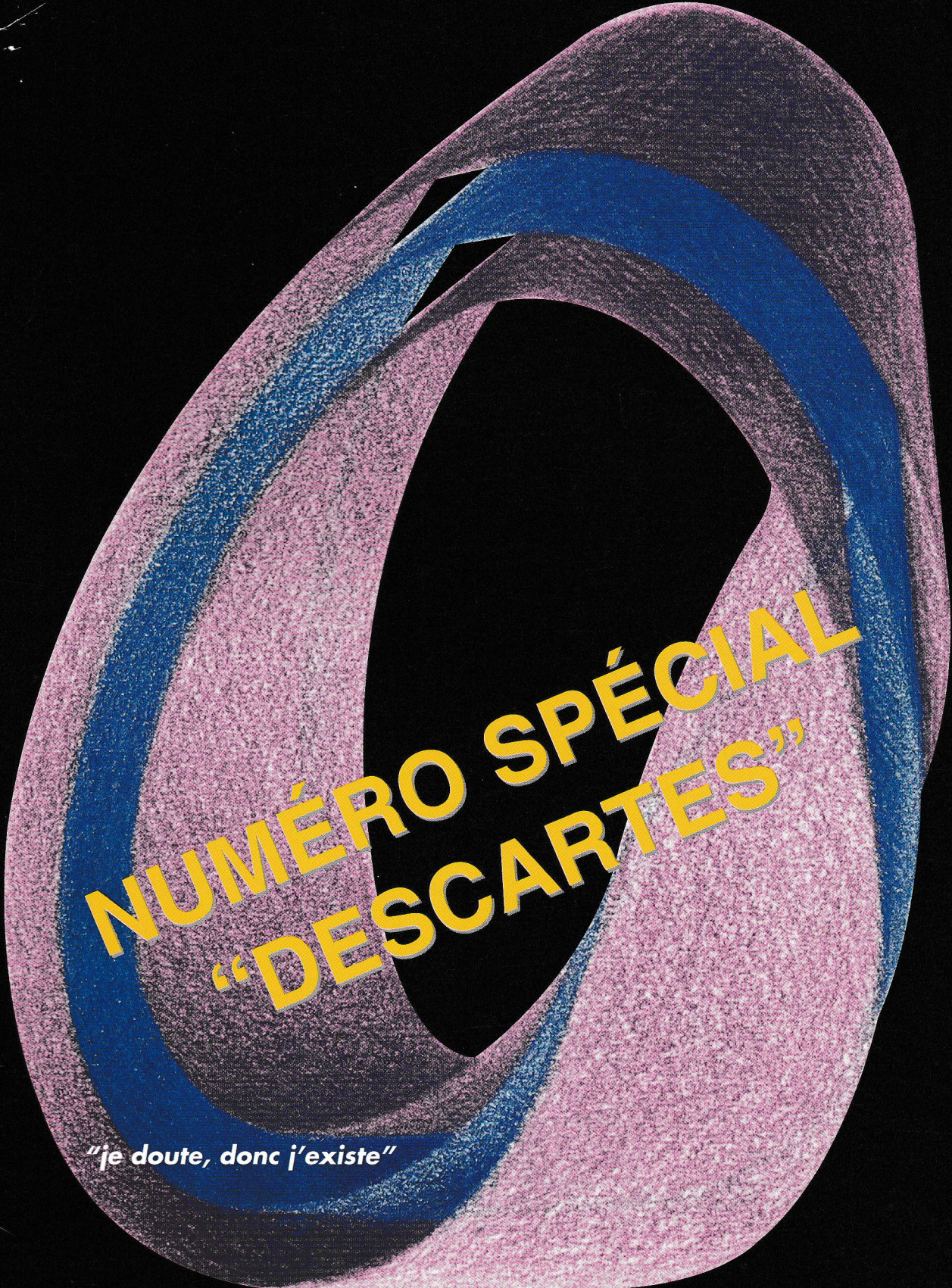


PLOT

75



NUMÉRO SPÉCIAL
"DESCARTES"

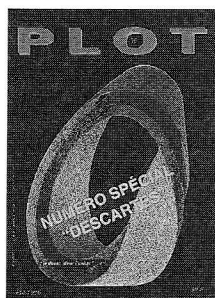
"je doute, donc j'existe"

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger. - Illustration : Sylvie PIC - 1996

Été 1996

50 F

Plot n° 75 - Spécial DESCARTES



Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Responsable de rédaction
Michel Darche

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk
Michel Clinard
Daniel Boutté
Gérard Chauvat
Roger Crépin
Luce Dossat
Georges Le Nez
Serge Parpay
Michel Soufflet
Raymond Torrent

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement
150 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 130 F
Abonnement étranger : 150 F
+ tarif avion

Photocomposition et maquette
i.c.e.- Limoges

Impression
Fabrègue - St-Yrieix

Editeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers, Limoges,
Orléans - Tours, Nantes, Rennes,
Rouen, Toulouse, Brest, Caen,
Clermont-Ferrand et La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).
Publié avec le concours du Ministère de la Coopération et de la Francophonie

SOMMAIRE

0 - Les 4 règles de la méthode par Descartes, La Haye	2
Doutes et certitudes du chercheur, une expo qui sème le doute	4
1 - Florimont de Beaune, commentateur de Descartes	6
Jacques Dubois, Tours	
2 - La notion de fonction depuis Descartes	16
André Scheibler, Lausanne	
3 - Résolution d'une équation de dimension 3	19
Henri Plane, Tours	
4 - Newton, c'est pas seulement une pomme !	23
F. Ledoux & M. Cadieu, Tours	
5 - Huygens, horloger et astronome	33
6 - Descartes, les nombres et la géométrie	37
Jean Dhombres, Nantes	
7 - Descartes : bibliographie multimédia	41
8 - Recherche-action en Côte d'Ivoire	42
Michel Soufflet, Rouen	
9 - Dossiers - abonnements	47

DESCARTES : Les 4 règles de la Méthode

Avec Descartes, le rôle des mathématiques dépasse l'apprentissage des règles et recettes et met en avant la nécessité de rechercher une méthode pour obtenir ou s'approcher de la vérité. C'est ce qu'il expose dans le Discours de la Méthode (1637), l'un des textes les plus célèbres de la langue française.



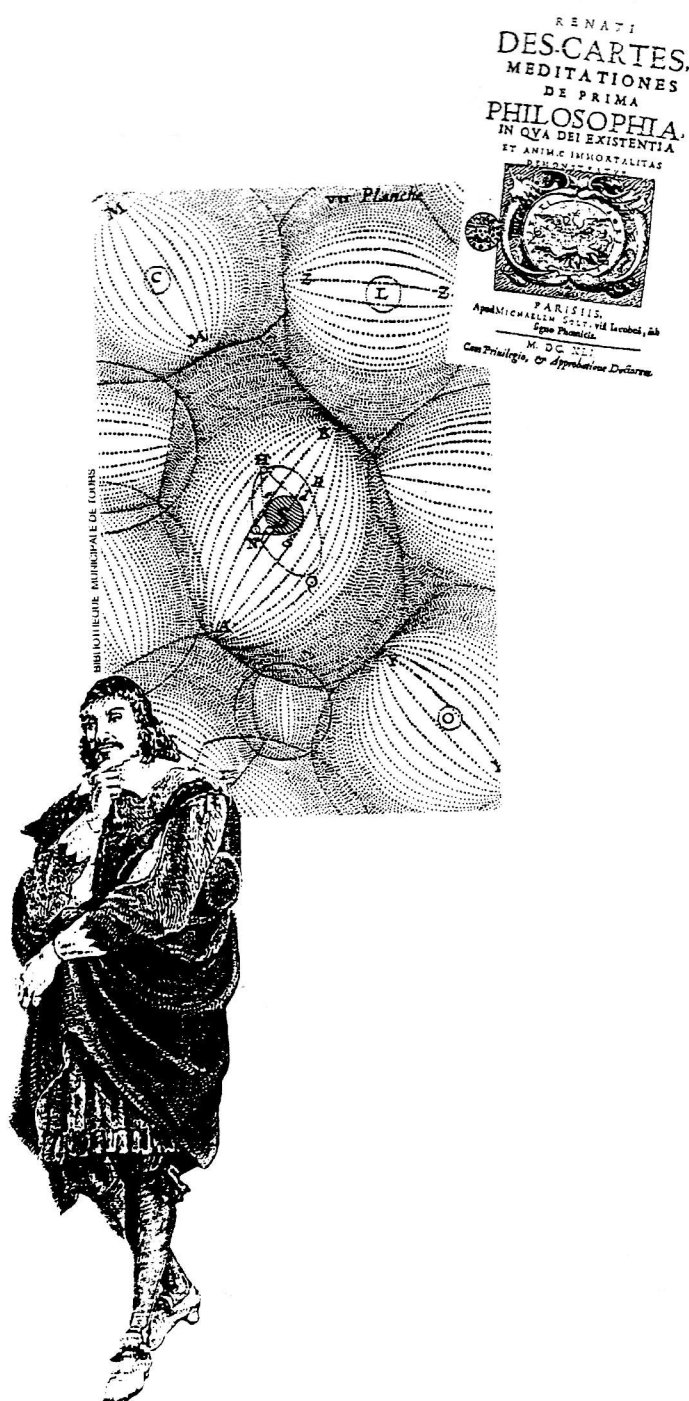
Mais, comme un homme qui marche seul et dans les ténèbres, je me résolus d'aller si lentement et d'user de tant de circonspection en toutes choses, que, si je n'avançais que fort peu, je me garderais bien, au moins, de tomber. Même je ne voulus point commencer à rejeter tout à fait aucune des opinions qui s'étaient pu glisser autrefois en ma créance sans y avoir été introduites par la raison, que je n'eusse auparavant employé assez de temps à faire le projet de l'ouvrage que j'entreprenais, et à chercher la vraie méthode pour parvenir à la connaissance de toutes choses dont mon esprit serait capable.

J'avais un peu étudié, étant jeune, entre les parties de la philosophie, à la logique, et, entre les mathématiques, à l'analyse des géomètres et à l'algèbre, trois arts ou sciences qui semblaient devoir contribuer quelque chose à mon dessein. Mais, en les examinant, je pris garde que, pour la logique, ses syllogismes et la plupart de ses autres instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sait, ou même, comme l'art de Lulle, à parler sans jugement de celles qu'on ignore, qu'à les apprendre.

Et bien qu'elle contienne, en effet, beaucoup de préceptes très vrais et très bons, il y en a toutefois tant d'autres, mêlés parmi, qui sont ou nuisibles ou superflus, qu'il est presque aussi malaisé de les en séparer, que de tirer une Diane ou une Minerve hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché. puis, pour l'Analyse des anciens et l'Algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer

beaucoup l'imagination; et on s'est tellement assujetti, en la dernière, à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive. Ce qui fut cause que je pensai qu'il fallait chercher quelque autre méthode, qui, comprenant les avantages de ces trois, fût exempte de leurs défauts. Et, comme la multitude des lois fournit souvent des excuses aux vices, en sorte qu'un Etat est bien mieux réglé lorsque, n'en ayant que fort peu, elles y sont fort étroitement observées; ainsi, au lieu de ce grand nombre de préceptes dont la logique est composée, je crus que j'aurais assez des quatre suivants, pourvu que je prisse une ferme et constante résolution de ne manquer pas une seule fois à les observer.

Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention; et de ne comprendre rien de plus en



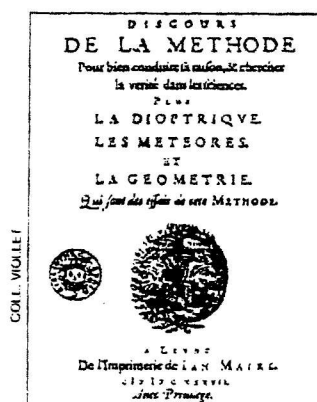
mes jugements que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusque à la connaissance des plus composés; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres.

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.

Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. Et je ne fus pas beaucoup en peine de chercher par lesquelles il était besoin de commencer : car je savais déjà que c'était par les plus simples et les plus aisées à connaître ; et considérant qu'entre tous ceux qui ont ci-devant recherché la vérité dans les sciences, il n'y a eu que les seuls mathématiciens qui ont pu trouver quelques démonstrations, c'est-à-dire quelques raisons certaines et évidentes, je ne doutais point que ce ne fût par les mêmes qu'ils ont examinées ; bien que je n'en espérasse aucune autre utilité, sinon qu'elles accoutumeraient mon esprit à se repaître de vérités et ne se contenter point de fausses raisons. Mais je n'eus pas dessein, pour cela, de tâcher d'apprendre toutes sciences particulières qu'on nomme communément mathématiques ; et, voyant qu'encore que leurs objets soient différents, elles ne laissent pas de s'accorder toutes, en ce qu'elles n'y considèrent autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent, je pensai qu'il valait mieux que



j'examinasse seulement ces proportions en général et sans les supposer que dans les sujets qui serviraient à m'en rendre la connaissance plus aisée, même aussi sans les y astreindre aucunement, afin de les pouvoir d'autant mieux appliquer après à tous les autres auxquels elles conviendraient. Puis, ayant pris garde que, pour les connaître, j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier, et quelquefois seulement de les retenir, ou de les comprendre plusieurs ensemble, je pensai que, pour les considérer mieux en particulier, je les devais supposer en des lignes, à cause que je ne trouvais rien de plus simple, ni que je pusse plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens ; mais que, pour les retenir ou les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que je les expliquasse par quelques chiffres, les plus courts qu'il serait possible ; et que, par ce moyen, j'emprunterais tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre, et corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre.

Comme, en effet, j'ose dire que l'exacte observation de ce peu de préceptes que j'avais choisis me donna telle facilité à démêler toutes les questions auxquelles ces deux sciences s'étendent, qu'en deux ou trois mois que j'employai à les examiner, ayant commencé par les plus simples et plus générales, et chaque vérité que je trouvais étant une règle qui me servait après à en trouver d'autres, non seulement je vins à bout de plusieurs que j'avais jugées autrefois très difficiles, mais il me sembla aussi, vers la fin, que je pouvais déterminer, en celles même que j'ignorais, par quels moyens et jusques où, il était possible de les résoudre. En quoi je ne vous paraîtrai peut-être pas être fort vain, si vous considérez que, n'y ayant qu'une vérité de chaque chose, quiconque la trouve en sait autant

qu'on en peut savoir ; et que, par exemple, un enfant instruit en l'arithmétique, ayant fait une addition suivant ses règles, se peut assurer d'avoir trouvé, touchant la somme qu'il examinait, tout ce que l'esprit humain saurait trouver. Car enfin la méthode qui enseigne à suivre le vrai ordre, et à dénombrer exactement toutes les circonstances de ce qu'on cherche, contient tout ce qui donne de la certitude aux règles d'arithmétique. Mais ce qui me contentait le plus de cette méthode, était que, par elle, j'étais assuré d'user en tout de ma raison, sinon parfaitement, au moins le mieux qui fût en mon pouvoir : outre que je sentais, en la pratiquant, que mon esprit s'accoutumait peu à peu à concevoir plus nettement et plus distinctement ses objets, et que, ne l'ayant point assujettie à aucune matière particulière, je me promettais de l'appliquer aussi utilement aux difficultés des autres sciences que j'avais fait à celles de l'algèbre. Non que, pour cela, j'osasse entreprendre d'abord d'examiner toutes celles qui se présente-

raient, car cela même eût été contraire à l'ordre qu'elle prescrit. Mais, ayant pris garde que leurs principes devaient tous être empruntés de la philosophie, en laquelle je n'en trouvais point encore de certains, je pensai qu'il fallait, avant tout, que je tâchasse d'y en établir, et que, cela étant la chose du monde la plus importante, et où la précipitation et la prévention étaient le plus à craindre, je ne devais point entreprendre d'en venir à bout que je n'eusse atteint un âge bien plus mûr que celui de vingt-trois ans que j'avais alors ; et que je n'eusse auparavant employé beaucoup de temps à m'y préparer, tant en déracinant de mon esprit toutes les mauvaises opinions que j'y avais reçues avant ce temps-là, qu'en faisant amas de plusieurs expériences, pour être après la matière de mes raisonnements, et en m'exerçant toujours en la méthode que je m'étais prescrite, afin de m'y affermir de plus en plus.



