Newton, c'est pas seulement la pomme !

Françoise LEDOUX, M.CADIEU - Tours

P.A.E. réalisé au lycée Grandmont, Tours, avec un Terminale Littéraire et une Terminale Technique

Pouquoi ce P.A.E. ?

Nous avions trois types d'objectifs :
- *culturels* : réaliser une exposition pour faire découvrir à la communauté scolaire le savant et ses travaux replacés dans le contexte scientifique et philosophique de l'époque
- *pluridisciplinaires* : mettre en relation plusieurs disciplines (maths, philo, sciences physiques, construction mécanique et atelier)
- *socio-pédagogiques* : faire travailler ensemble des élèves de deux sections bien différenciées.

Comment travailler?

A partir de textes originaux de Newton et à plusieurs reprises dans l'année. Trois grands thèmes ont été étudiés. Ils ont permis de rester dans le cadre du programme (en terminale ne l'oublions pas !) en donnant cependant une vision plus large des maths. Les deux premiers ont donné lieu à des travaux de groupes, les deux classes étant mélangées. Le troisième a fait l'objet d'une recherche individuelle.

1er thème : Newton et le Calcul (infinitésimal)

Avant d'aborder la fiche avec les élèves les profs de maths ont fait un exposé pour situer l'oeuvre de Newton dans la connaissance de l'époque en maths et en astronomie.

La méthode des fluxions (extrait page 30 + fiche) : Le déchiffrage du texte a été laborieux et a nécessité de notre part nombreux commentaires et diverse formulations. En revanche les calculs n'ont présenté aucune difficulté. Cette fiche a eu pour suite l'étude de la courbe d'équation

$$x^3-ax^2+axy-y^3 = 0$$

sous la forme d'un devoir en temps libre. Ce fut pour les élèves(littéraires surtout) l'occasion de rencontrer une ellipse.

Devoir : On pourrait même étudier les variations de f et g en C ou D ...

2ème thème : Recherche d'une solution approchée d'une équation

L'étude détaillée d'un seconde texte original justifie la méthode connue sous le

*Si de **NEWTON** vous ne connaissez que la pomme....*

nom de “méthode Newton” et a donné l’occasion d’utiliser les calculatrices programmables. Cela a permis aux élèves de fournir un travail approfondi et qui nous a paru profitable. Cette fiche nous semble directement utilisables dans la plupart des classes de 1° ou Terminale.

3ème thème : Newton et le nombre π

Il s'agissait de calculer une aire à partir de la géométrie (ce qui n'est pas inutile), de voir ou revoir la formule du binôme et d'approcher les méthodes de découverte utilisées au XVIIème siècle.

Les autres activités

D’autres activités ont eu lieu : conférence sur Newton par un spécialiste d’histoire des sciences, recherches sur les travaux de Newton en physique... et surtout construction à l’atelier par les terminale F1 (avec leur professeur) de la BRACHISTOCHROME.

Cette réalisation illustre le problème posé par J.Bernoulli et résolu par Newton : “soit deux points A et B, trouvez la courbe telle que le trajet d’une bille suivant cette courbe soit le plus court possible en temps?”

La solution est une demi-cycloïde (bien sûr !). La forme a été usinée en machine outil à commande numérique à partir des équations de la cycloïde. Pour concrétiser la propriété caractéristique de la Brachistochrome, les élèves de F1 (et leur professeur) ont construit le dispositif expérimental et ça marche!

Représentée assise sur une planète, la déesse grecque Artémis tient ici le protrait de Newton. Newton, fondateur de la science moderne, s’interessera également à l’astrologie, à l’alchimie, à la théologie occulte et non conventionnelle

L’exposition

L’exposition a eu lieu au lycée. La plupart des panneaux (mais pas tous hélas!) ont été une synthèse des travaux faits dans le courant de l’année par les élèves. Titre des panneaux : 1642 (devinez pourquoi?), la vie d’Issac Newton, les maths, l’astronomie, l’optique, la mécanique, la philo, Newton vu par ... (des artistes à différentes époques), l’histoire de la brachistochrone.

