Résolution d'une équation de dimension trois

Henri PLANE, Tours

Les neveux de Descartes ont répandu des jugements tels que *"Descartes a inventé les coordonnées et la géométrie analytique qui permet de résoudre des problèmes de géométrie par l'algèbre"*.

Les petits-neveux ont fort discuté tout cela. Il ne s'agit pas, aujourd'hui, dans cete article de porter un jugement sur l'oeuvre mathématique de Descartes ; il est seulement proposé de lire, avec quelques explications, un passage assez simple de la "Géométrie" de notre auteur. Cela afin que le lecteur se fasse une opinion personnelle sur document-témoin. Opinion libre qui ne peut que satisfaire cet homme qui se voulait essentiellement un être libre.

Nous sommes en 1637, la "Géométrie" est un des trois appendices parus avec le "Discours de la méthode", sortes d'essais d'apllications de la dite méthode. Au livre III, on trouve la résolution des équations de "dimension quatre (4^e degré). Nous nous attacherons à la dimension trois que Descartes considère comme un cas particulier.

Les illustrations reproduites sont celles de l'édition originale.

1- Oter le second terme : l'opération est usuelle depuis plus d'un siècle. En posant

$$Z=z+\frac{a}{z}$$

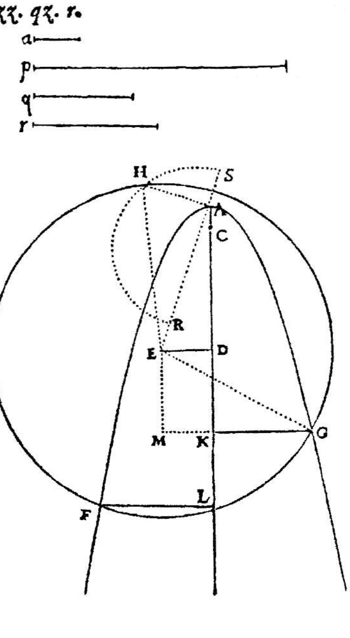
$z^3 = az^2 + bz + c$ devient $z^3 = pz + q$

2- ∞ retourné, c'est ∞ début des mots en ∞qu... au sens de rendre égal. Descartes ne commencera à oser du signe = que vers 1642.

L'astérisque marque l'absence du terme en z^2. Les points veulent dire "plus ou moins" (à ajouter ou à retrancher). Pour Descartes les termes inconnus sont successivement z, y, x, v, ...

S'il use de a^3, a^4, Descartes n'a jamais écrit a^2 mais aa.

Premierement il faut ofter le fecond terme de l'Equation propofée, s'il n'eft defia nul, & ainfi la reduire à telle forme, z^3 ∞ *. apz. aaq, fi la quantité inconnuë n'a que trois dimenfions; oubien à telle, z^4 ∞ *. $apzz$. $aaqz$. a^3r, fi elle en a quatre; oubien en prenant a pour l'vnité, à telle, z^3 ∞ *. pz. q, & à telle z^4 ∞ *. pzz. qz. r.



On notera l'homogénéité de la relation.

Dimension : ne pas oublier le sens géométrique des grandeurs (voir la figure).

3- Nous sommes en présence de la grande idée de Descartes : prendre a comme unité.

A la première page de la géométrie, il montre que, pour lui, z=xy c'est $\frac{Z}{y}=\frac{X}{1}$

Ailleurs il dira que pour z^2=y, z est moyenne [proportionnelle] entre y et 1.

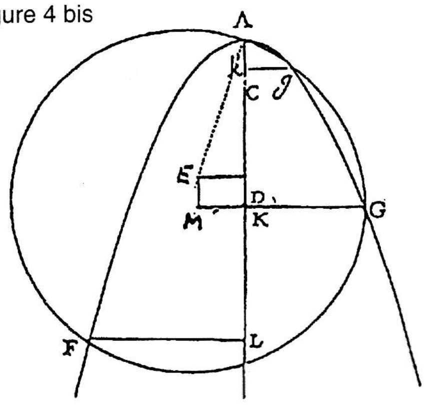
4- Les figures qui suivent sont faites pour la dimension quatre. Nous suivrons, pour la dimension trois, celle où le cercle passe par A (fig 4 bis). On notera que les quantités connues a, p, q, r, sont figurées par des segments de différentes longueurs.

5- La parabole, figure géométrique, est donc élément de base de l'étude et tracée à l'aide de propriétés géométriques.

