

# Les mathématiques appliquées en Bretagne

Extrait de "Réseau" - Journal du CCSTI de Rennes

**L**es mathématiques étudient les propriétés d'objets abstraits : les nombres, les figures géométriques, les fonctions, les espaces ... ainsi que les relations qui s'établissent entre eux. Leurs applications sont multiples. Le physicien, le chimiste et le biologiste doivent rendre compte des phénomènes naturels, souvent très complexes, et font appel aux mathématiques pour établir des modèles relativement simples, quoique imparfaits.

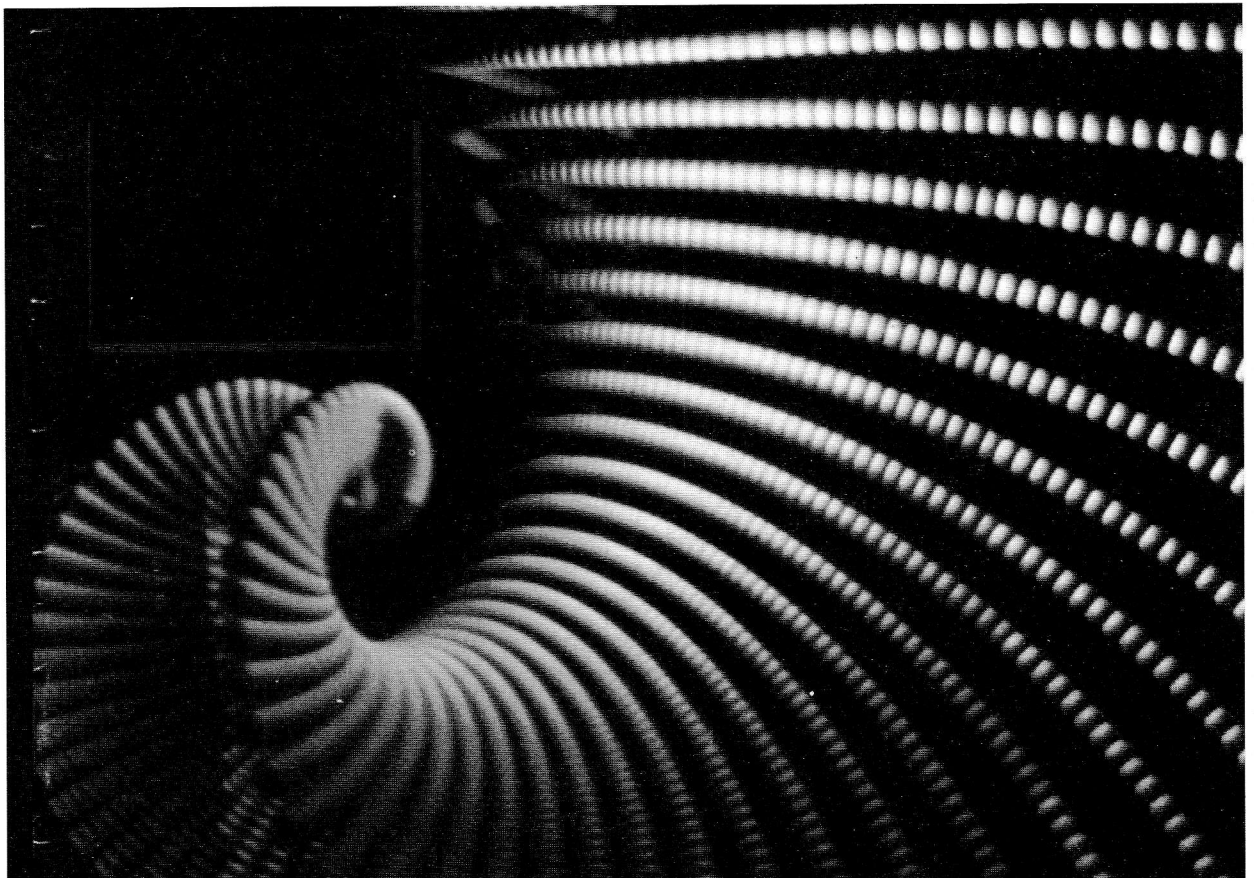
La Bretagne compte plusieurs équipes de recherche en mathématique : à Rennes où se situe l'IRMAR - Institut de recherches mathématiques, à Vannes où règnent les statistiques.

