La notion de fonction depuis Descartes

André Scheibler Lausanne

Cet article a été publié par le "Centre Vandois pour l'enseignement mathématique".

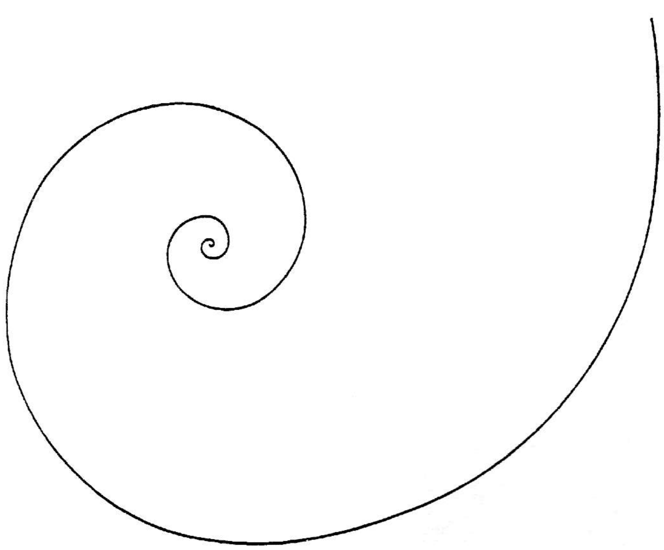
Aspect Historique

C'est chez ORESME, au 14è siècle, qu'apparaît semble-t-il pour la première fois la notion de fonction, sous l'aspect d'un graphique. Oresme étudie la chute des corps en portant sur des axes le temps et la distance parcourue. La fonction est alors associée au graphique.

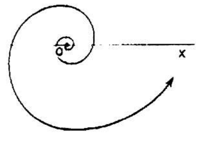
Descartes apporte, au 17e siècle, la notion de cooedonnées, couples de nombres qu'il associe à des points du plan. La fonction est donc la relation entre les nombres d'un même couple et est représentés par un graphique.

DEBEKING et BOOLE créent au19è siècle l'algèbre des ensembles. La notion de fonction se généralise sous la forme d'un objet mathématique défini paa la donnée d'une relation, qui, à tout élément d'un ensemble, associe un élément et un seul d'un autre ensemble.

Dès 1960, la définition généralement admise de la fonction est la suivante :



spirale logarithmique



La spirale logarithmique a la propriété de couper tous ses rayons vecteurs sous un angle V constant.
Si on la remplace par une courbe homothétique par rapport au pôle, on a une courbe qui peut par rotation se superposer à la première. L'origine est un point asymptote de la courbe. Son équation en coordonnées polaires est :

$$\rho = a\,e^{m\theta} = a e^{\frac{\theta}{tg\,V}}$$

On a pris ici : m = 4 ou tg V = 0,25.

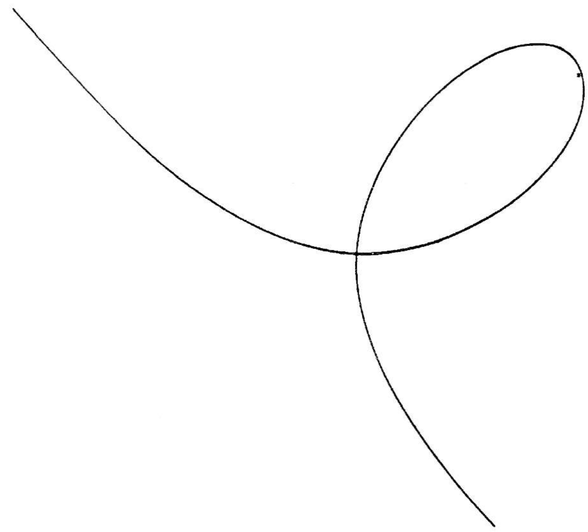
Soit X et Y deux ensembles.
On appelle fonction f la donnée d'un triplet (G, X, Y) où G, X, Y sont des ensembles assujettis à vérifier les conditions suivantes:

1) G est un sous-ensemble de l'ensemble produit XxY.
2) Pour tout x de X, il existe un et un seul y de Y tel que (x,y) appartienne à G.
G est appelé graphe de la fonctionf.

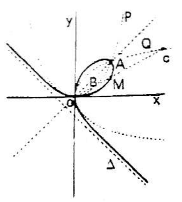
Présence de la notion de fonction dans notre enseignement

Dans les consignes concernant les classes enfantines, sous la rubrique "jeux et manipulations mathématiques", on trouve la notion de mise en correspondance. Les occasions concrètes d'établir des correspondances dans le quotidien de la classe seront donc relevés. Par exemple, correspondance entre les élèves et leurs places, les places et les tables, les jours et les types d'activité, les couleurs de certaines réglettes, etc. Aucun formalisme ni vocabulaire sophistiqué n'est visé, mais l'élève vit diverses propriétés des fonctions par des démarches mentales qu'il est amené à faire dans le cadre des jeux.

Entre la première et la quatrième année, l'élève rencontre la notion de relation. Dans l'avenue “ensembles et relations”, il est confronté à toutes sortes de situations qui sont liées à des relations dans un ensemble, entre deux ensembles, à des relations d'ordre, à des relations d'équivalence. Celles-ci sont génaralement modélisées par une phrase, par un diagramme sagittal, par un tableau à double entrée. Cette avenue doit bien sûr sa présence à l'époque ensembliste de l'enseignement des mathématiques. Si l'on est revenu nettement à ce choix, “ensembles et relations”
garde cependant toute sa raison d'être, comme lieu privilégié de modélisations de toutes sortes d'activités d'observations et de mesurages, soit des premiers pas dans le traitement des données.



folium de descartes



Considérons un point A de coordonnées (a, a) et les deux paraboles P et Q de sommet O qui passant par ce point ont l'origine comme sommet et respectivement Ox et Oy comme axes de symétrie.
Menons un rayon vecteur quelconque qui rencontre les deux paraboles en B et C.
Le conjugué harmonique M de O par rapport à B et C décrit un folium de DESCARTES. C'est une cubique circulaire unicursale dont l'équation cartésienne est :

$$x^3 + y^3 = 2axy$$

Elle admet un axe de symétrie OA et une asymptote Δ perpendiculaire à cet axe.