Coté droit : avec les notations de la figure

«Commentaire par l'auteur», des pages 310 à 396 de la Géometrie de Descartes

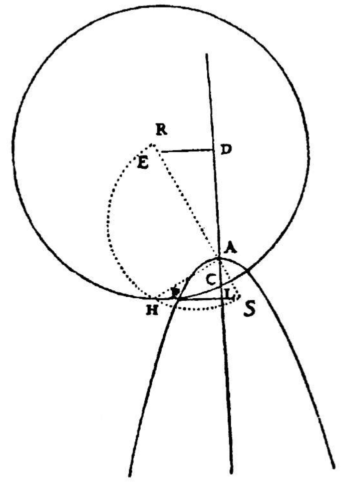
Figure 4 bis



4 bis, la parabole satisfait à $KG^2 = aAK$- a est le côté droit.
Le foyer F serait défini par $AF = \frac{a}{4}$ si a=1, $KG^2 = AK$ et $AF = \frac{AC}{2}$

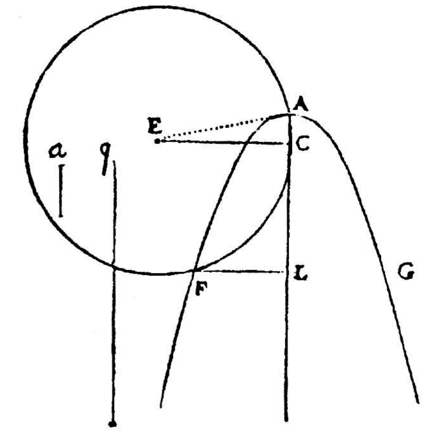
6- "la" : cette longueur p/2
Dans la suite du texte, il semble bien qu'il y ait une coquille. Il faut lire : "le point C au regard du point A", ou bien intervertir "+p" et "-p". On s'en rendra compte aisément en traitant un ou deux exemples numériques simples et dans le texte même un peu plus loin (note12).

7- La figure de la "géometrie correspond à la dimension trois (r=0) mais aussi à p=0
La figure 4bis avec le cercle passant en A montre que dans :
$z^4 = apzz . aaqz$



Descartes ignore z=0 pour ne voir que : $z^3 = apz . aaq$ = zéro c'est rien

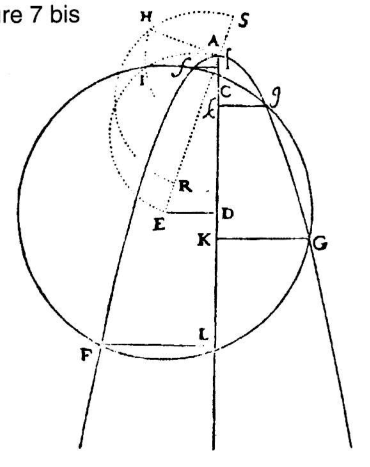
La dimension trois n'est donc qu'un cas particulier de la dimension quatre.



7 bis- Cette figure correspond pour la dimension quatre à "-r" et celle de la page 390 (note 4) à "+r".

8- En dimension trois, le cercle passe par A et "touche" (recoupe) la parabole en 1, 2 ou trois points puis racines vrayes ou fausses.

Figure 7 bis



9- La position du centre E par rapport à l'axe de la parabole va cataloguer les segments mesurés sur les perpendiculaires à l'axe. Sens-signe?
- Vrayes racines : celles qu'on associe sans problème à des segments.
- fausses racines ou moindres que rien : on voit apparaître inférieures à zéro...

10- Le théorème fondamental de l'algèbre? Dimension n, n racines.

11- Avec la parabole déjà construite on a obtenu un segment tel KG.0 on démontre qu'il satisfait bien au problème d'égaler z^3 et .pz.q (a est 1)
GK est nommé Z
Il n'y a pas un seul ∝ dans la suite du texte,

car avec z, on va désormais évaluer des segments. On ne cherche plus si on peut égaler des quantités.

12- On a +p et D est au côté de C au regard de A (voir note 6)

13- Parabole : nous écrivons AK^2=KG
$EM^2 = (zz - 1/2p - 1/2)^2$
$EG^2 = MG^2 + EM^2$ (on assemble)

14- $EA^2 = AD^2 + ED^2$

15- Il y a bien égalité entre EM^2 et EA^2, z^4-pzz+1/4pp-1/2p-1/4+qz+1/4qq et 1/4qq+1/4pp+1/2p+1/4

En réduisant, z^4-pzz+qz et il fallait
z^4 ꝏ *pzz-qz

16- Nous laissons “aux neveux” le plaisir d’étudier pzz+qz et r non nul... Il n’est besoin de s’y arester.

Co-ordonnées?
Axes orientés?
Algèbre pour géométrie?
Géométrie pour l’algèbre

C’était une pièce qu dossier
Nous pouvons poursuivre un peu la lecture de la “géométrie” avec deux applications.