A Brest, l'Ecole nationale supérieure des ingénieurs des études et techniques d'armement (ENSIETA) se penche sur les réseaux neuronaux, quand il faut, avec les outils mathématiques adaptés au système

binaire de nos ordinateurs, prendre en compte le "ni oui ni non", le "ni 1 ni 0" des données fournies par la réalité.

Derrière une image encore austère, s'active une communauté de chercheurs qui, loin de se limiter à la résolution de grandes équations abstraites, emploient tout leur art à simplifier les problèmes complexes, que l'on ne sait pas traiter, pour en faire des problèmes simples, pour lesquels nous sommes capables aujourd'hui de trouver des solutions, grâce aux nouvelles théories (fractales, théorie du chaos, distributions, ondelettes, ...).

C'est ainsi que l'on retrouve, dans la résolution de problèmes bien réels, comme la sécurité informatique ou la modélisation du cerveau, les équations qui autrefois blanchissaient les tableaux noirs (puis blancs) de nos lycées pour, croyait-on, le seul plaisir de "faire des maths".



## La géométrie algébrique

Pierre Berthelot.  
IRMAR, Rennes

*De nos jours, l'utilisation des méthodes très puissantes de la géométrie algébrique contribue à faire de la théorie des nombres une des branches les plus vivantes et les plus attractives des mathématiques.*

L'équipe de Géométrie de l'IRMAR, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, possède un profil original, axé principalement sur les aspects arithmétiques de sa discipline.

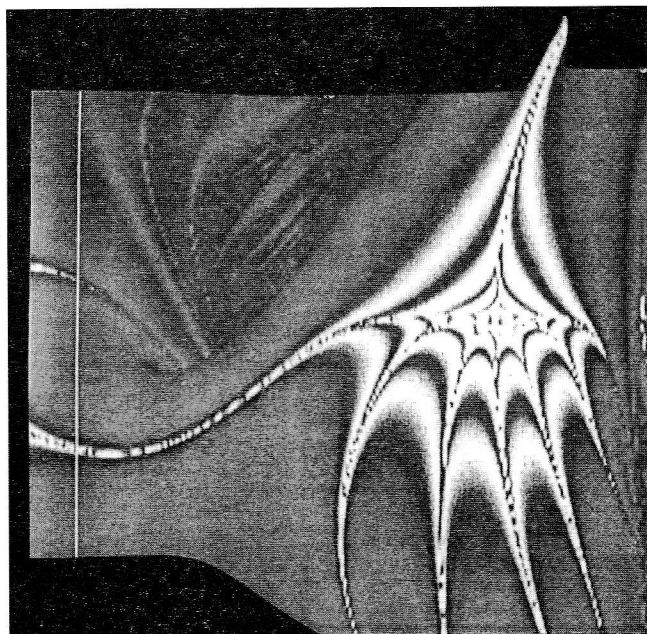
## Qu'est-ce que la géométrie algébrique

En simplifiant, on peut dire que la géométrie algébrique a pour objet l'étude des systèmes d'équations algébriques en un nombre quelconque de variables. L'ensemble des solutions d'un tel système constitue un objet géométrique complexe : ainsi, une équation à 2 variables définit une courbe dans le plan, une équation à 3 variables, une surface dans l'espace à 3 dimensions, un système de 2 équations à 3 variables, une courbe dans l'espace... L'étude de ces objets appelés "variétés algébriques", met en oeuvre les techniques de l'algèbre et de la géométrie, et souvent aussi celles de la "théorie des nombres".

Les recherches de l'équipe de Géométrie algébrique sont principalement orientées vers ces problèmes liés à la théorie des nombres, comme l'étude des solutions de systèmes d'équations algébriques à valeurs entières, ou dans certains corps particuliers (1). Un aspect particulier est l'étude de certaines courbes importantes en arithmétique, comme les courbes elliptiques ou les courbes modulaires.

## Le calcul modulo N

Dans l'étude arithmétique des variétés algébriques, on emploie une méthode



fondamentale, issue de la théorie des nombres la réduction *modulo n* (2) des données à valeurs entières,  $n$  étant un entier fixé. Le principe en est très simple : toute quantité multiple de  $n$  est considérée comme nulle. Lorsque  $n$  est un nombre premier, traditionnellement noté  $p$ , les règles de calcul sont en tout point semblables aux règles habituelles.

