L'étrange théorème de Mr MORLEY

Maxime Cunin, Tours

Les lignes qui suivent ne sont que la narration des efforts d'un non-mathématicien dilettante qui s'est abandonné à cette bizarre passion de "l'amour-haine" pour un théorême insolite qui, semble-t-il, fait actuellement l'objet de bien des commentaires. Je ne sais s'il convient de remercier l'ami qui me l'a soumis - non peut-être sans arrière-pensée - mais je le ferai quand même pour le laborieux plaisir que j'en ai tiré. Et j'y associerai les mathématiciens qui ont bien voulu valider mes résultats et, surtout, les maîtres qui m'ont initié à la géométrie il y a de cela ... quelque soixante ans ...

Dans un célèbre chapitre de son ouvrage : Le rationalisme appliqué, le philosophe Gaston Bachelard commentant les réflexions du mathématicien Georges Bouligand, s'interroge sur la raison profonde qui fait du théorème de Pythagore, une vérité première, ce qu'il nomme sa pythagoricité.

Après avoir souligné que l'utilisation du carré pour en illustrer la démonstration n'est qu'un cas particulier, que tout polygone régulier ferait aussi bien l'affaire et même n'importe quelle figure pour autant que les deux autres soient semblables, il conclut que la similitude est le facteur causal de cette propriété du triangle rectangle. Dès lors, si la forme de la figure choisie est indifférente, la pythagoricité réside dans la nature profonde du triangle rectangle lui-mème.

Devant la figure au maximum dépouillée (figure 1), il écrit:

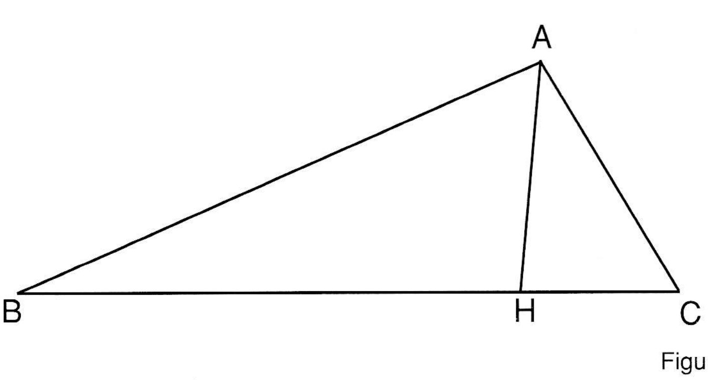


Figure 1

"Prenons donc un triangle rectangle quelconque. Coupons-le par la hauteur issue du sommet de l'angle droit. Nous avons ainsi construit, en dedans, deux triangles rectangles semblables au triangle donné. Le triangle construit sur l'hypoténuse peut aussi bien ètre construit "en dedans". Il se superpose alors au triangle matrice. La conclusion est évidente: la somme des deux parties ABH et AHC est égale au triangle ABC. La démonstration n'a besoin d'aucun artifice."

Le philosophe clôt ainsi son chapitre: *"Il semble que le professeur de mathématiques puisse dire à son disciple:*
Coupe le triangle rectangle en deux et médite. Tu tiens une vérité première, une beauté rationnelle première. Elle éclairera toute ta vie de géomètre. Elle t'apprendra à aller à l'essentiel ...Georges Bouligand, en suscitant en toi le rationalisme éveillé, t'a appris à penser comme un dieu géomètre, à travailler sans rien faire".

Le lecteur voudra bien excuser ce long préambule : il ne m'a pas semblé inutile avant d'aborder quelques réflexions sur la question qui nous occupe ici: la résolution du théorème de Morley (figure 2).

Tout amateur qui aborde pour la première fois, sans informations préalables, sans idées préconçues et en toute naïveté le théorème de Morley, éprouve d'entrée un étrange sentiment né du rapprochement de la belle simplicité de la proposition et de la présence d'êtres mathématiques rares en géométrie élémentaire : les trisectrices, dont on sait qu'elles ont fait pâlir des générations de géomètres à la recherche de la fameuse trisection de l'angle.

La première difficulté est le tracé d'une figure exacte, à quoi s'ajoute la complexité due au nombre considérable d'angles qu'elle propose ; car on reconnait vite qu'il n'y a pas de solution à espérer du côté des longueurs.