Pour animer l’exposition, diverses manipulations l’ont accompagnée : le tube de Newton, la synthèse de la lumière et sa décomposition par le prisme, le disque de Newton et la brachistochone.

Bilan

Plus de trente classes du lycée ont visité l’exposition. Des élèves sont venus individuellement en dehors de leur heures de cours ainsi que des parents et de nombreux professeurs et personnels de labo. La durée de l’exposition a été trop brève pour que toutes les demandes de visite aient pu être satisfaites.

Les classes concernées par le P.A.E. étaient deux classes de Terminale dont l’objectif prioritaire, et légitime, est la préparation du baccalauréat. C’est pourquoi les élèves ont été assez passifs pendant une partie de l’année. La participation du plus grand nombre n’a été effective que dans la mesure où les travaux avaient lieu pendant les heures de cours, quelques élèves ont cependant effectué des recherches intéressantes.

Les apports réciproques des deux classes ont été décevants. Bien qu’ayant travaillé ensemble, en maths par exemple, et assisté en commun à une conférence sur Newton, les deux classes sont restées très différenciées et les réalisations spécifiques aux sections. La proximité de l’examen ne nous a pas permis d’approfondir ce problème comme nous l’aurions souhaité.

En conclusion, nous avons constaté qu’il était difficile d’entreprendre un tel travail avec des classes de Terminale. Pourtant le sujet étudié, d’une part était des programmes pour certaines disciplines et d’autre part permettait à tous les élèves une réflexion sur l’histoire des sciences.

Les animateurs ont cependant trouvé cette expérience enrichissante.

Devoir : Newton et le calcul

Ce calcul (ou calcul infinitésimal ou calcul différentiel et intégral) est exposé dans un ouvrage intitulé :

"Methodus fluxionum et serieirum infiiinitorum"

Ce manuscrit latin commencé en 1664 fut publié quelques années plus tard en anglais.

Les textes ci-joints sont extraits d'une traduction française faite en 1740 par Buffon.

I - Etude de l'extrait de la Méthode des Fluxions

1° Lire et commenter les articles LV, LVI, LVII, LX et LXI

2° Voir le problème I proposé par Newton, la solution indiquée et la démonstration de cette solution.
Refaire les calculs des articles XVI et XVII

3° Soit la courbe d'équation

$8x^3 - 7x^2 + 5 - y = 0$

En utilisant la méthode des fluxions, calculer $\frac{y}{z}$.

Commenter le résultat obtenu.
Même question, en considérant la courbe d'équation $y^2 - x = 0$

4° Formuler en langage actuel les notions de FLUXIONS et FLUENTES

II - Précisions et précautions de Newton dans ses différents travaux

Newton a exposé sa conception du Calcul dans de nombreux écrits, en essayant de préciser le mieux possible sa pensée.

- En ce qui concerne le temps voilà ce qu'il cite dans sa méthode des Fluxions:
- Dans des lettres adressées à J.Wallis en 1692, il écrit :

(Cum autem temporis nullam habeamus aestimationem nisi quatenus id per aequabilem motum localem exponitur et mensuratur, et praeterea cum quantitates ejusdem tantum generis inter se conferri possint et earum incrementi et decrementi celeritates inter se, eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed e propositis quantitatibus quae sunt ejusdem generis aliquam aequabili fluxione augeri fingam cui caetera tanquam tempori referantur adeoque cui nomen temporis analogice tribui mereatur.)

Enfin ces mêmes notions sont reprises dans l'ouvrage célèbre consacré au Système du monde dont la première édition en langue latine fut publiée en 1687 sous le titre :

"De philosophia naturalis principia mathematica"

Dans la section I du livre I intitulée "La méthode des premières et dernières raisons" Newton écrit :

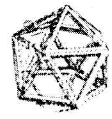
"Data aequatione fluentes quotcunque quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa. Per fluentes quantitates intelligit indeterminatas id est quae in generatione Curvarum per motum localem perpetuo augentur vel diminuuntur, et per earum fluxionem intelligit celeritatem incrementi vel decrementi"

"Il faut entendre par la dernière raison des quantités évanouissantes la raison qu'ont entre elles des quantités qui diminuent non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies mais au moment même où elles s'évanouissent".