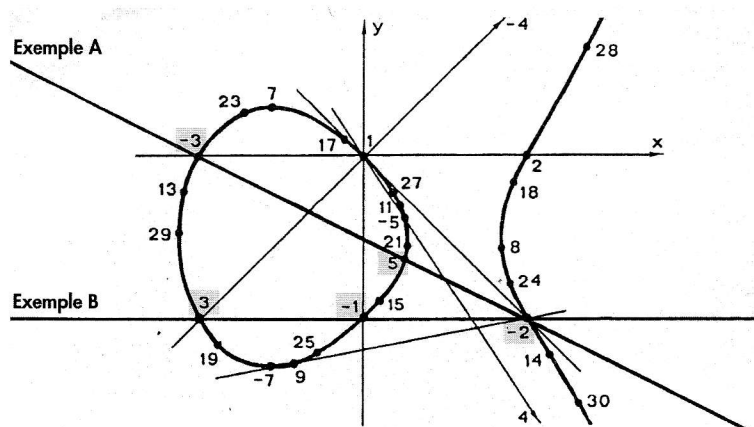
L'ensemble construit ainsi, appelé "corps fini", est composé des classes des nombres entiers allant de 0 à  $p-1$ . Il peut alors être enrichi par toutes les constructions usuelles de l'algèbre : polynômes, racines d'équations algébriques, vecteurs, matrices... De cette manière, on fabrique des objets géométriques plus simples, dont les propriétés reflètent ceux du monde réel.

## Des retombées technologiques

Si les problèmes de la géométrie algébrique sont en général du domaine de la recherche fondamentale, ils ont aussi des applications technologiques parfois inattendues. Omniprésent dans la technologie actuelle, le codage binaire des données se prête directement par sa mesure au calcul modulo  $n$ . C'est ainsi que la sécurité des transactions électroniques repose souvent sur la méthode de cryptographie à clé publique, dite RSA, basée sur l'impossibilité, lorsque  $p$  et  $q$  sont deux grands nombres premiers, de retrouver  $p$  et  $q$  en connaissant

(1) corps : ensemble régi par les lois fondamentales de l'addition et de la multiplication des nombres.

(2) modulo  $n$  : relation d'équivalence entre deux entiers dont la différence est un multiple de  $n$ .



Cette figure représente les points à coordonnées rationnelles de la courbe elliptique d'équation  $y^2 + y = x^3 - x$ .

Toute courbe elliptique possède une loi d'addition naturelle ; ici, la somme de 3 points alignés est égale à 0. Exemple A :  $-3 + 5 - 2 = 0$  ; exemple B :  $-3 - 1 - 2 = 0$ .

seulement le produit  $n = pq$ , même avec l'aide des ordinateurs les plus puissants.

La géométrie algébrique modulo  $p$  intervient aussi dans la construction des codes correcteurs d'erreurs les plus performants, basés sur les points de certaines courbes algébriques à coordonnées dans un corps fini. Grâce à l'augmentation continue de la puissance de calcul des microprocesseurs, l'utilisation de telles techniques, mettant en oeuvre des algorithmes sophistiqués, deviendra de plus en plus fréquente dans les années à venir.

### Un prix de l'Académie des sciences

Le prix "Charles-Louis de Saulces de Freyeinet" a été décerné en 1995 par l'Académie des sciences à Pierre Berthelot pour ses travaux, qui ont permis le développement de certaines théories, dites "cohomologiques", grâce auxquelles on peut réduire le calcul d'informations sur des objets géométriques à des problèmes d'algèbre linéaire.

### Les réseaux neuronaux en quête de genèse

Les réseaux neuronaux fonctionnent. Pourtant, personne ne sait vraiment "pourquoi ça marche".

*"On peut aujourd'hui comparer l'engouement pour les réseaux de neurones à celui qu'à provoqué, à une certaine époque, l'intelligence artificielle et les systèmes experts. Ceux-ci n'étaient rien d'autre, finalement que des langages de programmation".* Enseignant-chercheur à l'ENSIETA, Nicolas Seube ne se paie guère de mots : les réseaux de neurones ont trouvé de nom-

breuses applications, mais elles sont basées sur des "modèles arbitraires", des "métaphores biologiques approximatives" du fonctionnement du cerveau humain. En un mot, ce sont des systèmes empiriques. D'où sa volonté d'en venir aux bases théoriques.