DESCARTES étudia cette courbe et se demanda (1638) comment en construire les tangentes.

L'apprentissage des opérations arithmétiques élémentaires, addition, soustraction, multiplication, division, exploite également la notion de fonction, sous forme de “boîte noire”, appelée aussi “machine”, ou “opérateur”, pour établir les algoritmes nécessaires et justifier leur universalité.

De la cinquième à la septième année, la notion de fonction, considérée alors comme un bon moyen de modélisation, prend plus nettement son aspect fonctionnel avec la mise en évidence de la notion de variable. La fonction permet d'étudier la variation d'une grandeur “en fonction de” une autre grandeur. Les ensembles pris en considération sont alors essentiellement des ensembles de nombres représentant une quantité de fleurs, leur prix, l'heure de départ d'un train, le nombre de kilomètres parcourus, etc. Un grand nombre de situations se prêtent donc à une modélisation efficace par une fonction, qui sera représentée par un diagramme sagittal, par un tableau de nombres, par un graphique ou diagramme cartésien, enfin par une “formule”. En particulier l'élève saura dire si une situation est de type linéaire, affine ou proportionnellement inverse, en étudiant le tableau de nombres correspondant, ou sa représentation graphique.

Dans les dernières années de la scolarité obligatoire, la fonctin est d'une part l'outil privilégié pour l'étude et la mathématisation de toutes sortes de situations et d'autre part l'argument méthodologique clé pour la mise en place de la notion d'équation, de système, nouveaux outils essentiels à la résolution de problèmes. La fonction prend alors la forme d'une formule, appelée également fonction-polynôme, aspect qui jusitifie l'apprentissage du calcul littéral.

Apologie de la notion de fonction

La forte présence de cette notion à travers toute la scolarité se justifie-t-elle?

D'abord, cette notion est présente dans le développement de l'enfant probablement dès son plus jeune âge. Il doit en effet, pour des raisons vitales, établir rapidement des relations entre des événements. De plus, la notion de variation, liée à une fonction, est une technique toute naturelle pour résoudre beaucoup de problèmes. Dès que le tâtonnement sort du hasard pour prendre un aspect systèmatique, c'est qu'il y a derrière cette recherche plusieurs fonctions dont on compar les images.

La notion de fonction fournit un modèle qui a fait ses preuves tant comme aide à la résolutions de problèmes que comme présentation de ceux-ci et de leurs solutions. Ce modèle est systématiquement utilisé par les médais comme moyen de communication (graphique, animation d'una variation, terminologie, ...).

La notion de fonction permet de donner un sens à l'équation, de justifier le calcul littéral, de présenter un langage de programmation, de s'aplliquer également à des actvités en géométrie comme les isométries et l'étude des lieux géométriques.

Difficultés pour les maîtres

L'aspect global de la fonction tel qu'il est présenté ci-dessus, sa définition rigoureuse, les raisons de ses multiples implications dans toute sa scolarité, échappent à une bonne partie des enseignants. Jusqu(au niveau 4, la fonction n'est plus rien d'autre que quelques flèches et quelques croix sur un tableau, et de ce fait un modèle imposé, trop rigoureux et abstrait, d'une situation souvent artificielle.

A partir du niveau 5, la variable prend le dessus, plustôt comme lettre-solution d'ailleurs et fournit l'outil équation, qui se prête alors facilement à un drill rassurant.

Il y adonc pour beaucoup d'enseignants une information concnernant la notion de fonction à travers la scolarité qui n'a pas été faite ou qui n'est pas passé. Il y aurait pour eux tout un travail de sensibilisation et de formation à la résolution de problèmes ouverts, qui font un abondant usage de la notion de fonction.

Difficultés pour les élèves

L'élève est confronté dès la première année à la notion de fonction, sous forme de diagramme sagittal et de tableau à double entrée. Assimile-t-il ce modèle sophistiqué qui est parachté par le maître? En tous cas il est très rare qu'un élève fasse spontanément appel à ce modèle dans un problème où il n'est pas imposé ou fortement suggéré. C'est en particulier le cas lorsque la donnée du problème n'est plus sous la forme de fiche mais sous forme d'un texte énoncé en français courant. Mais est-ce parce qu'il n'a pas fait sien l'outil ou qu'il n'a pas été entraîné, tout comme la maître d'ailleurs, à résoudre des problèmes dans lesquels les outils de résolutions ne sont pas indiqués?

Deux remarques pour conclure

L'élève ne conserve peutêtre de la notion de fonction qu'une image superficielle et figée, comme une grille appelée diagramme, un dessin appelé graphique, une lettre appelée variable, une écriture complexe de lettres et nombre appelée fonction. Donner vie à cette notion, c'est entraîner l'élève à l'utiliser spontanément, mais cela parî un objectif très difficle à atteindre.

Comment exploiter les situations rencontrées dans d'autres disciplines, comme le français, les sciences naturelles, la physique, qui regorgent d'application de la notion de fonction? Un important travail de recherche sur le thème de la multidisciplinarité s'impose. ❑