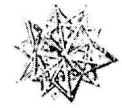
Dans la même partie de l'ouvrage, on peut extraire les passages suivants (Principia, édition anglaise)

« By ultimate velocity I understand that with which the body is moved, neither before it arrives at the ultimate position and the motion ceases, nor thereafter, but just when it arrives ; that is, that very velocity with which the body arrives at the ultimate position and with which the motion ceases. And similary for the motion of evanescent quantities is to be understood the ratio of quantities, not before they vanish, nor thereafter, but with which they vanish ».

« Ultimate ratios in which quantities vanish are not, strictly speaking, ratios of ultimate quantities, but limits to which the ratios of these quantities, decreasing without limit, approach, and which, though they can come nearer than any difference whatever, they can neither pass over nor attain before the quantities have diminished indefinitely » (Principia, édition anglaise).



Quelles sont les notions sous-jacentes à ces précisions apportées par Newton?



"Nous ne pouvons cependant avoir aucune estimation du temps excepté en tant qu'il a été exprimé et mesuré par un mouvement local uniforme, et d'ailleurs, uniquement par des quantités de même sorte, ainsi leurs vitesses d'augmentation et de diminution peuvent aussi être comparées entre elles. Pour ces raisons, dans ce qui suit, je ne m'occuperai pas du temps, considéré ainsi formellement, mais, à partir de quantités proposées qui sont de même sorte, je supposerai que l'une d'elles augmente de façon uniforme : toutes les autres peuvent alors lui être référées comme si le temps existait, et ainsi, le nom de "temps" peut convenir et lui être conféré".

"Etant donné une équation comportant un nombre quelconque de "fluentes" trouver les "fluxions" et vice-versa. Il faut entendre par fluentes des quantités qui sont augmentées ou diminuées uniformément par le mouvement local dans la génération des Courbes et entendre par fluxions la vitesse de leur augmentation ou de leur diminution".

Issac Newton, très grand chef d'école resté simple

Fiche d'activité

Recherche d'une solution approchée d'une équation - Méthode de Newton

A) Extrait de la "Méthode des fluxions" (XX et XXI)

Dans ces articles Newton expose une méthode permettant d'approcher une racine de l'équation : $y^3 - 2y - 5 = 0$

Pour en revenir aux notations actuelles, on désignera par f la fonction définie sur A par $f(x) = x^3 - 2x - 5$ et par (C) sa courbe représentative.

1) Newton affirme dans les trois premières lignes de l'article XX que l'équation $f(x) = 0$ a une solution $\propto$ comprise entre 2 et 2,1.
Démontrer cette affirmation.

2) Newton donne une méthode pour trouver une meilleure approximation de $\propto$. Ses calculs, qui peuvent être continués *"aussi longtemps qu'il convient"* (dernière ligne du XX) les conduisent à donner 2,09455148 comme valeur approcher de $\propto$ (2 dernières lignes du XXI). Nous allons étudier ses calculs.

a) Calcul de p (lignes 3 à 7 du XX)

Newton pose $x = 2 + p$ et calcule $f(2 + p) = g(p)$. En négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 2, la résolution de $f(2 + p) = 0$ donne $p = 0,1$

- Ecrire g(p)
- Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse 2 et fo la fonction affine représentée par (T_0).
- En posant $x = 2 + p$, vérifier que Newton détermine p en remplaçant la résolution de $f(x) = 0$ par $f_0(x) = 0$

Autrement dit Newton, pour x voisin de 2, prend la fonction affine fo pour approximent.

b) Calcul de q (lignes 7 à 16 du XX)

Newton pose $p = 0,1 + q$ et calcule $f(2 + 0,1 + q) = g(q + 0,1) = h(q)$.
En négligeant les termes de degré supérieur

ou égal à 2 la résolution de h(q) = 0 donne q environ égal à -0,0054.