*"Nous voulons mettre l'accent sur les aspects théoriques des réseaux de neurones, et sur les méthodes mathématiques permettant de proposer des alternatives constructives aux algorithmes neuronaux existants".*

### Les bits de la machine

Les réseaux neuronaux sont définis comme étant des systèmes artificiels, basés sur des calculs informatiques et conçus, approximativement, sur le modèle du traitement de l'information par les humains. Les bits de la machine, unités du langage binaire, apprennent à se substituer à la physique des neurones du cerveau. Les applications de ces réseaux sont variées, englobant la reconnaissance des formes et des images, la reconnaissance et la synthèse de la parole, la robotique (auto-apprentissage du robot), l'automatique (commande de procédés industriels de fabrication), et bien d'autres domaines encore, allant de la mise en conservation des haricots aux virtualités d'évolution de la vie sur une planète.

### "Pourquoi ça marche"

Ce n'est pas si évident. Un réseau de neurones est avant tout un système à

entrée-sortie : le dispositif, qui reçoit des signaux à l'entrée, est capable de les traiter en tenant compte de leurs caractéristiques. Il en ressort un signal qui est la résultante des opérations effectuées. *"Si on prend un modèle où les neurones sont répartis sur plusieurs couches, on s'aperçoit souvent qu'il y a surdimensionnement des paramètres par rapport au problème. Ce qui empêche toute analyse fine des résultats"*. Ça marche, mais en quelque sorte à l'aveuglette, par accumulation des moyens.

### Le théorème de Barron

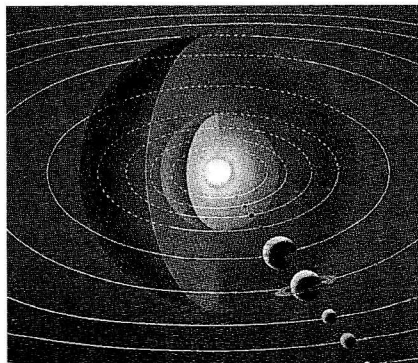
Sur quel principe de base s'appuyer pour éviter cela? Par exemple, sur le théorème de Barron, qui date des années 1980. Suivant la régularité de la fonction à approcher, et la précision escomptée, il permet d'estimer le nombre minimal de cellules élémentaires à déployer dans un modèle à une seule couche. En d'autres termes, comme toutes les cellules (d'entrée, de sortie et intermédiaires) sont interconnectées, il y a moyen de prévoir leur nombre en suivant un algorithme mathématique bien défini.

*"Il est important de revenir à cette base",* commente le mathématicien, *"car on bute sur certaines limites : alors que des modèles simples résolvent des problèmes compliqués, on utilise de plus en plus aujourd'hui des modèles extrêmement compliqués, qui s'avèrent d'analyse très délicate"*. Le théorème de Barron, d'un point de vue pratique, permet aussi de réduire le nombre de cellules à implanter au niveau des micro-ordinateurs qui simulent les réseaux des neurones. Les réseaux neuronaux ne sont pas un gadget de l'histoire des sciences !

### Les mathématiques appliquées à l'imagerie médicale

*"En imagerie médicale, les mathématiques font partie du quotidien"*.

L'un des thèmes importants traités en imagerie médicale est la modélisation anatomique du cerveau. Il existe, pour les neu-



rochirurgiens, un "Atlas du cerveau", publié par Talairach dans les années 50. Mais les planches de papier constituant cet atlas ne sont pas suffisamment précises. Grâce à l'informatisation de cet ouvrage de référence et à l'ajout de nouvelles données, Didier Lemoine participe à la mise en place d'un atlas anatomique tri-dimensionnel, dans le cadre du projet de recherche Atlas, mené par Christian Barillot (chercheur CNRS) et Bernard Gibaud (chercheur INSERM) au sein du laboratoire SIM, partenaire du CERIUUM.

En 20 ans, de nombreuses techniques d'imagerie médicale sont apparues, complémentaires les unes des autres. Le traitement mathématique permet de synthétiser les informations provenant de ces différentes techniques.

La numérisation ouvre la voie à de nouvelles perspectives, comme la transmission des images d'un médecin à l'autre, via un réseau de télécommunications... L'atlas du cerveau se retrouve ainsi au cœur d'un ensemble d'outils d'aide à la décision, cette dernière restant toujours sous la responsabilité du médecin ou du neurochirurgien.