Descartes, doutes et certitudes du chercheur

Une exposition interactive de Centre-Sciences

“Je suppose que tout ce que je vois est faux
il faut étendre le doute à toutes choses”

Cette volonté de mettre toutes choses
en doute est pour Descartes le moyen de
mettre à l'épreuve tout ce qui lui a été ensei-

gné au collège royal de La Flèche tenu par
les jésuites.

Le doute est une mise à l'épreuve
expérimentale de tout ce à quoi l'on pour-
rait croire.

Comment a évolué le travail du scientifique
depuis 400 ans ? En quoi ses méthodes
sont-elles différentes de celles de Des-
cartes ? 12 expériences sont proposées au
visiteur pour confronter ses certitudes à la
réalité du phénomène et l'amener à douter

de ses raisonnements. Comment s'expriment aujourd'hui les scientifiques ? Certitudes ? Preuves ? présomptions de preuves ? Faisceaux de présomptions ? cette petite exposition propose au visiteur de s'interroger sur ses propres certitudes mais aussi sur toutes les formes actuelles de communication des travaux des chercheurs dans les médias.

Méthode : mot d'origine grecque qui signifie chemin, tracé à l'avance, qui conduit à un résultat.

Cette nouvelle exposition interactive de 150 m² est composée de 13 panneaux de 110 x 70 cm, 12 manipulations ou présentations interactives, 1 vidéo et 1 CD-Rom.

Le contenu de l'exposition

Première partie :

je pense, donc je doute

1- de la certitude au doute

Tout ce qui donne la certitude aux règles arithmétiques

manipulation : $64 = 65$?!

2- du doute à la certitude

Connaître et expliquer les choses de la nature et les phénomènes du monde visible
manipulation : le remonte-pente

3- du débat à la preuve

Comment mettre ses doutes et certitudes en débat

manipulation : le ludion de Descartes

2ème partie :

de l'idée à l'objet, de l'objet à l'idée

4- la géométrie cartésienne

mise en nombres et en équations, "le monde physique et matériel est explicable par la géométrie".
manipulation : Puissance 4 en 3D.

5- le plus court chemin (les Météores)

Les lois de la réflexion (Descartes et Newton), les dioptriques.

manipulation : à bâtons rompus.

6- Qu'est-ce que la lumière

le traité de la lumière

manipulation : noir + blanc = couleurs et vis et versa !

3ème partie : sur la Terre comme au ciel

Les chercheurs, contemporains de Descartes

7- Newton : la pomme, la Terre et le Soleil

Méthode de calcul de la chute des corps, la première des lois scientifiques

manipulation : chute de billes

8- Pasca : la nature et le vide

La pression atmosphérique et les expériences sur le vide

manipulation : le baromètre à mercure

9- Galilée : la mécanique céleste

Les tourbillons de Descartes (et pourtant elle tourne !). Newton et les coniques

manipulation : les coniques

4ème partie : je doute, donc je suis !

10- Cogito, ergo sum

Logique et philosophie, "la chose du monde la plus importante"

manipulation : logique et flou !

11- L'homme ou l'automate ?

Du chaos à l'automate

manipulation : êtes-vous un automate ?

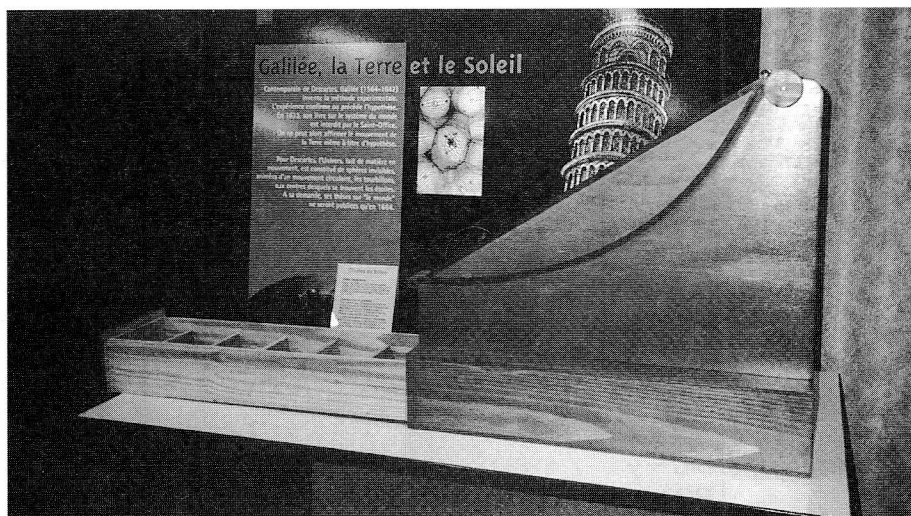
12- De l'âme au corps

Le traité de l'homme, le traité de l'âme

manipulation : un faisceau de présomptions

Exposition réalisée avec le concours scientifique de :

- l'Association des amis du Musée Descartes,
- les Universités de Tours et d'Orléans,
- l'IUFM d'Orléans-Tours,
- Le CNRS et l'Académie des Sciences. □



Florimond de Beaune, commentateur de Descartes

Jacques Dubois. Tours

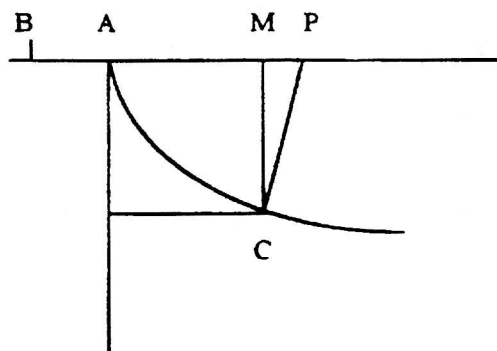
Le but de cette étude est de présenter les rapports qu'ont eus du point de vue scientifique René Descartes et Florimond de Beaune, mathématicien blésois d'origine tourangelles (c'était le petit-fils du petit-fils du grand Jacques I de Beaune, baron de Semblançay, surintendant des finances de 1516 à 1526...).

Leur correspondance, qui se situe uniquement entre octobre 1638 et juin 1639, porte essentiellement sur les sujets suivants :

- Quatre problèmes de mathématiques, dont deux sont restés célèbres et les deux autres pratiquement inconnus.
- Les critiques de de Beaune sur la "Géométrie" de Descartes, qui vont aboutir, à la demande de ce dernier, à une mise au point appelée les "Notes brèves" de de Beaune.
- Quelques discussions sur la mécanique.
- La réalisation par Florimond de Beaune d'une machine à tailler les verres hyperboliques pour les lunettes d'observation terrestre ou astronomique.

Les problèmes de Beaune

En ce qui concerne la 1^{ère} ligne, elle est telle que (1) :



AB = b donné
AM = x
MC = y
PC = s, normale en C à la courbe

AP = v

b étant une constante, $\frac{b+y}{y} = \frac{y}{x}$

C'est à dire $y^2 = xy + bx$. C'est une hyperbole, mais de Beaune ne le verra pas tout de suite !

Trouver la tangente en chaque point de cette courbe, c'est le problème direct des tangentes, "question, nous dit Beau-grand, que de Beaune mandait avoir besoin dans quelques dessins touchant la dioptrique". Ce dernier va d'abord appliquer la méthode de Descartes pour la construction des tangentes, ou plutôt des normales, en cherchant les intersections de la courbe avec le cercle de centre P et de rayon s, d'équation :

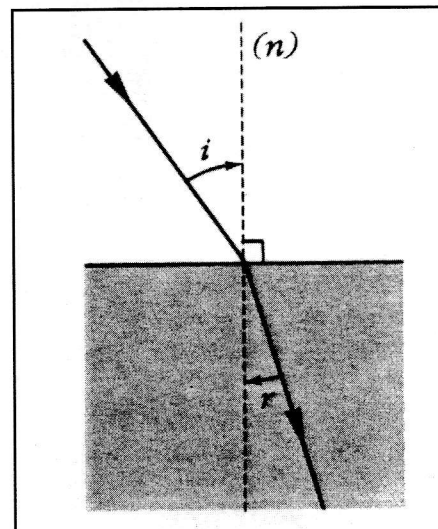
$$s^2 = x^2 + y^2 - 2vy + v^2$$

puis trouver une racine double pour l'équation obtenue :

$$s^2 (y + b)^2 = y^4 + y^2 (y + b)^2 - 2vy (y + b)^2 + v^2 (y + b)^2$$

Le cercle devient osculateur et P est le centre instantané de rotation. Il détermine ensuite les paramètres introduits, par la méthode des coefficients indéterminés, en comparant à :

Le "renversement cartésien"

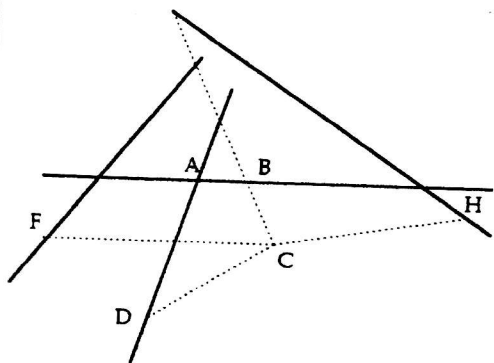


$(y^2 - 2ye + e^2)(y^2 + yf + l^2) = 0$
 Racine double pour $y = e$. D'où f, l et v

Mais comme F. de Beaune arrive à une équation en y^4 , cas qui n'a pas été donné comme exemple par Descartes, il ne développe pas la fin des calculs. C'est que, écrit-il (2) :

"Il faut que je vous avoue que Mr. Des Cartes a traité assez obscurément sa Geometrie, n'ayant pas pris la peine de démontrer plusieurs choses qui lui sont faciles, mais non pas à ceux qui n'y ont pas appliqué leurs pensées, comme luy en les inventant, et qui d'ailleurs ne sont pas dans un grand usage de ces choses. Et j'ay esté longtemps, parmi mes distractions à la ville, que je n'ay peu résoudre plusieurs des difficultés de sa Geometrie et principalement les deux que je vous ay envoyées. Depuis que j'ay eu du loisir au champs (sic) de m'y appliquer entièrement, je les ay résolues et trouvé ces lignes que je desirois, et la science de les trouver."

Un peu plus tard, Descartes lui ayant appris que sa courbe était une hyperbole, de Beaune va utiliser la méthode du problème de Pappus à 4 droites présentée dans le livre II de la "Géométrie".



CB, CF, CD, CH : distances de C aux 4 droites suivant des directions données

$AB = x$ $CB = y$
 on veut $CB \cdot CF = CD \cdot CH$

Lieu de C :
 une conique

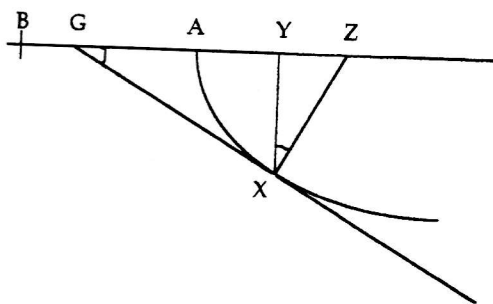
$$y = m - \frac{n}{z} \cdot x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

Pour la 1ère ligne de de Beaune :

$$\frac{y}{x} = \frac{y+b}{y} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + bx}$$

C'est, dit de Beaune, le cas où "il n'y a pas de m". Le coefficient de x^2 étant positif, on a bien une hyperbole. Il reprendra d'ailleurs cet exemple dans ses Notes brèves (2° observation sur la construction des lieux plans et solides) en faisant remarquer que c'est un cas particulier que Descartes n'avait pas signalé...

Pour la deuxième ligne, correspondant à ce que l'on appelle habituellement "le problème de de Beaune", il s'agit maintenant du problème inverse des tangentes, le premier que l'on sache avoir été posé, écrit Paul Tannery (3) : connaissant la normale, donc la tangente en chaque point, trouver l'équation de la courbe. F. de Beaune le pose ainsi (4) :



XZ est la normale en X
 GX la tangente
 $AB = b$ donné
 $YX = x$ $AY = y$

On veut que

$$\frac{ZY}{YX} = \frac{b}{YX - AY}$$

En notation moderne :

$$\frac{x \frac{dx}{dy}}{x} = \frac{b}{x-y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{b}$$

D'où $y = x - b + b e^{-x/b}$

"C'est un excellent problème et dont les usages sont admirables" dit de Beaune. Il expliquera plus tard qu'il en avait besoin pour étudier l'isochronisme des oscillations d'un pendule ou d'une corde vibrante. Mais pour le résoudre il veut encore employer la méthode directe des tangentes de Descartes :

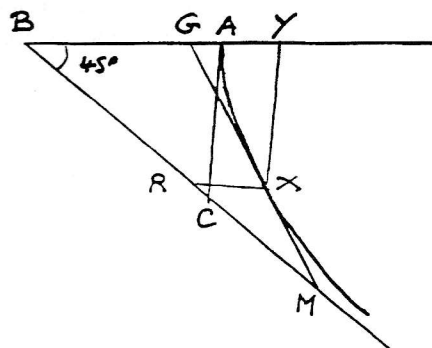
En posant $AZ = v$ et $ZX = s$, il écrit

$$\frac{v-y}{x} = \frac{b}{x-y}$$

à couper par le cercle

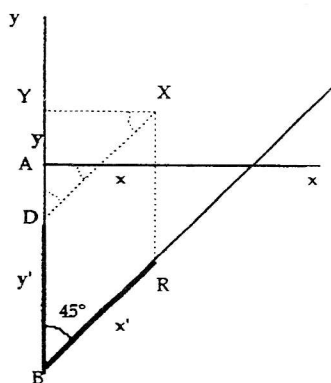
$$s^2 = x^2 + y^2 - v^2 - 2vy.$$

Les calculs, très longs, sont bien menés, montrant que, à la différence des géomètres parisiens Beaugrand et Roberval, de Beaune a bien assimilé les procédés de Descartes ; malheureusement ils ne conviennent pas pour ce problème, et Descartes lui-même sera obligé d'inventer une nouvelle méthode de calcul assez révolutionnaire (5).



Il commence par effectuer un changement d'axe :

GM : tangente en X à la courbe, qui admet la tangente verticale AC en son sommet A et l'asymptote BM .



Il passe des axes AY, AC aux axes obliques BY, BM .