17- On connait le problème
Trouver z et y tels que

$$\frac{a}{z}=\frac{z}{y}=\frac{y}{q}$$

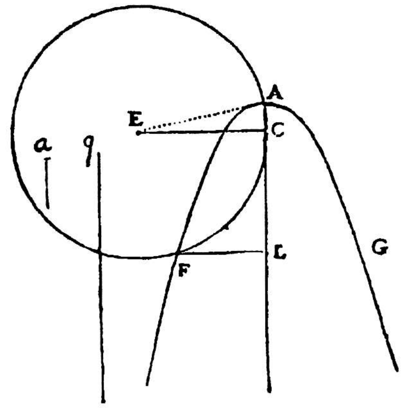
alors

$$y=\frac{zz}{a} \qquad \left(\frac{zz}{a}\right)^2=zq$$

18- Il y a donc bien à chercher à rendre égales (Equation)

$$\frac{z^3}{aa} \text{ et } q$$

Nous sommes dans le cas p nul d’où la figure



19- Si FL est z, Al est $\frac{zz}{a}$ puisque pour la parabole AL égale $\frac{FL^2}{a}$ (voir note 5)

20- On veut partager en trois parties égales larc $\widehat{NP}$

21- Avec notre écriture :

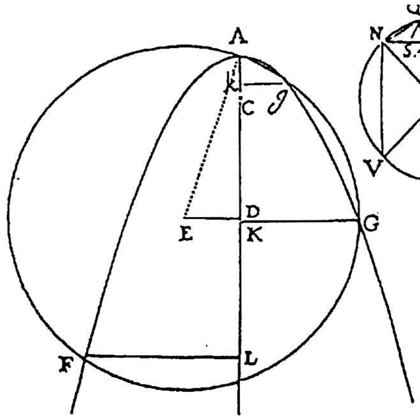
$$\frac{NO}{NQ}=\frac{NQ}{QR}=\frac{QR}{RS}, \; NQ = QT = TP$$

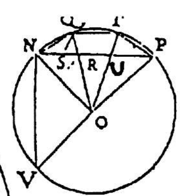
triangles ONQ, NQR, QSR semblables et isocèles en sorte que

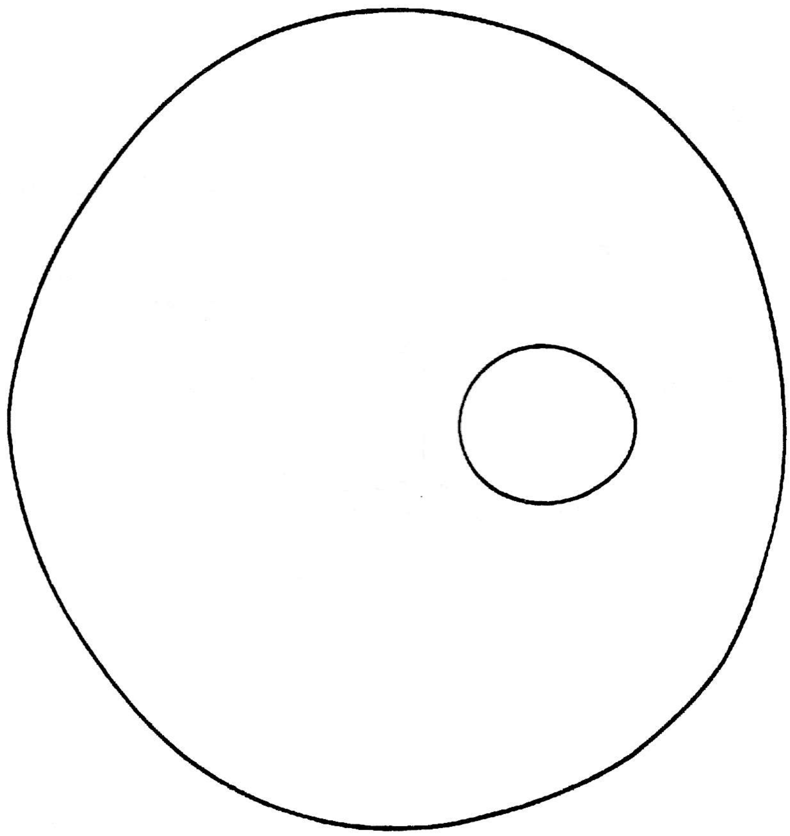
$$\frac{1}{Z}=\frac{Z}{ZZ}=\frac{ZZ}{RS} \quad \text{et } RS=Z^3$$

et
NP = NR + RU + UP
= NQ + (US-RS) + TP
= NQ + QT - RS + TP
= 3NQ - RS
q = 3Z - Z^3

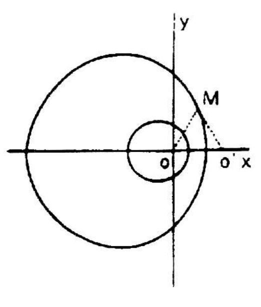
Z^3ꝏ*3Z-q ❑







ovale de descartes



On appelle ainsi les quartiques bicirculaires lieu des points M dont les distances OM = r, O'M = r' à deux points fixes O et O' (OO'= a) sont liés par une relation de la forme:

$$\alpha r + \beta r' = \gamma$$

α, β, γ étant des quantités constantes.

Dans le cas de la figure, la relation est :

$$|2.r - r'| = p :$$

p étant d'ailleurs les $\frac{7}{11}$ de a.

l'équation cartésienne de ces courbes est :

$$9(x^2+y^2)^2+6(x^2+y^2)(2ax+a^2) - 10\,p^2(x^2\,y^2) + (2ax-a^2+p^2)^2 = 0.$$

Ces courbes ont été rencontrées par le grand savant DESCARTES dans l'étude d'un problème d'optique géométrique.