- Ecrire h(q)
- Déterminer une équation de la tangente (T_1) à (C) au point d'abscisse 2,1 et f_1 la fonction affine représentée par (T_1)
- En posant x = 2,1 + q vérifier que Newton détermine q en remplaçant la résolution de f(x) = 0 par $f_1(x) = 0$

Autrement dit Newton, pour x voisin de 2,1 prend la fonction f, pour approximer f

c) Calcul de r

Newton pose q = -0,0054 + r et procède comme pour p et q...

Toutes ces remarques ont permis à Raphson en 1690 et Thomas Simpson en 1740 de modifier la méthode exposée par Newton.

B) Méthode d'approximation sous sa forme actuelle

Sachant que l'équation f(x) = 0 a un racine $\propto$ comprise entre a et b, il s'agit de donner une valeur approchée de $\propto$.

1) soit (C) la courbe représentative de f
Soit M_0 le point de (C)d'abscisse $x_0 = a$ et (T_0) la tangente en M_0 à (C). (T_0) coupe l'axe $(0,\vec{i})$ au point d'abscisse x_1.
Soit M_1 le point de (C)d'abscisse x_1 et (T_1) la tangente en M_1 à (C). (T_1) coupe l'axe $(0,\vec{i})$ au point d'abscisse x_2.
Soit M_2 le point de (C)d'abscisse x_2 et (T_2) la tangente en M_2 à (C). (T_2) coupe l'axe $(0,\vec{i})$ au point d'abscisse x_3.
etc...

Effectuer les constructions et observer sur la figure que les abscisses x_0, x_1, x_2, ... sont de plus en plus proches de $\propto$.

2) Soit A le point d'abscisse a de (C)

- Déterminer une équation de la tangente (T) en A à (C)
- Montrer que l'abscisse du point d'intersection de (T) et de l'axe (o,i) est

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = l(a)$$

On peut calculer de la même façon $x_2 = l(x_1)$, $x_3 = l(x_2)$, ...

La suite des nombres x_1, x_2, x_3, ... converge en général vers $\propto$

3) Soit $f(x) = x^3 - 2x - 5$

- Déterminer la fonction l
- A l'aide de votre calculatrice programmable, déterminez la suite des valeurs a = 2, $x_1 = l(2)$, $x_2 = l(x_1)$, ... et retrouver la valeur approchée donnée par Newton.

C) Application

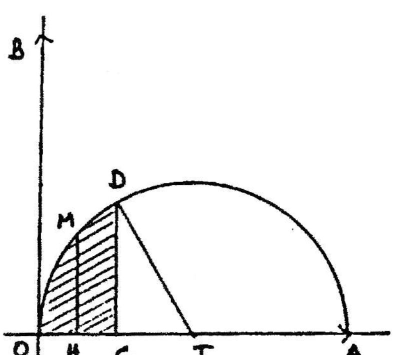
- Utiliser la méthode de Newton (actualisée!) pour résoudre les équations suivantes:

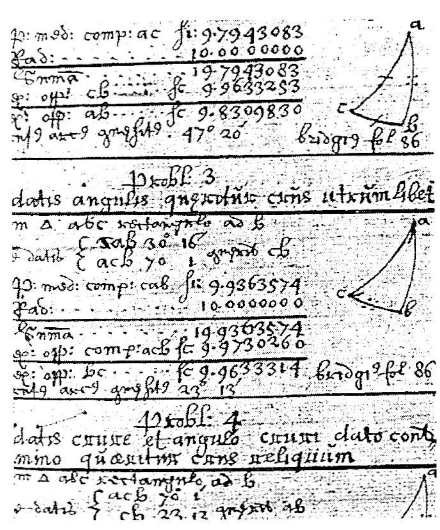
1) $x^5 + 5x + 2 = 0$
2) $x^3 - x - 1 = 0$
3) $x - \cos x = 0$
4) $x + \ln x = 0$

On donnera des valeurs approchées des solutions à 10^{-5} près.