En notation moderne on aurait :

$$BR = x' = x\sqrt{2} = DX$$

$$BD = y' = BY - DY = BY - YX = y + b - x$$

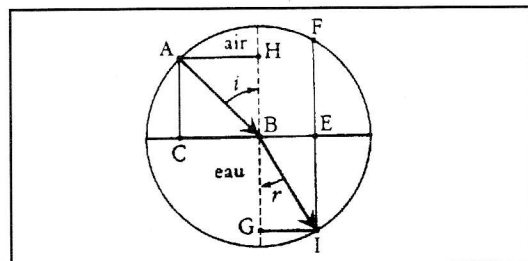
$$y' = y - \frac{x'}{\sqrt{2}} + b$$

L'équation de la courbe $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{b}$

$$\text{devient } \frac{dy'}{dx'} = -\frac{y'}{b\sqrt{2}} \quad \frac{x'}{\sqrt{2}} = b \log \frac{b}{y'}$$

La sous tangente

$$y' \frac{dx'}{dy'} = -b\sqrt{2} = \text{constante}$$



Descartes, lui, montre que $RM = BC =$ constante, caractéristique de la courbe (c'est, au signe près, la sous tangente $b\sqrt{2}$ avec les axes BY et BM .) Puis, divisant la courbe et les coordonnées en petits intervalles, il va situer chaque terme entre deux séries infinies, ce qui revient, dit-il, à construire la courbe par l'intersection de deux règles en mouvement dont les vitesses sont l'une uniforme, l'autre variant suivant une certaine progression qu'il détermine

$$(1, \frac{8}{7}, \frac{8}{6}, \frac{8}{5}, \frac{8}{4}, \frac{8}{3} \text{ etc})$$

C'est une courbe mécanique (autre-ment dit transcendante), et ce n'est pas étonnant, écrit-il, que mes autres méthodes de calcul ne marchent pas... Il ne prononce pas le mot de logarithme, mais sa nouvelle méthode rappelle celle de Néper !

Ainsi Descartes, grâce à de Beaune, a-t-il eu l'occasion et le courage non seulement de s'attaquer à un problème que l'on croyait insoluble avec les méthodes de l'époque, mais aussi de le résoudre... Néanmoins, il dira de l'étude de de Beaune (6) : *"Je voy qu'il pratique parfaitement bien les plus difficiles operations de mon analyse, et j'admire qu'il en ait p^e tant apprendre du peu que j'en ay écrit. S'il estoit icy, ou que je fusse où il est, je croy que je luy pourrois faire entendre tout le peu que j'en sçay, en moins de deux ou trois semaines, et je le ferois tres-volontiers ; mais encore que cela ne soit point, j'ose assurer que pourveu qu'il continuât à s'y exercer, il surpassera tous ceux qui se servent des autres methodes."*

Dans sa lettre à de Beaune du 20 février 1639 où il donne sa solution au deuxième problème, Descartes poursuit (7) : *"Pour votre troisième ligne courbe, vous voyez assez qu'elle est de même nature..."*

Pour ces lignes courbes la propriété dont vous m'envoyez la démonstration me paraît si belle que je la préfère à la quadrature de la parabole trouvée par Archimède". C'est donc que Florimond de Beaune est arrivé seul à trouver la surface en dessous de ses courbes, invention très remarquable qui montre que notre blésois avait su relier le problème de la quadrature au problème inverse des tangentes, remarque Paul Tannery (8), faisant pour la première fois la quadrature d'une courbe définie uniquement par sa tangente...

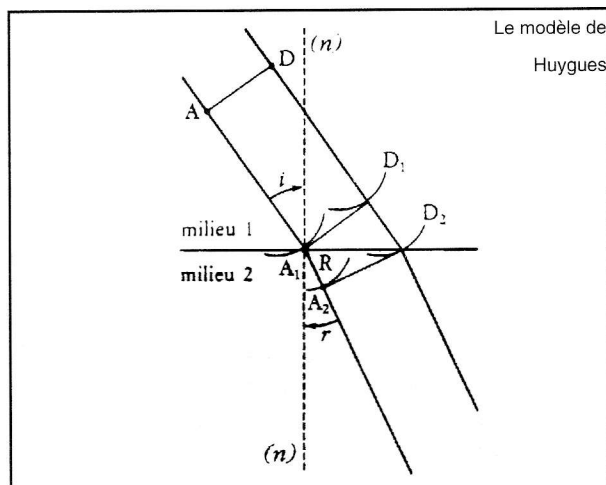
Par ailleurs, la 3^e ligne de de Beaune devait encore correspondre à une courbe dont la sous-tangente est constante ($y \frac{dx}{dy} = b$) dont la quadrature est facile !

Les Notes brèves

C'est à la même époque que de Beaune avait envoyé à Descartes ses "Notes brèves" sur la Géométrie. Déjà il écrivait le 13 novembre 1638 (9) :

"Tout ce qui est fascheux, est que Mr Descartes parle ambiguement et avec adresse, pour ne pas découvrir ses principes, quoyqu'il fust extrêmement souhaitable pour le bien public, qu'il les donnast ; car sans doute il ne s'aurait partir que de belles et excellentes choses d'un tel esprit. A la vérité, sa Géométrie est excellente, et je croy l'entendre maintenant au point que je la referois avec les demonstrations de tout ce qui est y compris, quoyqu'il les ait obmises, si elle estoit perdue ; mais je vous advoue qu'elle m'a donné bien de la peyne, pour avoir esté traictée avec l'obscurité qu'il a fait, et j'ay resolu, lorsque j'auray quelque loisir, d'escrire l'esclaircissement de toutes les difficultés qui y sont."

Ces Notes brèves constituent l'oeuvre la plus connue de Florimond de Beaune, grâce aux traductions latines jointes aux deux éditions en latin de la Géométrie de Descartes réalisées par Van Schooten en 1649 et 1659. Elles complètent l'ouvrage et en signalent certaines omissions, tous les cas particuliers n'ayant pas été traités... De Beaune analyse et expose la méthode générale pour des problèmes dont Descartes n'a donné que la construction. Exemple, pour la construction des tangentes, écrit-il,



"il est à remarquer qu'en cette Géométrie les exemples proposés ne peuvent être suivis exactement qu'en fort peu de cas et qu'il ont été expressément accommodés à ce qui devait être démontré touchant la figure des verres brûlants" (c'est à dire les lentilles...).

Résumons ces "Notes brèves sur la Géométrie de Mr.D.C." (10).

- Elles débutent par un exposé de la méthode de l'Algèbre spécieuse : elle revient à réduire toutes les grandeurs à la ligne droite, qui se prête le mieux à la science des proportions et peut exprimer des grandeurs incommensurables, du moins dans leurs rapports. De Beaune souligne aussi l'importance de l'homogénéité des formules.
- Sur les constructions de racine du livre I de la Géométrie, il explique les constructions, ce que n'avait pas fait Descartes.
- A propos des lieux plans et solides du livre II donnés par la formule générale solution du problème de Pappus, de Beaune remarque d'abord que Descartes a oublié le cas où il n'y a ni $x \leq$, ni $y \leq$, mais xy , c'est à dire celui d'une hyperbole définie par son asymptote, cas qu'il va traiter dans sa dernière observation.

- Observation 2^e. Il va retrouver l'équation

$$y^2 = xy + by \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$$

qui est celle de sa 1^{re} ligne (cas où "il n'y a pas de m").

Dans le cas où il n'y a pas $\frac{n}{z}x$ il donne un exemple où l'on a une parabole. - Observation 3^e. Cas où ne figurent pas a^2m et pz^2 : on a alors un cercle ou une ellipse.

- Observation 4^e si le facteur de x^2 , $p/m=1$.

De Beaune traite l'exemple du lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes est donné.

- Observation 5^e . Ce sont tous les cas où ne figurent ni x^2 , ni y^2 , mais xy : on obtient des hyperboles.

- La méthode de construction des tangentes (ou plutôt des normales) : Descartes ne l'a appliquée que dans les cas qui l'intéressaient en optique. De Beaune la généralise et la compare à la méthode de Fermat (on coupe la courbe par une droite et non un cercle).

- Dans la théorie des équations du livre III, cas de la multiplication d'une racine d'une équation par un nombre ; F. de Beaune insiste sur un point important : on ne fait pas que de l'algèbre, mais aussi de la géométrie, et le nombre représente le rapport d'un segment à un autre pris comme unité. Enfin il compare la règle de Cardan pour trouver les racines d'une équation du 3^e degré à celle de Viète et à la méthode générale de la Géométrie de Descartes.

Finalement ce dernier sera fort satisfait de ce travail. Il écrit à de Beaune le 20 février 1639 (11) :

"l'ay eſté extrêmement aise de voir vos Notes fur ma Geometrie ; & ie puis dire, avec verité, que ie n'y ay pas trouvé un seul mot qui ne soit entierement selon mon sens. En sorte que i'ay admiré que vous ayez pû reconnoistre des chofes que ie n'y ay mises qu'obscurement, comme en ce qui regarde la generalité de la methode, & la construction des lieux plans & solides, &c. Et par tout ie prens garde que vous avez plustost eu deſſien d'excuser mes fautes, que de les decouvrir ; de quoy i'ay veritablement ſujet de vous remercier, à cause que c'eſt un grand témoignage de votre bien-veillance ; mais ie ne vous aurois pas moins remercié, ſi vous les aviez remarquées, à cause de l'utilité que i'en aurois pû retirer."

Mais l'orgueil de Descartes va vite reprendre le dessus ! Il continue : "Et afin que vous sachiez que je ne me flatte pas tant je n'y reconnaisse beaucoup de manquement, je vous en dirai ici quelques uns". Il connaissait donc ses omissions, qui étaient en fait volontaires !

"Toutefois ie puis assurer que ie n'ay rien

obmis de tout cela qu'à deſſein, excepté le cas de l'asymptote que i'ay oublié. Mais i'avois preveu que certaines gens, qui fe vantent de ſ'auoir tout, n'eusſent pas manqué de dire que ie n'avois rien écrit qu'ils n'ayent ſceu auparavant, ſi ie me fuſſe rendu aſſez intelligible pour eux ; & ie n'aurois pas eu le plaisir, que i'ay eu depuis, de voir l'impertinence de leurs objections."

Et si l'on est pas convaincu, il suffit de relire la célèbre conclusion du traité de Descartes : "J'espère que vos neveux me sauront gré non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omis volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer".

Mais notre philosophe reste laudatif envers de Beaune ; le même jour, il écrit à Mersenne (12) :

"Je n'ay pas voulu différer de répondre à M(onsieur) de Beaune tant pour le remercier de ses Notes sur ma Geometrie, que pour luy mander ce que j'ay trouvé touchant ses lignes courbes ; car je croirois qu'il iroit du mien, si quelqu'autre luy pouvoit en cela satisfaire, ou mieux, ou plutost que moy. Il n'y a pas un seul mot en ses Notes qui ne soit entierement selon mon intention, et il a fort bien v° en ma Geometrie les constructions et les demonstrations de tous les lieux plans et solides, dont les autres disoient que je n'avois mis qu'une simple analyse."

C'est d'ailleurs Descartes lui-même qui a eu dès le mois de décembre 1639 l'idée, et de faire traduire en latin sa Géométrie, et d'y annexer les Notes de F. de Beaune. Il pensait à de Beaune lui-même pour entreprendre ce travail, nous dit Charles Adam (13), et allait jusqu'à vouloir lui confier le soin de remanier sa Géométrie selon les indications qu'il lui donnerait, ou celles qu'il avait déjà fournies dans sa lettre du 20 février 1639, à savoir changer le Second Livre et faire précéder la question de Pappus d'une analyse complète des lieux. Les Notes de de Beaune ont donc certainement joué un grand rôle dans la prise de conscience par Descartes des faiblesses de son livre et des causes de l'insuccès rencontré par l'ouvrage : le manque d'explications... Il est vrai que pour Descartes, guidé par l'intuition, la facilité et la simplicité d'une solution assurent fréquemment sa véracité...

Les questions d'optique

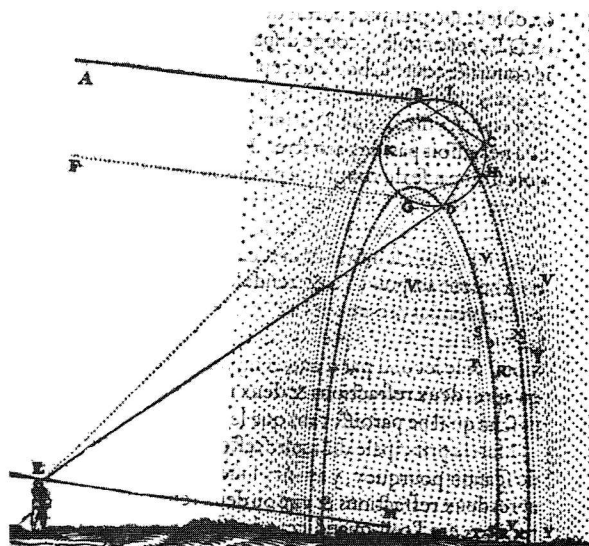
Mais Florimond de Beaune n'est pas que mathématicien. Il va s'occuper aussi de différents problèmes touchant la physique. Nous avons vu déjà que sa première courbe lui servait en optique, et la seconde pour étudier l'isochronisme des oscillations.

Par ailleurs il discute avec Mersenne ou Descartes d'autres questions comme la chute des corps, qu'il a bien traitée (mieux que Descartes...), la notion de travail des forces, le centre de gravité, et du reste il a écrit un traité de mécanique qui malheureusement ne nous est pas parvenu...

Mais c'est l'optique qui va constituer pendant plusieurs années la préoccupation principale de F. de Beaune. Fin octobre 1638, il termine une lettre à Roberval en signalant qu'il a commencé à mesurer des indices de réfraction optique suivant la méthode préconisée par Descartes (14) :

"Je ne say si le Pere Mersenne vous aura dict que j'ay faict des essais avec des triangles de verre que j'ay taillés, le tout avec toute la subtilité requise ; mais il faudroit voir la chose pour le croire. Et j'ay trouvé la proportion de Mr. Descartes tres veritable pour les refractions, si bien que cela m'a animé à entreprendre tout de bon les lunettes au plus tard à ce renouveau, et feray pendant l'hiver faire mes machines necessaires. Il ne me sera besoin que de loisir et de santé..." de laquelle il n'avait guère malheureusement!

Cette activité va d'ailleurs constituer le sujet principal d'échanges épistolaires avec Descartes, car ce sujet est aussi une des grandes préoccupations de ce dernier. René Descartes s'est associé aux travaux de Mersenne et de Mydorge en 1626 avec l'ingénieur rouennais Cornier. Tous connaissaient l'optique de Képler (15). Ce dernier savait que $\frac{1}{r} = \text{constante}$ ne convenait qu'en dessous de 30° pour l'angle i d'incidence, dans le phénomène de réfraction de la lumière ; il avait peut-être même déjà essayé $\sin i$ et suggéré l'hyperboloïde comme surface d'un dioptré stigmatique pour un point objet à l'infini, dont la méridienne s'appelait l'anaclastique, quoiqu'en ait dit Descartes.