### De matrices en logique floue

Pour Emmanuel Cordonnier, directeur scientifique du CERIUUM *"les mathématiques sont des outils au service des différentes disciplines scientifiques."* A chaque point réel sur une image IRM (image par

La théorie des systèmes dynamiques permet, par exemple, d'étudier la stabilité du système solaire : l'attraction des planètes les unes sur les autres introduit de légères perturbations dans les orbites elliptiques que décrivent ces planètes autour du soleil. Ces perturbations sont-elles suffisantes pour, à la longue, éjecter une planète du système ou, au contraire, la faire tomber dans le Soleil ?

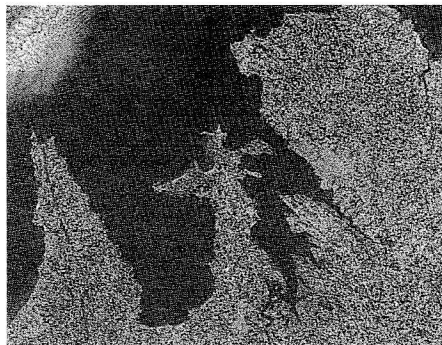


résonance magnétique) du cerveau d'un patient, doit correspondre un point de l'image obtenue par scanner sur le même patient, la correspondance entre les deux se calculant à l'aide d'une matrice tri-dimensionnelles, c'est-à-dire composée de trois lignes et de trois colonnes : c'est une transformation "rigide".

L'atlas numérique du cerveau doit pouvoir être utilisé dans tous les cas. Or, chaque cerveau est unique : il faut donc, dans cet atlas, prendre en compte un positionnement dit "flou" des différentes coordonnées, de manière à pouvoir y superposer n'importe quel cerveau : il faut alors faire appel à une transformation "élastique".

Une autre technique importante en imagerie médicale est la morphologie mathématique : à partir d'une forme aux contours complexes, l'alternance d'érosion et de dilatation des différents points de l'image produit une forme mieux définie. Cela permet, au choix, d'éliminer le "bruit" lié à l'instrument, ou de mettre en valeur les détails.

Mais les mathématiques ne sont là que pour assister le neurochirurgien. Lui seul pourra, au cas par cas, évaluer la morphologie du cerveau de son patient : cette morphologie peut être fortement modifiée par une tumeur cérébrale ou toute autre contusion.



Actuellement, seule la méthode fractale permet de décrire la complexité d'un littoral rocheux. Le découpage des côtes finistériennes est, à ce titre, un bon exemple de figure fractale.

## Des moyens importants

*"Prenons l'exemple d'une structure cérébrale stratégique, comme le sillon de Rolando, une région périphérique du cerveau qui délimite deux zones fonctionnelles majeures", explique Didier Lemoine. Grâce à l'atlas numérique, le neurochirurgien pourra situer approximativement cette structure, malgré la complexité de l'organisation tri-dimensionnelle des sillons. Une autre utilisation de la modélisation numérique sera le pilotage de l'appareil de radiothérapie, pour le traitement des tumeurs cérébrales.*

Matrices, probabilités, calcul numérique, logique floue, ... comment ne pas évoquer aussi le calcul fractal? Lui seul permet d'appréhender la rugosité d'une surface naturelle, l'intensité d'un relief, la forme des circonvolutions cérébrales. *"Tout ceci paraît complexe, mais le domaine de l'imagerie médicale bénéficie d'importants moyens de calcul", souligne Emmanuel Cordonnier, qui fait remarquer que si l'imagerie médicale utilise les mathématiques, elle les fait aussi progresser, en leur soumettant des problèmes pertinents. L'imagerie médicale et les mathématiques font bon ménage!*

## Les mathématiques de l'optimisation et de la décision

Ce domaine, constitué d'un véritable arsenal de modèles et de techniques, a la particularité de résoudre des problèmes concrets du monde économique industriel...

Ali Ridha Mahjoub, professeur à l'université de Bretagne occidentale est responsable du laboratoire "Systèmes de production et optimisation", une composante de la jeune équipe Informatique de l'UBO qui a de nombreux axes de recherche ayant trait aux mathématiques de l'optimisation et de la décision.