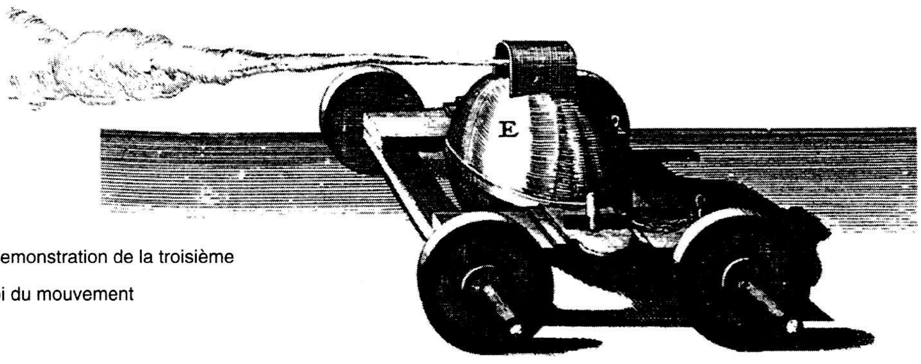
Newton et le nombre π

En utilisant deux méthodes différentes pour calculer l'aire d'une portion de disque - domaine hachuré de la figure ci-dessous - Newton obtient une valeur approchée de π.





Manuscrit d'un livre de Newton sur la trigonométrie



Demonstration de la troisième loi du mouvement

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{OA},\vec{OB})$

I est le centre du demi cercle de diamètre [OA]

D est le point de ce demi-cercle d'abscisse1/4, C est la projection orthogonale de D sur $(O,\vec{OA})$

(E) désigne le domaine hachuré.

A - Méthode géométrique

a) Montrer que le triangle OID est équilatéral. En déduire une mesure de l'angle OID et l'aire du secteur COI.

b) Calculer CD et en déduire l'aire du triangle CDI.

c) Montrer que l'aire A1 de (E) est :

$$A_1 = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$$

B - Méthode d'intégration

a) M étant un point de demi-cercle d'abscisse $x (0 \leq x \leq 1/4)$

b) En déduire que l'aire (A_2) de (E) est:

$$A_2 = \int_0^{1/4} x^{1/2}(1-x)^{1/2}dx$$

c) Soit f la fonction définie sur [0,1/4] par $f(x)=x^{1/2}(1-x)^{1/2}$

Pour trouver une primitive F de f sur [0,1/4], Newton étend la formule du binôme aux exposants rationnels.

1°) En utilisant cette formule pour n entier naturel non nul, donner le développement de $(1-x)^n$.

2°) Vérifier en prenant n=1/2 que $(1-x)^{1/2}$ peut s'écrire :

$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 - \frac{1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^4 - \ldots$$

ce développement pouvant être poursuivi aussi loin que l'on veut.

3°) En déduire le début du développement de f(x). En intégrant terme à terme on obtient un développement de F(x). Ecrire les premiers termes de celui-ci.

4°) Montrer alors que :

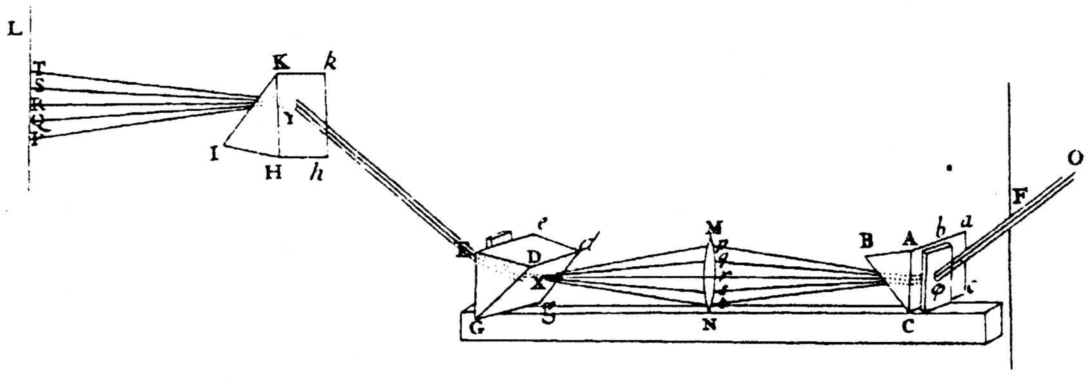
$$A_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)3 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)5 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)7$$

$$- \frac{3}{4.6}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)9 - \frac{3.5}{4.6.8}\cdot\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)11 \ldots$$