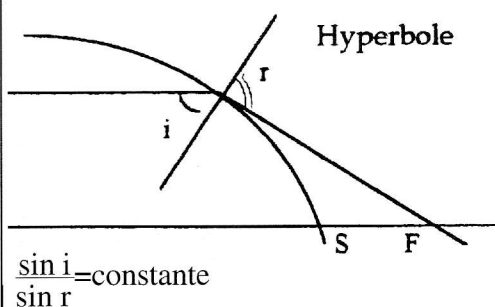


Il n'est pas facile encore actuellement de faire la part de chacun des savants parisiens dans l'énoncé de la loi de la réfraction et la recherche de l'anaclastique (16).

Indépendamment de Snellius (Snell) qu'il ne connaît pas, Descartes propose et vérifie la loi des sinus, d'abord guidé par un modèle statique (une balance coudée suggérée par Képler dans les Paralipomènes à Vitellion), puis aussi par une propriété spécifique de l'hyperbole, dont la démonstration est donnée à la fois par Mydorge et Beeckman vers 1626-1628 (17).

Dans toute hyperbole, si d'un point quelconque de la courbe on mène les droites suivantes : la parallèle à l'axe, la droite qui joint le foyer extérieur, la perpendiculaire à la tangente, on définit deux angles dont le rapport des sinus est constant.

Descartes fait la démonstration suivante dans la Dioptrique (18) :



D et K : sommets

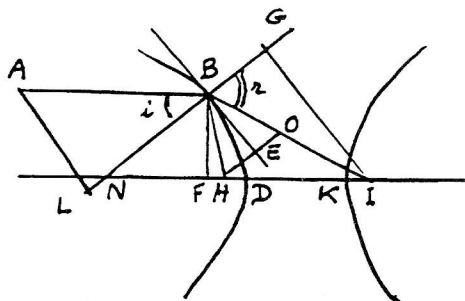
H et I : foyers

LG : normale AL $\perp$ BG

BE : tangente IG $\perp$ BG

HO $\parallel$ LG

on pose BA = BI



Démonstration de Descartes

ALB et IGN > semblables
 $AB \parallel NI \rightarrow$
 $AL \parallel GI$

$$\frac{AL}{IG} = \frac{AB}{NI} = \frac{BI}{NI}$$

BNI et OHI > semblables $\rightarrow$

$$\frac{BI}{NI} = \frac{OI}{HI} \rightarrow \frac{AL}{IG} = \frac{OI}{HI}$$

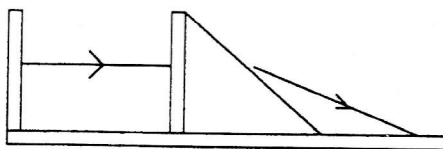
$OI = BI - BH = DK$ (propriété de l'hyperbole)

$$\rightarrow \frac{AL}{IG} = \frac{DK}{HI} = \text{constante}$$

Puisque $BA = BI$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \text{constante} = \frac{\text{Distance des sommets}}{\text{Distance des foyers}}$$

Si l'on veut réaliser des lentilles mettant à profit cette propriété, ce rapport peut être déterminé expérimentalement pour chaque sorte de verre à l'aide d'un dispo-



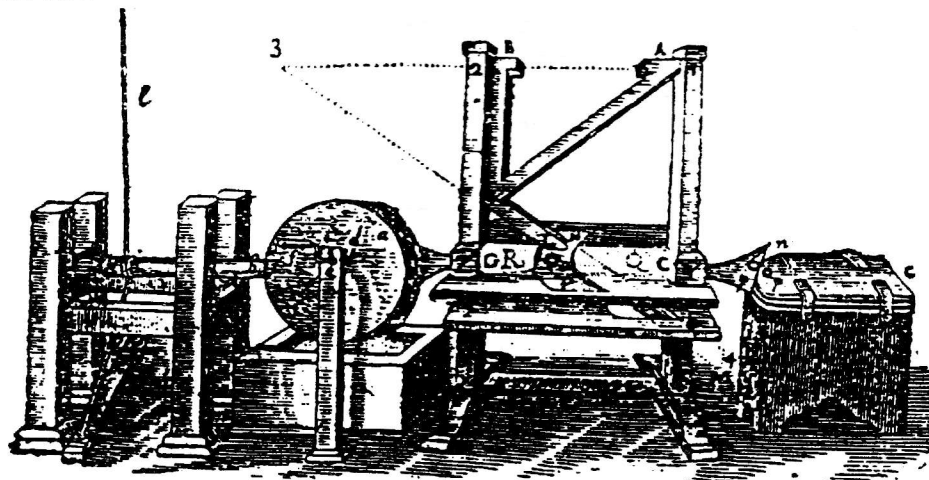
Mesure de n

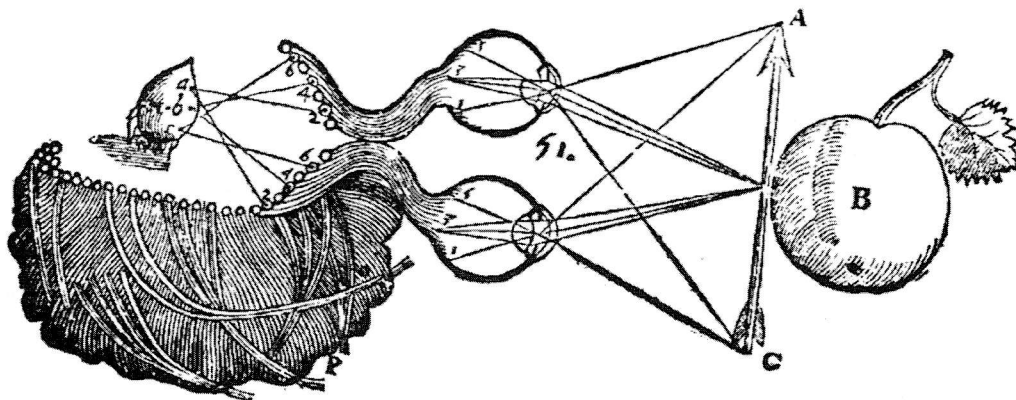
sitif à pinnules matérialisant le trajet de la lumière à travers des triangles transparents (19).

Remarquons que, pour trouver directement la courbe obéissant à la loi des sinus, il aurait fallu résoudre un problème inverse des tangentes...

Par ailleurs Descartes, qui avait déjà posé la question de l'anacoustique dans les Regul (composées dans l'hiver 1627-1628, va vite généraliser : toutes les coniques peuvent convenir comme anacoustiques, c'est à dire comme sections de verres réalisant le stigmatisme entre un point objet à l'infini et le point image à l'un des foyers de la conique. Il va montrer en outre que le stigmatisme pour des points situés à distance finie est assuré par des courbes qu'il appelle des ovales. Enfin il va justifier la loi des sinus par une "ratiocination" basée sur la comparaison mécanique de la balle arrivant à la surface de séparation de deux milieux ; mais du fait que "l'inclination à mouvoir" du milieu le plus dense, l'eau par exemple, est plus grande que celle de l'air (la matière subtile y étant plus "serrée"...) le rayon réfracté se rapproche de la normale alors que la balle s'en écarte. Le rapport des sinus, c'est le rapport des vitesses dans le modèle mécanique et le rapport des facilités de pénétration pour la lumière...

Il va développer tout ceci dans sa Dioptrique et sa Géométrie, ainsi que la description d'une machine à tailler les verres hyperboliques qu'il privilégie et qu'il n'aura de cesse de faire réaliser, d'abord par Ferrier, habile fabricant d'instruments qui réussit à tailler une lentille hyperbolique, mais une seule, répon-





dant à la question. Puis il compte sur un tourneur de verre d'Amsterdam que lui a fait connaître Huygens, mais bientôt il n'aura plus confiance qu'en Florimond de Beaune pour mener à bien son projet.

A la fin de l'année 1638, il lui envoie une lettre qui commence ainsi (20) :

Monsieur,

“Vous êtes véritablement l'homme que j'ai souhaité en ma Dioptrique, pour la mettre en exécution ; ou plutôt vous en êtes plus capable que je n'eusse osé souhaiter”.

Ensuite vient la description d'une modification importante de la machine pour tailler les verres hyperboliques que Descartes avait abondamment décrite, avec gravures à l'appui, dans sa Dioptrique (21) :

“ABKLM n'est qu'une seule pièce qui se meut toute entière sur les pôles 1, 2”. KLM décrit un cône de sommet 3 et d'axe AB. La pièce ZY est guidée dans un plan parallèle à AB et les extrémités 6, 7 et 7, 8 décrivent dans ce plan des hyperboles, sections du cône précédent...

De fait, Descartes écrit le 9 février 1639 à Mersenne (22) : “Pour la machine, j'ai conseillé à M. de Beaune de la faire tout autrement que je ne l'ai décrite, à cause qu'en écrivant on doit principalement, ce me semble avoir soin de faire entendre la chose, et en pratiquant d'y chercher des facilités qui ne peuvent ou même ne doivent point toutes être décrites...”.

Le 20 février, s'adressant directement à de Beaune, il lui écrit (23) : “Je n'ai rien à dire touchant ce que vous trouvez bon de changer en la machine pour les lunettes, car c'est chose dont vous pouvez mieux juger que moi. Mais pour ce qui est de com-

mencer par les lunettes à puce, je crains qu'elles ne fassent pas voir si clairement l'utilité de la figure hyperbolique, comme les lunettes de longue vue ; car vous savez que pour les verres qu'on met proche de l'œil, il n'importe pas tant que leur figure soit exacte”. Puis il lui conseille de commencer par une machine capable de tailler des verres de 4 à 5 pouces de diamètre pour des lunettes de 2 à 3 pieds de longueur.

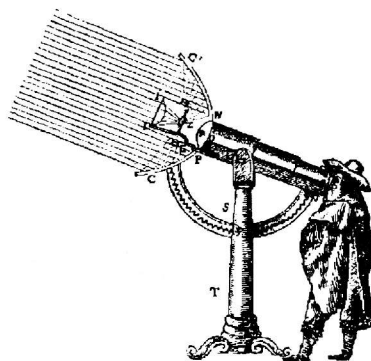
Finalement de Beaune arrivera à fabriquer la machine mais ne l'utilisera guère car il s'accidentera à la main, puis, souffrant de terribles attaques de goutte, devra se faire amputer d'un pied et ne s'en remettra pas.

Descartes à Blois

Descartes ira quand même le visiter à Blois en 1644 et verra des lunettes fabriquées par de Beaune qui étaient assez bonnes, nous dit Baillet.

Une autre tentative pour faire des verres hyperboliques sera faite en Angleterre par Hooke en 1671, mais sans grand succès !

Florimond de Beaune décédera le 18 août 1652, à 51 ans, deux ans après Descartes.



Que sont devenues ses archives ? Si Pierre Costabel a retrouvé en 1963 un traité de l'Angle Solide signé de Beaune (24) dans les manuscrits de Roberval, sa Dioptrique et son ouvrage sur la Mécanique semblent définitivement perdus. Il avait aussi composé deux traités d'Algèbre qui seront imprimés en même temps que l'édition latine de la Géométrie de Descartes en 1659. Dom Liron écrit en 1719 qu'une copie du traité de l'Analyse demeurait dans la famille de M. de Beaune à Blois...

Laissons maintenant René Descartes conclure (25) :

"M. Debeaune en sait plus que ceux qui n'en ont su venir à bout et les règles de ma Géométrie ne sont pas inutiles ni si obscures qu'on ne les puisse entendre, ni si défectueuses qu'elles ne suffisent à un homme d'esprit pour faire plus que par les autres

méthodes car il les a entendues sans aucun interprète et s'en sert à faire ce que nos plus grands Géomètres ignorent."

Lorsqu'on sait la susceptibilité de Descartes, l'approbation complète que celui-ci donna à de Beaune pour ses critiques et pour ses corrections est très remarquable, pense Pierre Costabel. Descartes avait su déceler la valeur de son correspondant et la qualité de l'analyse effectuée sur ses Essais par Florimond de Beaune. Ce dernier à bien droit à une place importante dans l'histoire des mathématiques, mais aussi dans celle de notre région. □

Notes

Abréviations :

- A.T. : Oeuvres de Descartes publiées par C. Adam et P. Tannery, Paris 1897-1909, réédition Vrin-C.N.R.S., 11 vol., 1964-1974.
- C.M. : Correspondance du P. Marin Mersenne publiée par Mme P. Tannery et Cornelis de Waard, Paris 1933-1963, PUF C.N.R.S., 8 vol.
- C.D. : Descartes Correspondance publiée par Ch. Adam et G. Milhaud, Paris 1936-1956, P.U.F., 8 vol.
- (1) Lettres de de Beaune à Mersenne du 25.9.1638 et du 13.11.1678, C.M., VIII, pp.84 et 171.
- (2) Lettre de de Beaune à Mersenne du 25.9.1638, C.M., VIII, p.86.
- (3) Tannery P. Mémoires Scientifiques, VI, Paris, Gauthier Villars, 1926, p.458.
- (4) Lettre de de Beaune à Roberval du 16.10.1638, C.M., VIII, p.142.
- (5) Lettre de Descartes à de Beaune du 20.2.1639, A.T., II, p.514.
- (6) Lettre de Descartes à Mersenne du 15.11.1638, C.M., VIII, p.202.
- (7) Lettre de Descartes à de Beaune du 20.2.1639, A.T., II, p.513.
- (8) Tannery P. Mémoires Scientifiques, VI, p.470.
- (9) Lettre de de Beaune à Mersenne du 13.11.1638, C.M. VIII, p.172.
- (10) C.D., III, Appendice II, p.353.
- (11) Lettre de Descartes à de Beaune du 20.2.1639, A.T., II, p.510.
- (12) Lettre de Descartes à Mersenne du 20.2.1639, C.M., VIII, p.324.

- (13) C.D., III, Appendice II, pp.360-361.
- (14) Lettre de Descartes à Roberval du 16.10.1638, C.M., VIII, p.141.
- (15) Lettres de Cormier à Mersenne du 27.1.1626 et, du 16.3.1626, C.M., I, notes p.356 et p.423.
- (16) Milhaud G. Descartes savant, Paris, Félix Alcan, 1921, p.103.
Costabel P. Démarches originales de Descartes savant, Paris, Vrin, 1982, pp.53 et 63.
- (17) Lettre de Mydorge à Mersenne de février 1626, C.M., I, p.408.
Journal de Beeckman, 1^{er} février 1629, A.T., X, p.341.
- (18) A.T., VI, p.178.
- (19) Ibid. p.212.
- (20) Lettre de Descartes de décembre 1638, A.T., II, p.452.
- (21) A.T., VI, p.218.
- (22) Lettre de Descartes à Mersenne du 9.2.1639, A.T., II p.505.
- (23) Lettre de Descartes à de Beaune du 20.2.1639, A.T., II, p.512.
- (24) Florimond de Beaune. Doctrine de l'Angle Solide. Edition critique par P. Costabel, Paris, Vrin, 1975.
- (25) Lettre de de Beaune à Mersenne du 19.6.1639, C.M., VIII, p.451



La notion de fonction depuis Descartes

André Scheibler Lausanne

Cet article a été publié par le "Centre Vandois pour l'enseignement mathématique".

Aspect Historique

C'est chez ORESME, au 14^e siècle, qu'apparaît semble-t-il pour la première fois la notion de fonction, sous l'aspect d'un graphique. Oresme étudie la chute des corps en portant sur des axes le temps et la distance parcourue. La fonction est alors associée au graphique.