Qu'entend-on par optimisation? *"Il s'agit d'un ensemble vaste de modèles et de techniques, qui permet de déterminer la meilleure solution pour un problème concret, et par conséquent de faciliter la prise de*

*décision*", définit Ali Ridha Mahjoub. Ces méthodes sont utiles dans beaucoup de domaines : l'industrie, la finance, les services, les transports, la médecine, la biologie, la physique, les télécommunications... En d'autres termes, elles concernent autant, pour des raisons de coût et de profit, la production de biens de consommation que la réalisation d'un réseau de télécommunications. Au laboratoire SPO, elles interviennent dans la résolution de plusieurs problèmes comme le calcul de l'énergie minimale en physique statistique, dans un modèle de "verre de spins", un phénomène magnétique d'une grande complexité, que nous ne développerons pas ici.

### Le voyageur de commerce

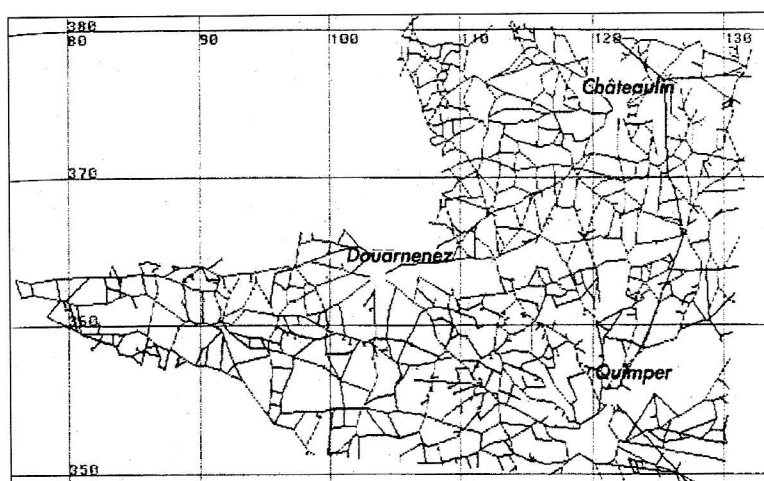
Pour parler de l'optimisation, il faut d'abord faire la part entre deux champs totalement différents l'un de l'autre : l'optimisation "discrète", mettant en oeuvre des variables entières (1, 2, -1, etc) et l'optimisation "continue", qui traite de problèmes dont la solution cherchée peut être représentée par des variables réelles telles que 0,1 ; 3,18 ;  $\pi$ ...

Les travaux de Ali Ridha Mahjoub et de Jean Pierre Barthélémy portent sur l'optimisation discrète, une discipline se situant à l'intersection des mathématiques appliquées et de l'informatique.

*"Actuellement, nous nous intéressons beaucoup à la conception de réseaux de télécommunications... Il faut mettre en place des réseaux fiables, qui continuent à fonctionner en cas de panne. Il faut prendre en compte certaines contraintes, telles que le coût des liaisons et des centres de transmission. Chaque type de réseau est caractérisé par un ensemble de paramètres. Notre objectif est de développer des modèles et des techniques qui permettent de résoudre efficacement ces problèmes et d'élargir davantage l'ensemble des situations réelles auxquelles ces techniques peuvent être appliquées".*

Une des branches de l'optimisation discrète est l'optimisation combinatoire, dont les problèmes se formulent en termes de graphes (des points reliés par des traits). Il existe dans ce domaine un problème très connu : un voyageur de commerce ayant un certain nombre de villes à visiter, désire établir entre ces villes, une tournée qui soit de longueur minimale.

Le nombre de tournées possibles entre  $n$  villes est de l'ordre de factorielle  $n$  (s'écrit  $n!$ ). *Pour 100 villes, le nombre "factorielle 100" ( $100! = 100 \times 99 \times 98 \dots$ ) dépasse le nombre d'atomes de l'univers. "pour calculer la meilleure solution de cet ensemble, le plus puissant ordinateur mettrait des dizaines d'années. Le but est donc de développer une technique qui soit applicable dans un délai raisonnable."* □



◀ Voici un exemple d'application des mathématiques de l'optimisation. Cette carte de la région de Châteaulin et du Cap Sizun, dans le Sud Finistère, est celle des itinéraires de collecte du lait, calculés à l'aide d'un logiciel d'optimisation. Le résultat est un gain d'environ 10%, à la fois en temps et en distance parcourue.