C - Calcul de π

Puisque $A_1 = A_2$, $\quad \pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32} + A_2\right)$

On peut trouver une valeur approchée de π, à partir de cette formule. La valeur approchée sera d'autant plus pré-



cise que le nombre des termes de A_2 est grand.

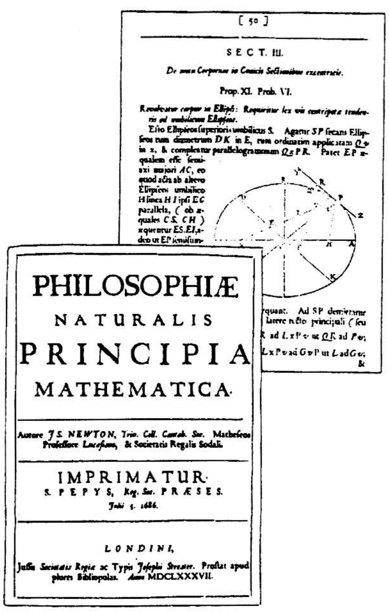
1°) En calculant les cinq premiers termes de A_2, donner une valeur approchée de π.
2°) Voici deux programmes, l'un en BASIC, l'autre utilisable sur une CASIO FX 180, permettant d'actualiser la méthode et d'aller plus loin dans la détermination des décimales de π. ❑

```
BASIC

10 S= √3/32 + 1/12 - 1/160
20 I=7: N=4: J=1: K=1: P=4
30 A= - K/P * 0.5 ^ I/I
40 S= S+A: T= 24 * S
50 PRINT I, T
60 I= I+ 2: J= J+2 : K= K*J
70 N= N+2: P= P*N
80 GO TO 30
```

```
CASIO FX 180

2 Kin + 1
Kout2 / Kout3 * 0.5 x^y Kout1 / Kout1 = Kin -4
Kout4 * 24 = HLT
2 Kin + 5
Kout2 * Kout5 = Kin2
2 Kin + 6
Kout3 * Kout6 = Kin3
RTN
          avant de débuter   5 Kin1 ; 1 Kin2 ; 4 Kin3 ;
                            √3/32 + 1/12 -1/160 = Kin 4 ;
                             1 Kin 5 ; 4 Kin 6
```


[50]

SECT. III.

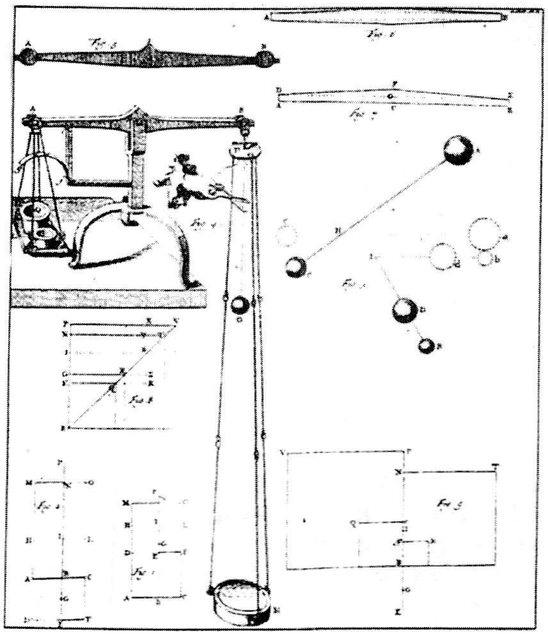
PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 .
Glorieux Archimède, artiste ingénieux,
8 9 7 9
Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,
3 2 3 8 4 6 2 6
Soit ton nom conservé par de savants grimoires !
4 3 3 8 3 2 7 9