Descartes apporte, au 17^e siècle, la notion de coordonnées, couples de nombres qu'il associe à des points du plan. La fonction est donc la relation entre les nombres d'un même couple et est représentée par un graphique.

DEBEKING et BOOLE créent au 19^e siècle l'algèbre des ensembles. La notion de fonction se généralise sous la forme d'un objet mathématique défini par la donnée d'une relation, qui, à tout élément d'un ensemble, associe un élément et un seul d'un autre ensemble.

Dès 1960, la définition généralement admise de la fonction est la suivante :

Soit X et Y deux ensembles.

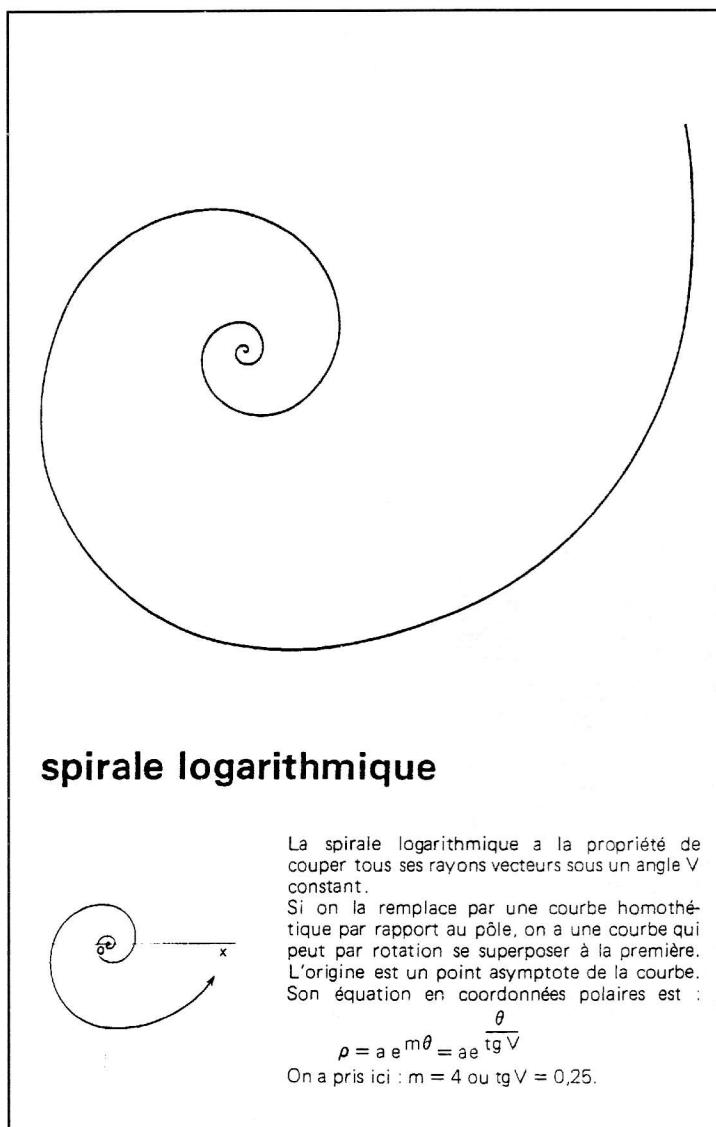
On appelle fonction f la donnée d'un triplet (G, X, Y) où G, X, Y sont des ensembles assujettis à vérifier les conditions suivantes:

- 1) G est un sous-ensemble de l'ensemble produit $X \times Y$.
- 2) Pour tout x de X, il existe un et un seul y de Y tel que (x, y) appartienne à G.

G est appelé graphe de la fonction f.

Présence de la notion de fonction dans notre enseignement

Dans les consignes concernant les classes enfantines, sous la rubrique "jeux et manipulations mathématiques", on trouve la notion de mise en correspondance. Les occasions concrètes d'établir des correspondances dans le quotidien de la classe seront donc relevés. Par exemple, correspondance entre les élèves et leurs places, les places et les tables, les jours et les types d'activité, les couleurs de certaines réglettes, etc. Aucun formalisme ni vocabulaire



sophistiqué n'est visé, mais l'élève vit diverses propriétés des fonctions par des démarches mentales qu'il est amené à faire dans le cadre des jeux.

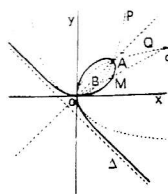
Entre la première et la quatrième année, l'élève rencontre la notion de relation. Dans l'avenue "ensembles et relations", il est confronté à toutes sortes de situations qui sont liées à des relations dans un ensemble, entre deux ensembles, à des relations d'ordre, à des relations d'équivalence. Celles-ci sont généralement modélisées par une phrase, par un diagramme sagittal, par un tableau à double entrée. Cette avenue doit bien sûr sa présence à l'époque ensembliste de l'enseignement des mathématiques. Si l'on est revenu nettement à ce choix, "ensembles et relations"

garde cependant toute sa raison d'être, comme lieu privilégié de modélisations de toutes sortes d'activités d'observations et de mesurages, soit des premiers pas dans le traitement des données.

L'apprentissage des opérations arithmétiques élémentaires, addition, soustraction, multiplication, division, exploite également la notion de fonction, sous forme de "boîte noire", appelée aussi "machine", ou "opérateur", pour établir les algorithmes nécessaires et justifier leur universalité.

De la cinquième à la septième année, la notion de fonction, considérée alors comme un bon moyen de modélisation, prend plus nettement son aspect fonctionnel avec la mise en évidence de la notion de variable. La fonction permet d'étudier la variation d'une grandeur "en fonction de" une autre grandeur. Les ensembles pris en considération sont alors essentiellement des ensembles de nombres représentant une quantité de fleurs, leur prix, l'heure de départ d'un train, le nombre de kilomètres parcourus, etc. Un grand nombre de situations se prêtent donc à une modélisation efficace par une fonction, qui sera représentée par un diagramme sagittal, par un tableau de nombres, par un graphique ou diagramme cartésien, enfin par une "for-

folium de descartes



Considérons un point A de coordonnées (a, a) et les deux paraboles P et Q de sommet O qui passant par ce point ont l'origine comme sommet et respectivement Ox et Oy comme axes de symétrie.

Menons un rayon vecteur quelconque qui rencontre les deux paraboles en B et C.

Le conjugué harmonique M de O par rapport à B et C décrit un folium de DESCARTES. C'est une cubique circulaire unicursale dont l'équation cartésienne est :

$$x^3 + y^3 = 2axy$$

Elle admet un axe de symétrie OA et une asymptote Δ perpendiculaire à cet axe.

DESCARTES étudia cette courbe et se demanda (1638) comment en construire les tangentes.

mule". En particulier l'élève saura dire si une situation est de type linéaire, affine ou proportionnellement inverse, en étudiant le tableau de nombres correspondant, ou sa représentation graphique.

Dans les dernières années de la scolarité obligatoire, la fonction est d'une part l'outil privilégié pour l'étude et la mathématisation de toutes sortes de situations et d'autre part l'argument méthodologique clé pour la mise en place de la notion d'équation, de système, nouveaux outils essentiels à la résolution de problèmes. La fonction prend alors la forme d'une formule, appelée également fonction-polynôme, aspect qui justifie l'apprentissage du calcul littéral.

Apologie de la notion de fonction

La forte présence de cette notion à travers toute la scolarité se justifie-t-elle?

D'abord, cette notion est présente dans le développement de l'enfant proba-

blement dès son plus jeune âge. Il doit en effet, pour des raisons vitales, établir rapidement des relations entre des événements. De plus, la notion de variation, liée à une fonction, est une technique toute naturelle pour résoudre beaucoup de problèmes. Dès que le tâtonnement sort du hasard pour prendre un aspect systématique, c'est qu'il y a derrière cette recherche plusieurs fonctions dont on compar les images.

La notion de fonction fournit un modèle qui a fait ses preuves tant comme aide à la résolutions de problèmes que comme présentation de ceux-ci et de leurs solutions. Ce modèle est systématiquement utilisé par les médias comme moyen de communication (graphique, animation d'une variation, terminologie, ...).

La notion de fonction permet de donner un sens à l'équation, de justifier le calcul littéral, de présenter un langage de programmation, de s'appliquer également à des activités en géométrie comme les isométries et l'étude des lieux géométriques.

Difficultés pour les maîtres

L'aspect global de la fonction tel qu'il est présenté ci-dessus, sa définition rigoureuse, les raisons de ses multiples implications dans toute sa scolarité, échappent à une bonne partie des enseignants. Jusqu'au niveau 4, la fonction n'est plus rien d'autre que quelques flèches et quelques croix sur un tableau, et de ce fait un modèle imposé, trop rigoureux et abstrait, d'une situation souvent artificielle.

A partir du niveau 5, la variable prend le dessus, plutôt comme lettre-solution d'ailleurs et fournit l'outil équation, qui se prête alors facilement à un drill rassurant.

Il y adonc pour beaucoup d'enseignants une information concernant la notion de fonction à travers la scolarité qui n'a pas été faite ou qui n'est pas passé. Il y aurait pour eux tout un travail de sensibilisation et de formation à la résolution de problèmes ouverts, qui font un abondant usage de la notion de fonction.

Difficultés pour les élèves

L'élève est confronté dès la première année à la notion de fonction, sous forme de diagramme sagittal et de tableau à double entrée. Assimile-t-il ce modèle sophistiqué qui est parachuté par le maître? En tous cas il est très rare qu'un élève fasse spontanément appel à ce modèle dans un problème où il n'est pas imposé ou fortement suggéré. C'est en particulier le cas lorsque la donnée du problème n'est plus sous la forme de fiche mais sous forme d'un texte énoncé en français courant. Mais est-ce parce qu'il n'a pas fait sien l'outil ou qu'il n'a pas été entraîné, tout comme la maître d'ailleurs, à résoudre des problèmes dans lesquels les outils de résolutions ne sont pas indiqués?

Deux remarques pour conclure

L'élève ne conserve peut-être de la notion de fonction qu'une image superficielle et figée, comme une grille appelée diagramme, un dessin appelé graphique, une lettre appelée variable, une écriture complexe de lettres et nombre appelée fonction. Donner vie à cette notion, c'est entraîner l'élève à l'utiliser spontanément, mais cela parait un objectif très difficile à atteindre.

Comment exploiter les situations rencontrées dans d'autres disciplines, comme le français, les sciences naturelles, la physique, qui regorgent d'application de la notion de fonction? Un important travail de recherche sur le thème de la multidisciplinarité s'impose. □

Résolution d'une équation de dimension trois

Henri PLANE, Tours

Les neveux de Descartes ont répandu des jugements tels que "Descartes a inventé les coordonnées et la géométrie analytique qui permet de résoudre des problèmes de géométrie par l'algèbre".

Les petits-neveux ont fort discuté tout cela. Il ne s'agit pas, aujourd'hui, dans cet article de porter un jugement sur l'oeuvre mathématique de Descartes ; il est seulement proposé de lire, avec quelques explications, un passage assez simple de la "Géométrie" de notre auteur. Cela afin que le lecteur se fasse une opinion personnelle sur document-témoin. Opinion libre qui ne peut que satisfaire cet homme qui se voulait essentiellement un être libre.

Nous sommes en 1637, la "Géométrie" est un des trois appendices parus avec le "Discours de la méthode", sortes d'essais d'applications de la dite méthode.

Au livre III, on trouve la résolution des équations de "dimension quatre (4^e degré)". Nous nous attacherons à la dimension trois que Descartes considère comme un cas particulier.

Les illustrations reproduites sont celles de l'édition originale.

1- Oter le second terme : l'opération est usuelle depuis plus d'un siècle. En posant

$$Z = z + \frac{a}{z}$$

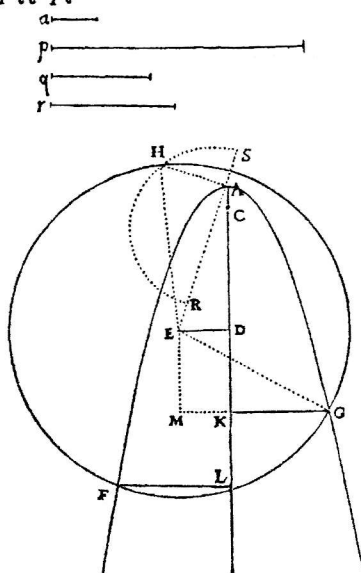
$$z^3 = az^2 + bz + c \text{ devient } z^3 = pz + q$$

2- ∞ retourné, c'est ∞ début des mots en ∞ qu... au sens de rendre égal. Descartes ne commencera à oser du signe = que vers 1642.

L'astérisque marque l'absence du terme en z^2 . Les points veulent dire "plus ou moins" (à ajouter ou à retrancher). Pour Descartes les termes inconnus sont successivement z , y , x , v , ...

S'il use de a^3 , a^4 , Descartes n'a jamais écrit a^2 mais aa .

Premierement il faut oter le second terme de l'Equation proposée, s'il n'est desia nul, & ainsi la reduire à telle forme, $z^3 \propto^* . a p z . a a q$, si la quantité inconnue n'a que trois dimensions, ou bien à telle, $z^3 \propto^* . a p z z . a a q z . a^3 r$, si elle en a quatre, ou bien en prenant a pour l'unité, à telle, $z^3 \propto^* . p z . q . \&$ à telle $z^3 \propto^* . p z z . q z . r$.



On notera l'homogénéité de la relation.

Dimension : ne pas oublier le sens géométrique des grandeurs (voir la figure).

3- Nous sommes en présence de la grande idée de Descartes : prendre a comme unité.

A la première page de la géométrie, il montre que, pour lui, $z=xy$ c'est $\frac{z}{y} = \frac{x}{1}$

Ailleurs il dira que pour $z^2=y$, z est moyenne [proportionnelle] entre y et 1.

4- Les figures qui suivent sont faites pour la dimension

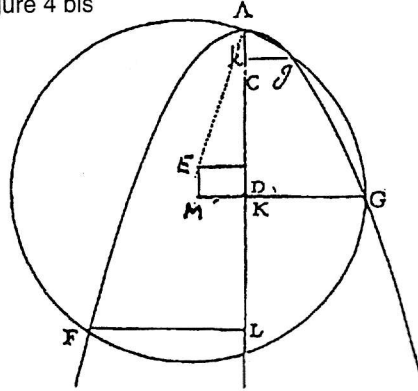
quatre. Nous suivrons, pour la dimension trois, celle où le cercle passe par A (fig 4 bis). On notera que les quantités connues a , p , q , r , sont figurées par des segments de différentes longueurs.

5- La parabole, figure géométrique, est donc élément de base de l'étude et tracée à l'aide de propriétés géométriques.

Côté droit : avec les notations de la figure

«Commentaire par l'auteur», des pages 310 à 396 de la Géométrie de Descartes

Figure 4 bis



4 bis, la parabole satisfait à $KG^2 = aAK - a$ est le côté droit.

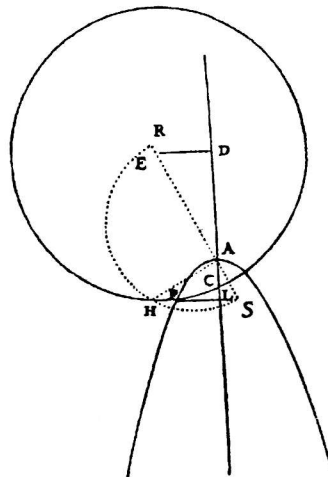
Le foyer F serait défini par $AF = \frac{a}{4}$ si $a=1$, $KG^2 = AK$ et $AF = \frac{AC}{2}$

6- "la" : cette longueur $p/2$

Dans la suite du texte, il semble bien qu'il y ait une coquille. Il faut lire : "le point C au regard du point A", ou bien intervertir "+p" et "-p". On s'en rendra compte aisément en traitant un ou deux exemples numériques simples et dans le texte même un peu plus loin (note 12).

