé "Les erreurs de Descartes".

Il y écrit (ou fait écrire) que Descartes a défendu l'immobilité de la Terre. Descartes fut l'un des plus puissants et plus efficaces héliocentristes du 17^e siècle, et sa formule sur "*l'immobilité de la Terre en ces cieux*" est une clause de prudence. La suite soutient que la Terre et ses cieux sont emportés autour du Soleil ; c'est une thèse essentielle du Traité du monde.

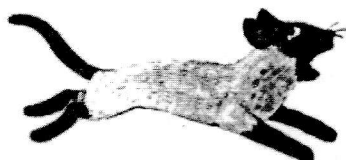
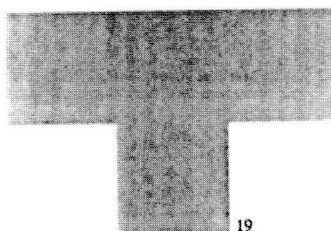
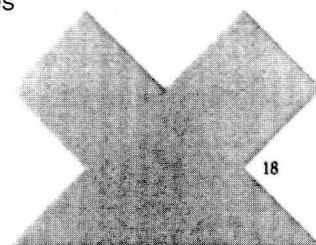
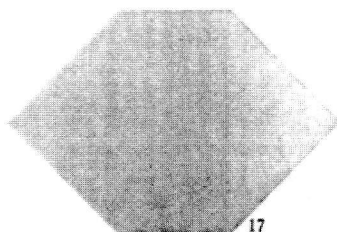
Plus contestable encore est la

conception de la science, de la vérité et de l'histoire de la science que révèle cet article: «Descartes s'est trompé sur à peu près tous les sujets», ce qui exact (et même en mathématiques, je puis le confirmer), mais ne permet évidemment pas de porter un jugement négatif (voire violemment hostile) sur l'œuvre de Descartes.

En effet, selon des critères anhistoriques, tous les savants du passé se sont "trompés" sur presque tout. Newton pensait que toute conception ondulatoire de la lumière était insoutenable. Kepler estimait que les astres avaient une âme. Einstein rejetait la physique quantique et l'idée d'un Univers non homogène. Galilée croyait que les marées s'expliquaient par le mouvement diurne et fournissaient une preuve du mouvement de la Terre ; il ne voulait pas des orbites elliptiques de Kepler. Copernic défendait la sphère des étoiles fixes. Perrin refusait obstinément la chimie moléculaire.

Je m'arrête, car il suffit de songer à n'importe quel savant du passé pour obte-

Regarde bien ces formes. Peux-tu retrouver les cinq morceaux dont elles sont faites ?



Le chat et la souris sont ravis
d'être enfin séparés !

nir un exemple (voire une foule d'exemples) d'erreurs. C'est - bien entendu - la vie même de la science et il est choquant de lire une moquerie, 350 ans après, sur Descartes qui croyait (l'idiot !) que c'était la quantité de mouvement qui était conservée dans le choc mécanique au lieu de l'énergie.

A l'époque, tous les concepts (mouvement, énergie, action, force, travail, ...) étaient en gestation. Ce fut une formidable avancée conceptuelle de proposer une loi générale de conservation lors des modifications des systèmes mécaniques isolés, comme le fit Descartes. Qu'elle ait dû être profondément modifiée est le propre des "vérités scientifiques" qui sont (mais je pensais que chacun en était aujourd'hui convaincu) provisoires, interpénétrables et toujours en devenir.

Quant au misérable argument anticartésien, selon lequel la racine de esatares réside dans l'interaction qu'il admet entre science et métaphysique, il condamnerait tout autant Leibniz, Pascal, Kepler, cantor et même Newton, dont les concepts de temps et d'espace absolus sont théolo-

giquement fondés. Cette bordée anticartésienne passe aussi à côté d'une leçon que l'auteur du Discours de la méthode nous a donnée : nous pouvons et nous devons penser en hommes libres, sans anathèmes et en évitant - si possible - de mêler la science aux querelles du temps.

Domage qu'il soit si mal entendu. Il faut aussi s'interroger : pourquoi cette montée aux créneaux ? Descartes - ou son épouvantail, sa caricature - est mobilisé dans un but précis qui n'a rien à voir avec la science ou l'épistémologie. Le voici associé à Claude Allègre, pour les besoins d'une polémique idéologique, aux nouveaux philosophes d'aujourd'hui qui, tournant effectivement leurs vestes au gré des vents inconsistants, se sont trompés pour ne pas penser faux ... comme Descartes.

La philosophie et la science, l'idéologie et la politique n'ont pourtant pas, je crois, les mêmes critères du vrai et du faux, du juste et de l'erronné. □

π relief