La recherche s'organise donc autour de la définition du triangle équilatéral (trois côtés égaux) et de sa propriété d'avoir trois angles égaux à 60°.

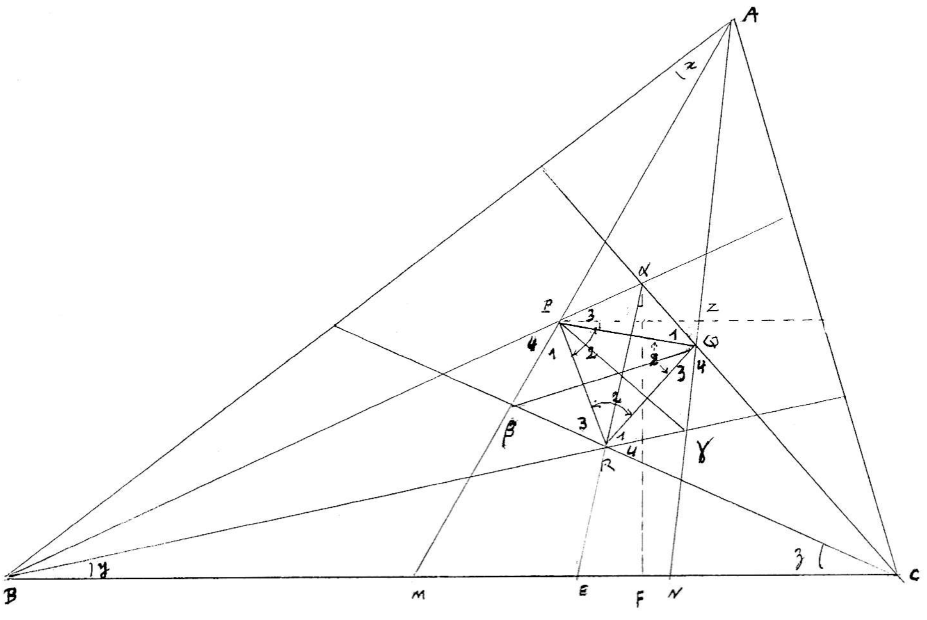


Figure 2

La première piste qui de présente sera alors de montrer que chaque angle du triangle PQR a pour mesure $1/3\widehat{A} + 1/3\widehat{B} + 1/3\widehat{C}$. Belle illusion qui conduit (si l'on ne s'embrouille pas) à tracer des quantités de lignes et d'arcs capables ou à couvrir des pages de calculs peu fructueux.

Au bout de cette longue traque les choses peuvent devenir un peu plus claires si l'on ne met pas trop longtemps à faire les deux constatations suivantes : d'une part, la droite αR est bissectrice de l'angle BαC et qu'il en est de mème de βQ pour l'angle AβC et de γP pour l'angle AγB; d'autre part que tout raisonnement conduit dans le triangle BαC est transposable dans AβC et dans AγB : avec des bissectrices, on est en pays de connaissance...

Il faudra encore pas mal d'heures de travail et d'efforts stériles avant d'épurer encore la figure et de tenter d'y voir un peu plus clair. Une remarque, mais qu'il faut attendre longtemps, permet enfin le pas décisif : dans un triangle équilatéral, les bissectrices des angles sont à la fois hauteurs et médiatrices.
Si le théorème de Morley est exact (ce dont on n'oserait douter!) PR étant égal à QR, le point R est nécessairement sur la médiatrice de PQ, c'est-à-dire sur la perpendiculaire à PQ en son milieu ; la démonstration de cette hypothèse suffirait à prouver que PQR est équilatéral, car le même raisonnement appliqué à chacune des bissectrices conduirait à la conclusion que les côtés PR, RQ et QP sont égaux deux à deux.

Une première tentative consiste à prolonger αR jusqu'à son intersection E avec BC puis à abaisser la perpendiculaire αF sur BC.

En posant : $x = B\widehat{A}C/3$, $y = A\widehat{B}C/3$ et $z = A\widehat{C}B/3$, on démontre aisément que l'angle EαF mesure (z - y).