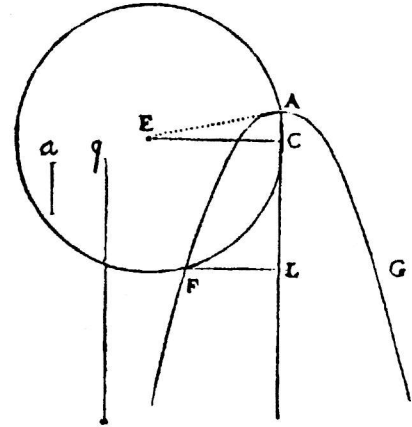
7- La figure de la "géométrie correspond à la dimension trois ($r=0$) mais aussi à $p=0$. La figure 4bis avec le cercle passant en A montre que dans :

$$z^4 = apzz \cdot aaqz$$



Descartes ignore $z=0$ pour ne voir que : $z^3 = apz \cdot aaq = \text{zéro}$ c'est rien

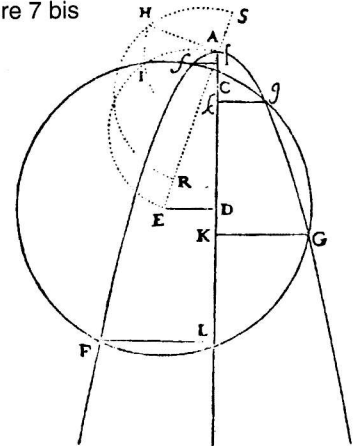
La dimension trois n'est donc qu'un cas particulier de la dimension quatre.



7 bis- Cette figure correspond pour la dimension quatre à "-r" et celle de la page 390 (note 4) à "+r".

8- En dimension trois, le cercle passe par A et "touche" (recoupe) la parabole en 1, 2 ou trois points puis racines vraies ou fausses.

Figure 7 bis



9- La position du centre E par rapport à l'axe de la parabole va cataloguer les segments mesurés sur les perpendiculaires à l'axe. Sens-signe?

- Vraies racines : celles qu'on associe sans problème à des segments.
- fausses racines ou moindres que rien : on voit apparaître inférieures à zéro...

10- Le théorème fondamental de l'algèbre? Dimension n, n racines.

11- Avec la parabole déjà construite on a obtenu un segment tel $KG.0$ on démontre qu'il satisfait bien au problème d'égaliser z^3 et $.pz.q$ (a est 1)

GK est nommé Z

Il n'y a pas un seul ~~so~~ dans la suite du texte,

car avec z, on va désormais évaluer des segments. On ne cherche plus si on peut évaluer des quantités.

12- On a +p et D est au côté de C au regard de A (voir note 6)

13- Parabole : nous écrivons $AK^2=KG$
 $EM^2 = (zz - 1/2p - 1/2)^2$
 $EG^2 = MG^2 + EM^2$ (on assemble)

14- $EA^2 = AD^2 + ED^2$

15- Il y a bien égalité entre EM^2 et EA^2 ,
 $z^4 - pzz + 1/4pp - 1/2p - 1/4 + qz + 1/4qq$ et
 $1/4qq + 1/4pp + 1/2p + 1/4$

En réduisant, $z^4 - pzz + qz$ et il fallait
 $z^4 \propto *pzz - qz$

16- Nous laissons "aux neveux" le plaisir d'étudier $pzz + qz$ et r non nul... Il n'est besoin de s'y arrêter.

Co-ordonnées?
Axes orientés?
Algèbre pour géométrie?
Géométrie pour l'algèbre

C'était une pièce qu dossier
Nous pouvons poursuivre un peu la lecture de la "géométrie" avec deux applications.

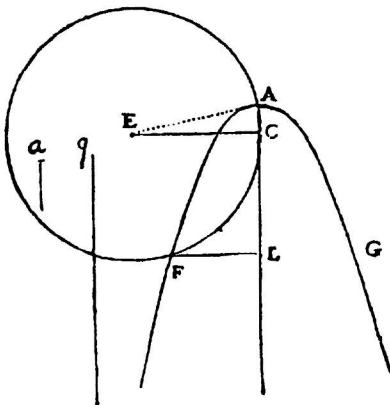
17- On connaît le problème
Trouver z et y tels que

$\frac{a}{z} = \frac{z}{y} = \frac{y}{q}$
alors
 $y = \frac{zz}{a} \quad (\frac{zz}{a})^2 = zq$

18- Il y a donc bien à chercher à rendre égales (Equation)

$\frac{z^3}{aa}$ et q

Nous sommes dans le cas p nul d'où la figure



19- Si FL est z, AI est $\frac{zz}{a}$ puisque pour la parabole AL égale $\frac{FL^2}{a}$ (voir note 5)

20- On veut partager en trois parties égales l'arc NP

21- Avec notre écriture :

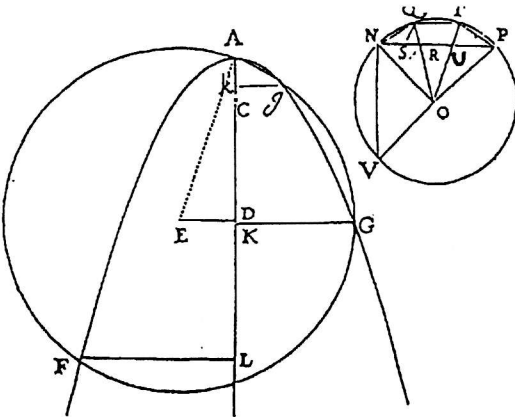
$\frac{NQ}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}, NQ = QT = TP$

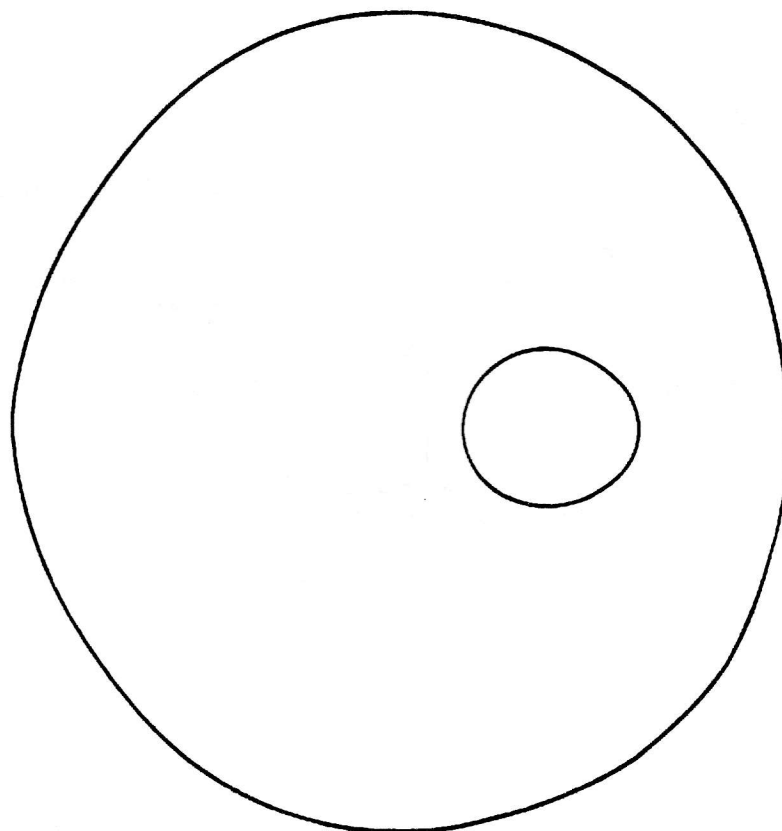
triangles ONQ, NQR, QSR semblables et isocèles en sorte que

$\frac{1}{Z} = \frac{Z}{ZZ} = \frac{ZZ}{RS}$ et $RS = Z^3$

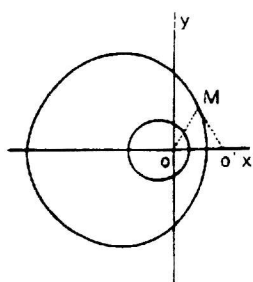
et
 $NP = NR + RU + UP$
 $= NQ + (US - RS) + TP$
 $= NQ + QT - RS + TP$
 $= 3NQ - RS$
 $q = 3Z - Z^3$

$Z^3 \propto 3Z - q$





ovale de descartes



On appelle ainsi les quartiques bicirculaires lieu des points M dont les distances $OM = r$, $O'M = r'$ à deux points fixes O et O' ($OO' = a$) sont liés par une relation de la forme :

$$\alpha r + \beta r' = \gamma$$

α, β, γ étant des quantités constantes.

Dans le cas de la figure, la relation est :

$$|2r - r'| = p$$

p étant d'ailleurs les $\frac{7}{11}$ de a .

l'équation cartésienne de ces courbes est :

$$9(x^2 + y^2)^2 + 6(x^2 + y^2)(2ax + a^2) - 10p^2(x^2 + y^2) + (2ax - a^2 + p^2)^2 = 0.$$

Ces courbes ont été rencontrées par le grand savant DESCARTES dans l'étude d'un problème d'optique géométrique.

Newton, c'est pas seulement la pomme !

Françoise LEDOUX, M.CADIEU - Tours

P.A.E. réalisé au lycée Grandmont, Tours, avec un Terminale Littéraire et une Terminale Technique

Pouquoi ce P.A.E. ?

Nous avons trois types d'objectifs :

- *culturels* : réaliser une exposition pour faire découvrir à la communauté scolaire le savant et ses travaux replacés dans le contexte scientifique et philosophique de l'époque
- *pluridisciplinaires* : mettre en relation plusieurs disciplines (maths, philo, sciences physiques, construction mécanique et atelier)
- *socio-pédagogiques* : faire travailler ensemble des élèves de deux sections bien différenciées.

Comment travailler?

A partir de textes originaux de Newton et à plusieurs reprises dans l'année. Trois grands thèmes ont été étudiés. Ils ont permis de rester dans le cadre du programme (en terminale ne l'oublions pas !) en donnant cependant une vision plus large des maths. Les deux premiers ont donné lieu à des travaux de groupes, les deux classes

étant mélangées. Le troisième a fait l'objet d'une recherche individuelle.

1er thème : Newton et le Calcul (infinitésimal)

Avant d'aborder la fiche avec les élèves les profs de maths ont fait un exposé pour situer l'oeuvre de Newton dans la connaissance de l'époque en maths et en astronomie.

La méthode des fluxions (extrait page 30 + fiche) : Le déchiffrement du texte a été laborieux et a nécessité de notre part nombreux commentaires et diverses formulations. En revanche les calculs n'ont présenté aucune difficulté. Cette fiche a eu pour suite l'étude de la courbe d'équation

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

sous la forme d'un devoir en temps libre. Ce fut pour les élèves (littéraires surtout) l'occasion de rencontrer une ellipse.

Devoir : On pourrait même étudier les variations de f et g en C ou D ...

2ème thème : Recherche d'une solution approchée d'une équation

L'étude détaillée d'un second texte original justifie la méthode connue sous le



Si de **NEWTON** vous ne connaissez que la pomme....

nom de "méthode Newton" et a donné l'occasion d'utiliser les calculatrices programmables. Cela a permis aux élèves de fournir un travail approfondi et qui nous a paru profitable. Cette fiche nous semble directement utilisables dans la plupart des classes de 1° ou Terminale.

3ème thème : Newton et le nombre π

Il s'agissait de calculer une aire à partir de la géométrie (ce qui n'est pas inutile), de voir ou revoir la formule du binôme et d'approcher les méthodes de découverte utilisées au XVIIème siècle.

Les autres activités

D'autres activités ont eu lieu : conférence sur Newton par un spécialiste d'histoire des sciences, recherches sur les travaux de Newton en physique... et surtout construction à l'atelier par les terminale F1 (avec leur professeur) de la BRACHISTOCHROME.

Cette réalisation illustre le problème posé par J.Bernoulli et résolu par Newton : "soit deux points A et B, trouvez la courbe telle que le trajet d'une bille suivant cette courbe soit le plus court possible en temps?"

La solution est une demi-cycloïde (bien sûr !). La forme a été usinée en machine outil à commande numérique à partir des équations de la cycloïde. Pour concrétiser la propriété caractéristique de la Brachistochrone, les élèves de F1 (et leur professeur) ont construit le dispositif expérimental et ça marche!



Représentée assise sur une planète, la déesse grecque Artémis tient ici le portrait de Newton. Newton, fondateur de la science moderne, s'intéressera également à l'astrologie, à l'alchimie, à la théologie occulte et non conventionnelle

L'exposition

L'exposition a eu lieu au lycée. La plupart des panneaux (mais pas tous hélas!) ont été une synthèse des travaux faits dans le courant de l'année par les élèves. Titre des panneaux : 1642 (devinez pourquoi?), la vie d'Issac Newton, les maths, l'astronomie, l'optique, la mécanique, la philo, Newton vu par ... (des artistes à différentes époques), l'histoire de la brachistochrone.

Pour animer l'exposition, diverses manipulations l'ont accompagnée : le tube de Newton, la synthèse de la lumière et sa décomposition par le prisme, le disque de Newton et la brachistochrone.

Bilan

Plus de trente classes du lycée ont visité l'exposition. Des élèves sont venus individuellement en dehors de leur heures de cours ainsi que des parents et de nombreux professeurs et personnels de labo. La durée de l'exposition a été trop brève pour que toutes les demandes de visite aient pu être satisfaites.

Les classes concernées par le P.A.E. étaient deux classes de Terminale dont l'objectif prioritaire, et légitime, est la préparation du baccalauréat. C'est pourquoi les élèves ont été assez passifs pendant une partie de l'année. La participation du plus grand nombre n'a été effective que dans la mesure où les travaux avaient lieu pendant les heures de cours, quelques élèves ont cependant effectué des recherches intéressantes.

Les apports réciproques des deux classes ont été décevants. Bien qu'ayant travaillé ensemble, en maths par exemple, et assisté en commun à une conférence sur Newton, les deux classes sont restées très différenciées et les réalisations spécifiques aux sections. La proximité de l'examen ne nous a pas permis d'approfondir ce problème comme nous l'aurions souhaité.

En conclusion, nous avons constaté qu'il était difficile d'entreprendre un tel travail avec des classes de Terminale. Pourtant le sujet étudié, d'une part était des programmes pour certaines disciplines et d'autre part permettait à tous les élèves une réflexion sur l'histoire des sciences.

Les animateurs ont cependant trouvé cette expérience enrichissante.

Devoir : Newton et le calcul

Ce calcul (ou calcul infinitésimal ou calcul différentiel et intégral) est exposé dans un ouvrage intitulé :

*"Methodus fluxionum et serieirum infini-
nitorum"*

Ce manuscrit latin commencé en 1664 fut publié quelques années plus tard en anglais.

Les textes ci-joints sont extraits d'une traduction française faite en 1740 par Buffon.