Dans cette expérience effectuée en Hollande, on utilisait des règles graduées pour tester les prédictions concernant la chute des corps

METHODE DES FLUXIONS

L V. En voilà tout autant qu'il en faut de dit ſur ces Methodes de calcul, dont je ferai un frequent uſage dans la ſuite. Reſte main tenant à donner quelques eſſais de Problêmes, ſur-tout de ceux que nous préſente la nature des Courbes, & cela pour mettre l'Art Analitique dans un plus grand jour. Et d'abord j'obſerverai que toutes leurs difficultés peuvent ſe reduire à ces deux Problêmes ſeulement que je vais propoſer ſur un eſpace décrit par un mouvement local retardé ou acceleré d'une façon quelconque.

LVI. 1. *La longueur de l'Eſpace décrit étant continuellement donnée, trouver la viteſſe du Mouvement à un tems donné quelconque.*
LVII. 2. *La viteſſe du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Eſpace décrit à un tems donné quelconque.*

L X. J'appellerai *Quantités Fluentes*, ou ſimplement *Fluentes* ces Quantités que je conſidere comme augmentées graduellement & indefiniment, je les repréſenterai par les dernieres Lettres de l'Alphabet v, x, y & z pour les diſtinguer des autres quantites qui dans les Equations ſont conſiderées comme connuës & déterminées qu'on repréſente par les Lettres initiales a, b, c, &c. & je repréſenterai par les mêmes dernieres Lettres ſurmontées d'un point $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ & $\dot{z}$ les viteſſes dont les Fluentes ſont augmentées par le mouvement qui les produit, & que par conſéquent on peut appeller *Fluxions*. Ainſi pour la Viteſſe ou Fluxion de v je mettrai $\dot{v}$, & pour les viteſſes de x, y, z je mettrai $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ reſpectivement.

LXI. Ces choſes étant ainſi prépoſées, je vais entrer en matiere & donner d'abord la ſolution des deux Problêmes que je viens de propoſer.

METHODE

PROBLEME I.

Etant donnée la Relation des Quantités Fluentes, trouver la Relation de leurs Fluxions.

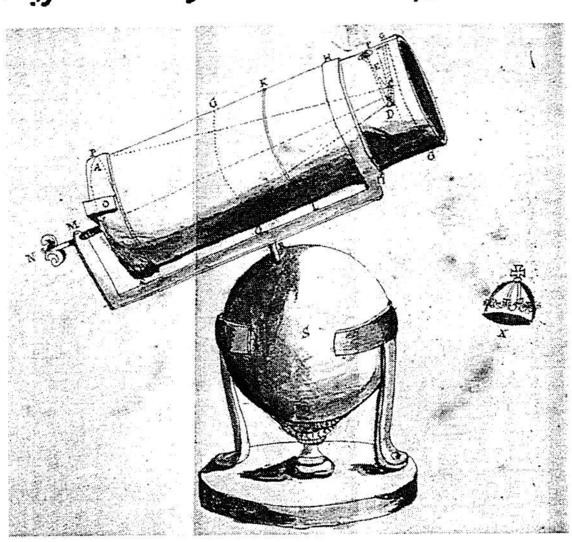
SOLUTION.

I. DISPOSEZ l'Equation par laquelle la Relation donnée eſt exprimée ſuivant les Dimenſions de l'une de ſes Quantités Fluentes x par exemple, & multipliez ſes Termes par une Progreſſion Arithmetique quelconque, & enſuite par $\frac{\dot{x}}{x}$ faites cette Opération ſéparément pour chacune des Quantités Fluentes ; après quoi égalez à zero la ſomme de tous les produits, & vous aurez l'Equation cherchée.

II. EXEMPLE I. Si la Relation des Quantités Fluentes x & y eſt $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, diſpoſez d'abord les Termes ſuivant x, & enſuite ſuivant y, & multipliez-les comme vous voyez.