Traçons maintenant la droite PZ parallèle à BC; elle est perpendiculaire sur αF. Si l'on démontre l'égalité des angles ZPQ et EαF, le problème est résolu.

Pour ce qui me concerne, cette piste ne m'a conduit qu'à m'enfermer dans un cercle vicieux ; il me semble bien que cette égalité est une conséquence de l'orthogonalité de αR et PQ.

Quelques jours encore de réflexion et une démonstration finalement très simple apparaît, en partant de l'hypothèse que l'angle formé par αR et PQ est nécessairement droit. On la trouvera ci-joint.

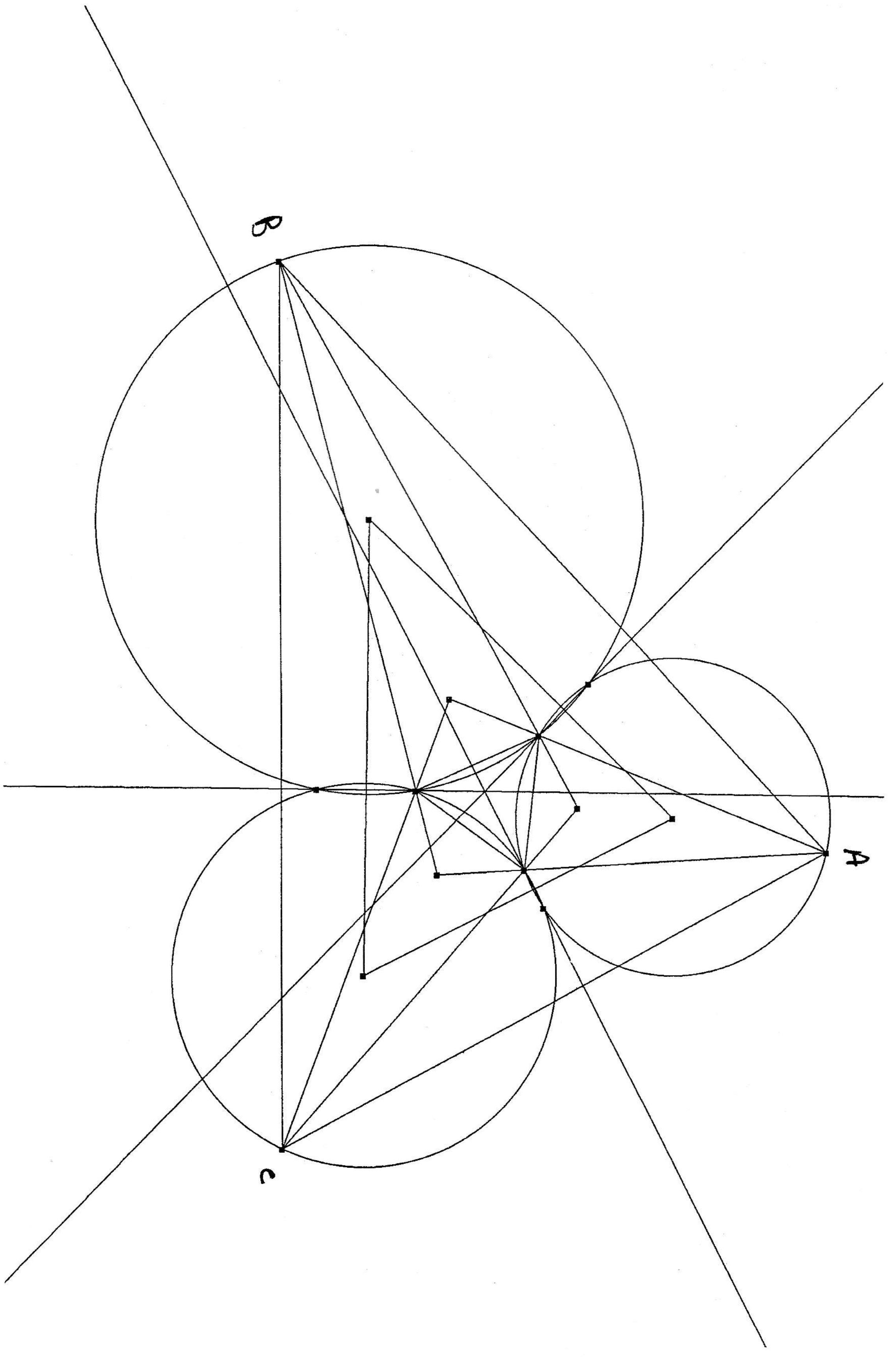
Commentaire :

On comprend mieux ce qui se passe en considérant les angles.