I - Etude de l'extrait de la Méthode des Fluxions

1° Lire et commenter les articles LV, LVI, LVII, LX et LXI

2° Voir le problème I proposé par Newton, la solution indiquée et la démonstration de cette solution.

Refaire les calculs des articles XVI et XVII

3° Soit la courbe d'équation

$$8x^3 - 7x^2 + 5 - y = 0$$

En utilisant la méthode des fluxions, calculer $\frac{y}{z}$.

Commenter le résultat obtenu.

Même question, en considérant la courbe d'équation $y^2 - x = 0$

4° Formuler en langage actuel les notions de FLUXIONS et FLUENTES

II - Précisions et précautions de Newton dans ses différents travaux

Newton a exposé sa conception du

« By ultimate velocity I understand that with which the body is moved, neither before it arrives at the ultimate position and the motion ceases, nor thereafter, but just when it arrives ; that is, that very velocity with which the body arrives at the ultimate position and with which the motion ceases. And similiary for the motion of evanescent quantities is to be understood the ratio of quantities, not before they vanish, nor thereafter, but with which they vanish ».

« Ultimate ratios in which quantities vanish are not, strictly speaking, ratios of ultimate quantities, but limits to which the ratios of these quantities, decreasing without limit, approach, and which, though they can come nearer than any difference whatever, they can neither pass over nor attain before the quantities have diminished indefinitely » (Principia, édition anglaise).

Calcul dans de nombreux écrits, en essayant de préciser le mieux possible sa pensée.

- En ce qui concerne le temps voilà ce qu'il cite dans sa méthode des Fluxions:

- Dans des lettres adressées à J. Wallis en 1692, il écrit :

(Cum autem temporis nullam habeamus aestimationem nisi quatenus id per aequabilem motum localem exponitur et mensuratur, et praeterea cum quantitates ejusdem tantum generis inter se conferri possint et earum incrementi et decrementi celeritates inter se, eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed e propositis quantitatibus quae sunt ejusdem generis aliquam aequabili fluxione augeri fingam cui caetera tanquam tempori referantur adeoque cui nomen temporis analogice tribui mereatur.)

Enfin ces mêmes notions sont reprises dans l'ouvrage célèbre consacré au Système du monde dont la première édition en langue latine fut publiée en 1687 sous le titre :

*"De philosophia naturalis principia
mathematica"*

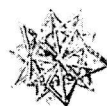
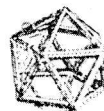
Dans la section I du livre I intitulée "La méthode des premières et dernières raisons" Newton écrit :

"Data aequatione fluentes quocunque quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa. Per fluentes quantitates intelligit indeterminatas id est quae in generatione Curvarum per motum localem perpetuo augentur vel diminuuntur, et per eorum fluxionem intelligit celeritatem incrementi vel decrementi"

"Il faut entendre par la dernière raison des quantités évanouissantes la raison qu'ont entre elles des quantités qui diminuent non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles se sont évanouies mais au moment même où elles s'évanouissent".

Dans la même partie de l'ouvrage, on peut extraire les passages suivants (Principia, édition anglaise)

Quelles sont les notions sous-jacentes à ces précisions apportées par Newton?



"Nous ne pouvons cependant avoir aucune estimation du temps excepté en tant qu'il a été exprimé et mesuré par un mouvement local uniforme, et d'ailleurs, uniquement par des quantités de même sorte, ainsi leurs vitesses d'augmentation et de diminution peuvent aussi être comparées entre elles. Pour ces raisons, dans ce qui suit, je ne m'occuperai pas du temps, considéré ainsi formellement, mais, à partir de quantités proposées qui sont de même sorte, je supposerai que l'une d'elles augmente de façon uniforme : toutes les autres peuvent alors lui être référées comme si le temps existait, et ainsi, le nom de "temps" peut convenir et lui être conféré".

"Etant donné une équation comportant un nombre quelconque de "fluents" trouver les "fluxions" et vice-versa. Il faut entendre par fluentes des quantités qui sont augmentées ou diminuées uniformément par le mouvement local dans la génération des Courbes et entendre par fluxions la vitesse de leur augmentation ou de leur diminution".

Fiche d'activité

Recherche d'une solution approchée d'une équation - Méthode de Newton

A) Extrait de la "Méthode des fluxions" (XX et XXI)

Dans ces articles Newton expose une méthode permettant d'approcher une racine de l'équation : $y^3 - 2y - 5 = 0$

Pour en revenir aux notations actuelles, on désignera par f la fonction définie sur A par $f(x) = x^3 - 2x - 5$ et par (C) sa courbe représentative.

1) Newton affirme dans les trois premières lignes de l'article XX que l'équation $f(x) = 0$ a une solution ∞ comprise entre 2 et 2,1. Démontrer cette affirmation.

2) Newton donne une méthode pour trouver une meilleure approximation de ∞ . Ses calculs, qui peuvent être continués "aussi longtemps qu'il convient" (dernière ligne du XX) les conduisent à donner 2,09455148 comme valeur approchée de ∞ (2 dernières lignes du XXI). Nous allons étudier ses calculs.



Issac Newton, très grand chef d'école resté simple

a) Calcul de p (lignes 3 à 7 du XX)

Newton pose $x = 2 + p$ et calcule $f(2 + p) = g(p)$. En négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 2, la résolution de $f(2 + p) = 0$ donne $p = 0,1$

- Ecrire $g(p)$
- Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse 2 et f_0 la fonction affine représentée par (T_0) .
- En posant $x = 2 + p$, vérifier que Newton détermine p en remplaçant la résolution de $f(x) = 0$ par $f_0(x) = 0$

Autrement dit Newton, pour x voisin de 2, prend la fonction affine f_0 pour approximer.

b) Calcul de q (lignes 7 à 16 du XX)

Newton pose $p = 0,1 + q$ et calcule $f(2 + 0,1 + q) = g(q + 0,1) = h(q)$. En négligeant les termes de degré supérieur

ou égal à 2 la résolution de $h(q) = 0$ donne q environ égal à -0,0054.

- Ecrire $h(q)$
 - Déterminer une équation de la tangente (T_1) à (C) au point d'abscisse 2,1 et f_1 la fonction affine représentée par (T_1)
 - En posant $x = 2,1 + q$ vérifier que Newton détermine q en remplaçant la résolution de $f(x) = 0$ par $f_1(x) = 0$
- Autrement dit Newton, pour x voisin de 2,1 prend la fonction f , pour approximer f

c) Calcul de r

Newton pose $q = -0,0054 + r$ et procède comme pour p et q ...

Toutes ces remarques ont permis à Raphson en 1690 et Thomas Simpson en 1740 de modifier la méthode exposée par Newton.

B) Méthode d'approximation sous sa forme actuelle

Sachant que l'équation $f(x) = 0$ a un racine ∞ comprise entre a et b , il s'agit de donner une valeur approchée de ∞ .

- 1) soit (C) la courbe représentative de f
Soit M_0 le point de (C) d'abscisse $x_0 = a$ et (T_0) la tangente en M_0 à (C). (T_0) coupe l'axe (0,i) au point d'abscisse x_1 .
Soit M_1 le point de (C) d'abscisse x_1 et (T_1) la tangente en M_1 à (C). (T_1) coupe l'axe (0,i) au point d'abscisse x_2 .
Soit M_2 le point de (C) d'abscisse x_2 et (T_2) la tangente en M_2 à (C). (T_2) coupe l'axe (0,i) au point d'abscisse x_3 .
etc...

Effectuer les constructions et observer sur la figure que les abscisses $x_0, x_1, x_2, \dots$ sont de plus en plus proches de ∞ .

- 2) Soit A le point d'abscisse a de (C)

- Déterminer une équation de la tangente (T) en A à (C)
- Montrer que l'abscisse du point d'intersection de (T) et de l'axe (0,i) est

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = l(a)$$

On peut calculer de la même façon

$$x_2 = l(x_1), x_3 = l(x_2), \dots$$

La suite des nombres $x_1, x_2, x_3, \dots$ converge en général vers ∞

- 3) Soit $f(x) = x^3 - 2x - 5$

- Déterminer la fonction l
- A l'aide de votre calculatrice programmable, déterminez la suite des valeurs $a = 2, x_1 = l(2), x_2 = l(x_1), \dots$ et retrouver la valeur approchée donnée par Newton.

C) Application

- Utiliser la méthode de Newton (actualisée!) pour résoudre les équations suivantes:

$$1) x^5 + 5x + 2 = 0$$

$$2) x^3 - x - 1 = 0$$

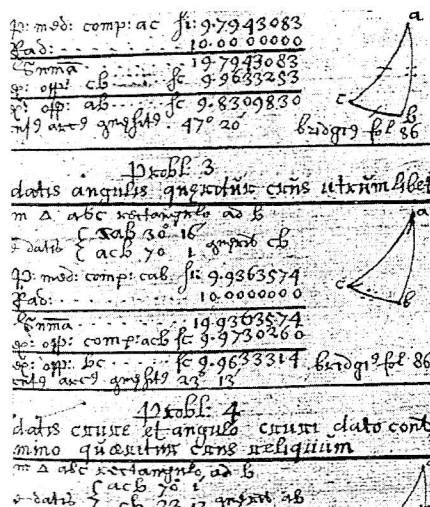
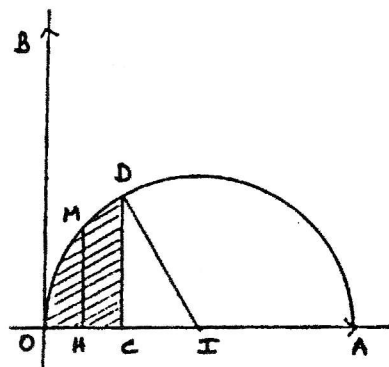
$$3) x - \cos x = 0$$

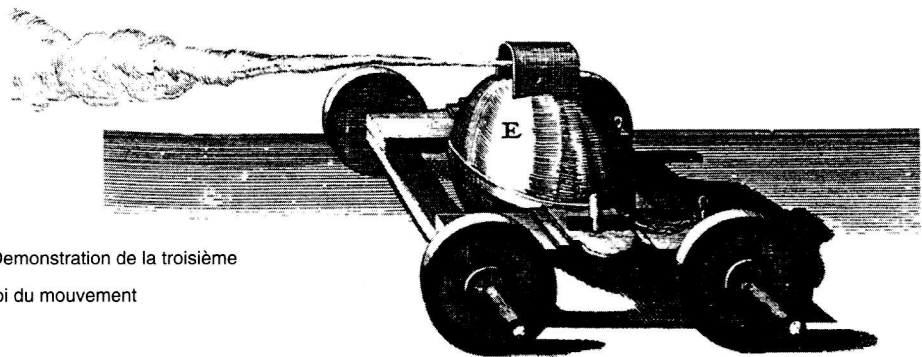
$$4) x + \ln x = 0$$

On donnera des valeurs approchées des solutions à 10^{-5} près.

Newton et le nombre π

En utilisant deux méthodes différentes pour calculer l'aire d'une portion de disque - domaine hachuré de la figure ci-dessous - Newton obtient une valeur approchée de π .





Demonstration de la troisième loi du mouvement

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O,OA,OB)
I est le centre du demi cercle de diamètre [OA]
D est le point de ce demi-cercle d'abscisse 1/4, C est la projection orthogonale de D sur (O,OA)
(E) désigne le domaine hachuré.

A - Méthode géométrique

- a) Montrer que le triangle OID est équilatéral. En déduire une mesure de l'angle OID et l'aire du secteur COI.
- b) Calculer CD et en déduire l'aire du triangle CDI.
- c) Montrer que l'aire A1 de (E) est :

$$A_1 = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}$$

B - Méthode d'intégration

- a) M étant un point de demi-cercle d'abscisse x(0≤x≤1/4)
- b) En déduire que l'aire (A2) de (E) est:

$$A_2 = \int_0^{1/4} x^{1/2}(1-x)^{1/2} dx$$

- c) Soit f la fonction définie sur [0,1/4] par $f(x)=x^{1/2}(1-x)^{1/2}$

Pour trouver une primitive F de f sur [0,1/4], Newton étend la formule du binôme aux exposants rationnels.

- 1°) En utilisant cette formule pour n entier naturel non nul, donner le développement de $(1-x)^n$.
- 2°) Vérifier en prenant n=1/2 que $(1-x)^{1/2}$ peut s'écrire :

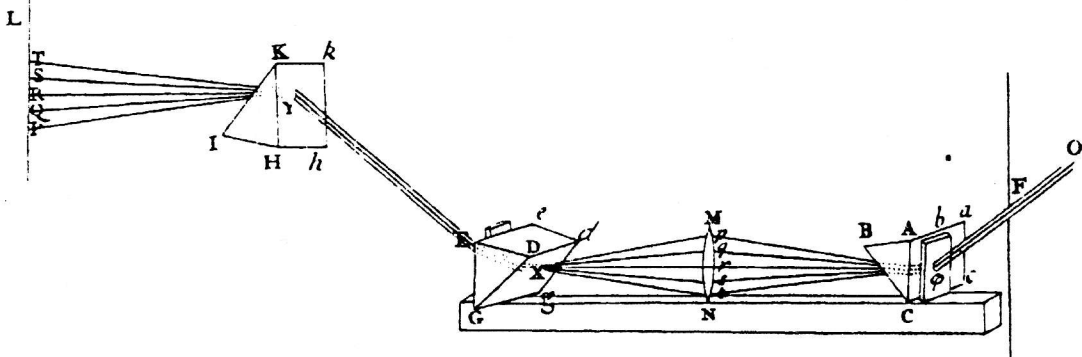
$$(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

- ce développement pouvant être poursuivi aussi loin que l'on veut.
- 3°) En déduire le début du développement de f(x). En intégrant terme à terme on obtient un développement de F(x). Ecrire les premiers termes de celui-ci.
- 4°) Montrer alors que :

$$A_2 = \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{5}(\frac{1}{2})^5 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7}(\frac{1}{2})^7 - \frac{3}{4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{9}(\frac{1}{2})^9 - \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{11}(\frac{1}{2})^{11} \dots$$

C - Calcul de π
Puisque $A_1 = A_2$, $\pi = 24(\frac{\sqrt{3}}{32} + A_2)$

On peut trouver une valeur approchée de π, à partir de cette formule. La valeur approchée sera d'autant plus pré-



cise que le nombre des termes de A_2 est grand.

1°) En calculant les cinq premiers termes de A_2 , donner une valeur approchée de π .