Multipliez	x^3	$-ax^2$	$+axy - y^3$		$-y^3$	$+axy$	$\begin{matrix}-ax^2\\+x^3\end{matrix}$
par	$\frac{3\dot{x}}{x}$.	$\frac{2\dot{x}}{x}$.	$\frac{\dot{x}}{x}$. 0		$\frac{3\dot{y}}{y}$.	$\frac{\dot{y}}{y}$.	0
Vous aurez	$3\dot{x}x^2$	$-2a\dot{x}x$	$+a\dot{x}y$ *		$-3\dot{y}y^2$	$+a\dot{y}x$	*

la ſomme des produits eſt $3\dot{x}x^2 - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x$, qui étant égalée à zero, donne la Relation des Fluxions $\dot{x}$ & $\dot{y}$; car ſi vous donnez à volonté une valeur à x, l'Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, donnera la valeur de y ; ce qui étant déterminé, l'on aura $x : y :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.



Démonſtration de la Solution.

XIII. Les momens des Quantités Fluentes (c'eſt-à-dire leurs parties indefiniment petites, par l'acceſſion deſquelles, dans des parties indefiniment petites de tems, elles ſont continuellement augmentées) ſont comme les Viteſſes de leur Flux ou Accroiſſement.

XIV. Si donc le produit de la Viteſſe $\dot{x}$ par une Quantité indefiniment petite o, c'eſt-à-dire, ſi $\dot{x}o$ repréſente le moment d'une Quantité quelconque x, les moments des autres v, y, z ſeront repréſentés par $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, parce que $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{x}o$, $\dot{z}o$ ſont chacuns comme $\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{z}$.

XV. Puis donc que les moments comme $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ ſont les acceſſions ou augmentations indefiniment petites des Quantités Fluentes x & y pendant les indefiniment petits intervales de tems, il ſuit que ces Quantités x & y après un intervalle indefiniment petit de tems, deviennent $x + \dot{x}o$ & $y + \dot{y}o$, & par conſéquent l'Equation qui en tout tems exprime également la Relation des Quantités Fluentes, exprimera la Relation entre $x + \dot{x}o$ & $y + \dot{y}o$ tout auſſi-bien qu'entre x & y; ainſi on peut ſubſtituer dans la même Equation $x + \dot{x}o$ & $y + \dot{y}o$, au lieu de x & y.

XVI. Soit donc l'Equation donnée quelconque $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ je ſubſtitue $x + \dot{x}o$ pour x, & $y + \dot{y}o$ pour y, & j'ai

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 & + 3\dot{x}ox^2 & + 3\dot{x}^2oox & + \dot{x}^3o^3 \\ - ax^2 & - 2a\dot{x}ox & - a\dot{x}^2oo & \\ + axy & + a\dot{x}oy & + a\dot{y}ox & + a\dot{x}\dot{y}oo \\ - y^3 & - 3\dot{y}oy^2 & - 3\dot{y}^2ooy & - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0$$

XVII. Maintenant j'ai par la ſuppoſition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, j'efface donc ces Termes dans l'Equation précedente, & ayant diviſé par o tous les Termes qui reſtent, j'aurai $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + 3\dot{x}^2ox - a\dot{x}^2o + a\dot{y}x - 3\dot{y}^2oy + \dot{x}^3o^2 + a\dot{x}\dot{y}o - \dot{y}^3o^2 = 0$. Mais comme o a dû être ſuppoſé infiniment petit, pour pouvoir repréſenter les momens des Quantités, les Termes qu'il multiplie ſont nuls en comparaiſon des autres, je les rejette donc, & il me reſte $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, comme ci-deſſus dans l'Exemple premier.

XVIII. On peut obſerver ici que les Termes qui ne ſont pas multipliés par o s'évanoüiſſent toujours, comme auſſi ceux qui ſont multipliés par o élevé à plus d'une Dimenſion, & que le reſte des Termes étant diviſé par o acquiert la forme qu'il doit avoir par la régle preſcrite ; & c'eſt ce qu'il falloit prouver.