Chaque bissectrice étant perpendiculaire sur le côté qui lui est opposé, les triangles αPQ, βPR et γQR sont isocèles.

Leurs angles à la base sont égaux:
P_3 = Q1 = (60° - x),
Q_3 = R1 = (60° - z) et
R_3 = P1 = (60° - y).

Figure 3



D'autre part,
$Q_4 = (x + z)$ ou $(60° - y)$,
$R_4 = (y + z)$ ou $(60° - x)$ et
$P_4 = (x + y)$ ou $(60° - z)$.

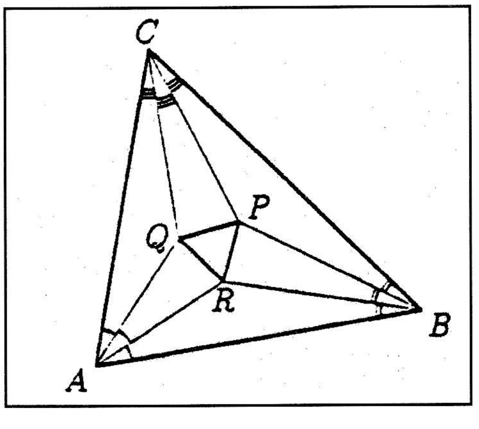
Dressons le tableau suivant :
$P_3 = Q_1 = R_4 = 60° - x$
$P_1 = Q_4 = R_3 = 60° - y$
$P_4 = Q_3 = R_1 = 60° - z$

d'où
$P_3 + P_1 + P_4 = 180° - 60° = 120°$
et $P_2 = 60°$
$Q_1 + Q_4 + Q_3 = 180° - 60° = 120°$
et $Q_2 = 60°$
$R_4 + R_3 + R_1 = 180° - 60° = 120\pi$
et $R_2 = 60°$.

On constate qu'autour de chaque point P,Q,R et à l'intérieur du polygone $\alpha P\beta R\gamma Q$, on a: $180° = (60° - x) + (60° - y) + (60° - z)$ + l'angle correspondant de PQR qui vaut donc $(x + y + z)$ soit $60°$.

On peut donc dire que l'équilatéralité de PQR est due à l'orthogonalité de chaque bissectrice sur le côté qu'elle coupe.

Morley Frank né à Woodbridge (Suffolk, Grande-Bretagne) 1860 - 1937



Le mathématicien Frank Morley, professeur à l'université de Baltimore, est spécialiste de géométrie. Il reste célèbre pour avoir découvert en 1899 le théorème de géométrie élémentaire qui porte son nom. Il lance alors un défi au monde mathématique pour en trouver les meilleures démonstrations. Ce n'est que dix ans plus tard que Satyanarayama en publie une solution trigonométrique, et que Naraniengar en donne une preuve élémentaire.
Le fils de Frank Morley, Christofer (1890-1957), est un romancier célèbre outre-Atlantique.

Le théorème de Morley

Les intersections deux à deux des couples de demi-droites qui divisent les angles du triangles ABC en trois angles égaux déterminent un triangle équilatéral PQR appelé *triangle de Morley* du triangle ABC.❑

Extrait de "des mathématiciens de A à Z"
Hauchecorne & Suratteau. Ellipses 1996.

Le défi de Morley

A tous les géomètres et aux
autres mathématiciens

Dessinez d'abord un triangle
Que vous appelez ABC
Puis de chaque sommet, tracez
Les trisectrices des 3 angles ;
Les adjacentes aux côtés,
Se rencontrent en PQR,
Formant, par extraordinaire,
Dans le triangle précité
Un triangle ... équilatéral !

Je l'ai démontré, non sans mal
Mais qui pourra me conforter
En me montant de façon claire
Par une preuve élémentaire
Que je suis dans la vérité ,

Franck Morley
(P.C.C M. Cunin)