2°) Voici deux programmes, l'un en BASIC, l'autre utilisable sur une CASIO FX 180, permettant d'actualiser la méthode et d'aller plus loin dans la détermination des décimales de π . $\square$

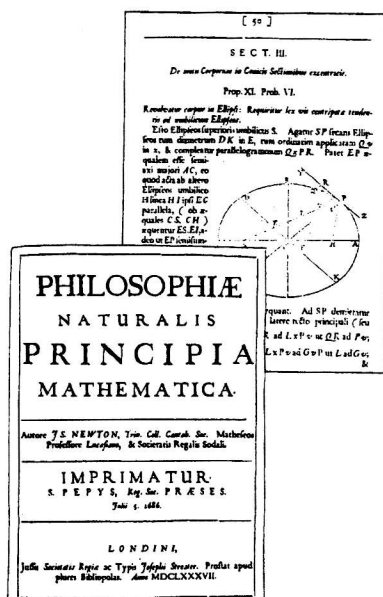
BASIC

```
10 S=  $\sqrt{3}/32 + 1/12 - 1/160$ 
20 I=7: N=4: J=1: K=1: P=4
30 A= - K/P * 0.5  $\uparrow$  I/I
40 S= S+A: T= 24 * S
50 PRINT I, T
60 I= I+ 2: J= J+2 : K= K*J
70 N= N+2: P= P*N
80 GO TO 30
```

CASIO FX 180

```
2 Kin + 1
Kout2 / Kout3 * 0.5 x= Kout1 / Kout1 = Kin - 4
Kout4 * 24 = HLT
2 Kin + 5
Kout2 * Kout5 = Kin2
2 Kin + 6
Kout3 * Kout6 = Kin3
RTN
```

avant de débiter $5 \text{ Kin}1 ; 1 \text{ Kin}2 ; 4 \text{ Kin}3 ;$
 $\sqrt{3}/32 + 1/12 - 1/160 = \text{Kin} 4 ;$
 $1 \text{ Kin} 5 ; 4 \text{ Kin} 6$

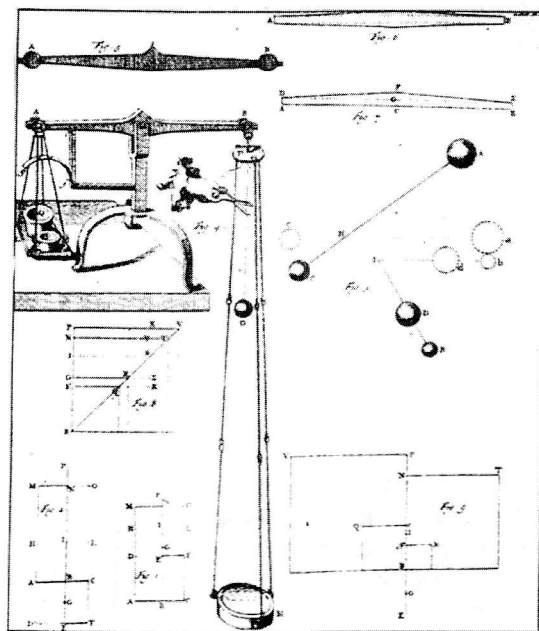


Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 .
 Glorieux Archimède, artiste ingénieur,

8 9 7 9
 Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,

3 2 3 8 4 6 2 6
 Soit ton nom conservé par de savants grimoires !
 4 3 3 8 3 2 7 9



Dans cette expérience effectuée en Hollande, on utilisait des règles graduées pour tester les prédictions concernant la chute des corps

METHODE DES FLUXIONS

L V. En voilà tout autant qu'il en faut de dit sur ces Methodes de calcul, dont je ferai un frequent usage dans la suite. Reste maintenant à donner quelques essais de Problèmes, sur-tout de ceux que nous présente la nature des Courbes, & cela pour mettre l'Art Analitique dans un plus grand jour. Et d'abord j'observerai que toutes leurs difficultés peuvent se reduire à ces deux Problèmes seulement que je vais proposer sur un espace décrit par un mouvement local retardé ou accéléré d'une façon quelconque.

LVI. 1. *La longueur de l'Espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du Mouvement à un tems donné quelconque.*

LVII. 2. *La vitesse du Mouvement étant continuellement donnée, trouver la longueur de l'Espace décrit à un tems donné quelconque.*

L X. J'appellerai *Quantités Fluents*, ou simplement *Fluents* ces Quantités que je considere comme augmentées graduellement & indefiniment, je les représenterai par les dernieres Lettres de l'Alphabet v, x, y & z pour les distinguer des autres quantites qui dans les Equations sont considerées comme connues & déterminées qu'on représente par les Lettres initiales a, b, c , &c. & je représenterai par les mêmes dernieres Lettres surmontées d'un point $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ & $\dot{z}$ les vitesses dont les Fluents sont augmentées par le mouvement qui les produit, & que par conséquent on peut appeler *Fluxions*. Ainsi pour la Vitesse ou Fluxion de v je mettrai $\dot{v}$, & pour les vitesses de x, y, z je mettrai $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ respectivement.

LXI. Ces choses étant ainsi préparées, je vais entrer en matière & donner d'abord la solution des deux Problèmes que je viens de proposer.

M E T H O D E P R O B L E M E I.

Etant donnée la Relation des Quantités Fluantes, trouver la Relation de leurs Fluxions.

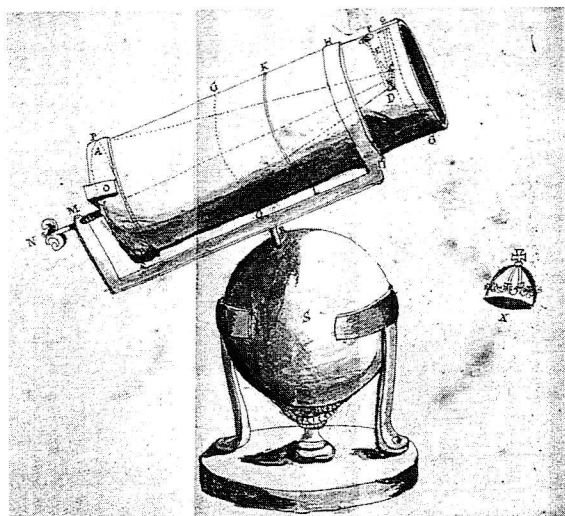
S O L U T I O N.

I. **D**ISPOSEZ l'Equation par laquelle la Relation donnée est exprimée suivant les Dimensions de l'une de ses Quantités Fluantes x par exemple, & multipliez ses Termes par une Progression Arithmétique quelconque, & ensuite par $\frac{x}{x}$ faites cette Operation séparément pour chacune des Quantités Fluantes ; après quoi égalez à zero la somme de tous les produits, & vous aurez l'Equation cherchée.

II. **EXEMPLE I.** Si la Relation des Quantités Fluantes x & y est $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, disposez d'abord les Termes suivant x , & ensuite suivant y , & multipliez-les comme vous voyez.

Multipliez	x^3	$-ax^2$	$+axy$	$-y^3$	$+axy$	$-ax^2$	
par	$\frac{3x}{x}$	$\frac{2x}{x}$	$\frac{x}{x}$	0	$\frac{3y}{y}$	$\frac{2y}{y}$	0
Vous aurez	$3xx^2$	$-2axx$	$+axy$	$*$	$-3yy^2$	$+ayx$	$*$

la somme des produits est $3xx^2 - 2axx + axy - 3yy^2 + ayx$, qui étant égale à zero, donne la Relation des Fluxions $\dot{x}$ & $\dot{y}$; car si vous donnez à volonté une valeur à x , l'Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, donnera la valeur de y ; ce qui étant déterminé, l'on aura $x:y :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.



Démonstration de la Solution.

XIII. Les momens des Quantités Fluents (c'est-à-dire leurs parties indefiniment petites, par l'accession desquelles, dans des parties indefiniment petites de tems, elles sont continuellement augmentées) sont comme les Vitesses de leur Flux ou Accroissement.

XIV. Si donc le produit de la Vitesse $\dot{x}$ par une Quantité indefiniment petite o , c'est-à-dire, si $\dot{x}o$ représente le moment d'une Quantité quelconque x , les momens des autres y , z seront représentés par $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, parce que $\dot{y}o$, $\dot{z}o$ sont chacuns comme y , z .

XV. Puis donc que les momens comme $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ sont les accessions ou augmentations indefiniment petites des Quantités Fluents x & y pendant les indefiniment petits intervalles de tems, il suit que ces Quantités x & y après un intervalle indefiniment petit de tems, deviennent $x + \dot{x}o$ & $y + \dot{y}o$, & par conséquent l'Equation qu'en tout tems exprime également la Relation des Quantités Fluents, exprimera la Relation entre $x + \dot{x}o$ & $y + \dot{y}o$ tout aussi-bien qu'entre x & y ; ainsi on peut substituer dans la même Equation $x + \dot{x}o$ & $y + \dot{y}o$, au lieu de x & y .

XVI. Soit donc l'Equation donnée quelconque $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ je substitue $x + \dot{x}o$ pour x , & $y + \dot{y}o$ pour y , & j'ai

$$\left. \begin{aligned} & x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^3 \\ & - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 \\ & + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 \\ & - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^3 \end{aligned} \right\} = 0$$

XVII. Maintenant j'ai par la supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, j'efface donc ces Termes dans l'Equation précédente, & ayant divisé par o tous les Termes qui restent, j'aurai $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 + 3\dot{x}^2ox - a\dot{x}^2o + a\dot{y}x - 3\dot{y}^2oy + \dot{x}\dot{y}o^2 + a\dot{x}\dot{y}o - \dot{y}^3o^2 = 0$. Mais comme o a dû être supposé infiniment petit, pour pouvoir représenter les momens des Quantités, les Termes qu'il multiplie sont nuis en comparaison des autres, je les rejette donc, & il me reste $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, comme ci-dessus dans l'Exemple premier.

XVIII. On peut observer ici que les Termes qui ne sont pas multipliés par o s'évanoüissent toujours, comme aussi ceux qui sont multipliés par o élevé à plus d'une Dimension, & que le reste des Termes étant divisé par o acquiert la forme qu'il doit avoir par la règle prescrite; & c'est ce qu'il falloit prouver.

Christiaan Huygens

Par Henk J.M. BOS, Professeur à l'université d'Utrecht.

Christiaan Huygens domine la génération de ceux qui, au XVII^e siècle, ont provoqué la révolution scientifique : l'émergence d'une approche essentiellement moderne de la compréhension et du contrôle de la nature..

**Galilée, Descartes,
Huygens, Newton, Leibniz**

Bien connu maintenant pour le "principe de Huygens" en optique géométrique, pour sa découverte de l'anneau de Saturne et pour l'invention des horloges à pendule, Huygens fut le chef de file européen des sciences physiques durant vingt ans, entre 1660 et 1680. La première phase de la révolution scientifique, dominée par Galilée et Descartes, était terminée. La vision d'une science de la nature, fondée sur l'expérience et l'expérimentation, à la recherche de lois quantitatives, utilisant une vue mécanique d'un monde réductionniste, avait été établie en dépit des différences d'opinion à ce sujet parmi les philosophes et les scientifiques.

En 1642, à la mort de Galilée, Christiaan Huygens, âgé de 12 ans, recevait chez lui une éducation soignée, surveillée de près par son père Constantin. Descartes fréquentait alors l'imposante maison Huygens sur le "Plein" à La Haye, parlant sciences avec Constantin. Bientôt, le fils étudia les œuvres du célèbre visiteur ; il fut séduit par la nouvelle philosophie mécaniste et sut rapidement utiliser les toutes nouvelles mathématiques cartésiennes. Vingt-cinq ans plus tard, Huygens à Paris, au sommet de sa réputation et de sa carrière voit émerger les deux jeunes gens qui allaient conduire la troisième étape de la révolution scientifique : Newton qui établissait la mécanique sur le concept nouveau de gravitation universelle et Leibniz qui, avec Newton, préparait les mathématiques au développement des sciences mécaniques. Huygens et Newton engagèrent une vive discussion sur l'origine des couleurs; Leibniz sollicitait l'avis de Huygens en



Portrait de Christiaan Huygens par Gérard Edelinck (1640-1707).

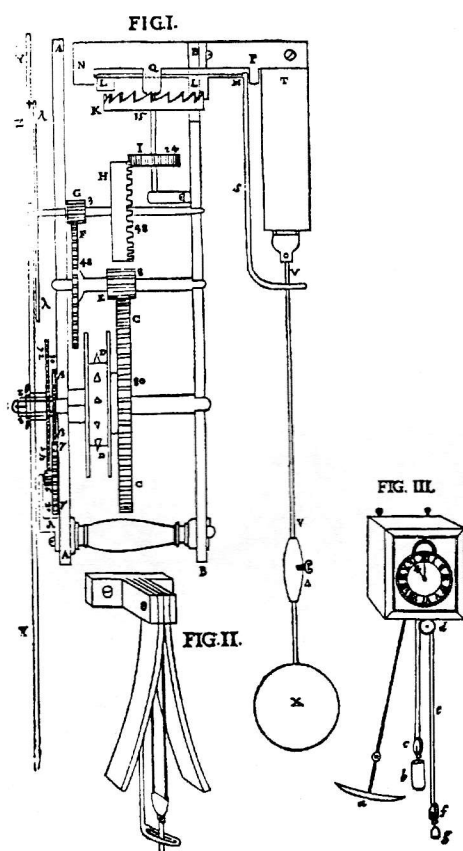
Paris, Archives Larousse

© Lauros - Giraudon

mathématique. Tout au long de leurs carrières respectives ces deux jeunes disciples gardèrent une haute estime pour Huygens. En annonçant la mort de Huygens à Jean Bernoulli en 1695, Leibniz qualifiait le vieux maître "L'incomparable Huygens".

Les débuts

Christiaan Huygens naquit dans une famille de noblesse terrienne qui avait acquis



une situation éminente dans la jeune république des Pays-Bas. Son grand-père, son père et son frère servirent comme secrétaires et diplomates les princes d'Orange. Son père acquit lui-même une réputation durable dans le domaine des lettres et de la musique à travers ses poèmes et ses compositions. Christiaan, ses trois frères et sa sœur reçurent une éducation qui leur permit d'évoluer avec aisance dans la société la plus recherchée. En 1649, quand ses premières études à Leyde et à Breda furent terminées, Christiaan fut chargé d'une brève mission diplomatique. Mais, bientôt, un changement temporaire dans la politique hollandaise écarta la possibilité d'une carrière dans la diplomatie. Huygens n'en fut pas peiné. Resté dans la maison de ses parents il s'adonna presque totalement à ses intérêts scientifiques. Vers 1655, à travers un grand nombre de publications, son nom était déjà bien connu parmi les spécialistes européens des sciences mathématiques.

En 1658-1659, il publia ses découvertes sur l'horloge à pendule et sur l'anneau de Saturne ; il devint alors célèbre. Il se rendit à Paris, et à Londres, fut élu "Fellow of the Royal Society" (1663) et reçut une pension de Louis XIV (1664).

En France

Comme scientifique Huygens a deux patries, la Hollande et la France. La Hollande lui a donné un cadre idéal de formation : une famille portée à la recherche, une éducation très complète et un environnement culturel ouvert aux nouveaux développements de la science. Mais c'est la France qui donna à Huygens une reconnaissance officielle comme savant. Quand en 1666, l'Académie royale des sciences fut fondée, Huygens fut invité à faire partie de ses premiers membres. Il accepta, reçut une pension et disposa d'un appartement à la "Bibliothèque royale". Dans cet environnement, il écrivit la version définitive de sa théorie du mouvement oscillatoire et de l'horloge à pendule, publiée dans *Horologium Oscillatorium* en 1673, élaborata sa théorie de la lumière et présenta ses découvertes à ses confrères académiciens.

Quelque flatteuse et prestigieuse que fût la nouvelle situation de Huygens, elle dépendait du soutien politique des puissants, en l'occurrence Colbert. Au début des années 1680, le pouvoir de Colbert déclinait. Huygens retourna en Hollande en 1681 pour des raisons de santé. Sentant venir des changements en France, il n'y retourna pas aussitôt rétabli et, à sa grande déconvenue, ne fut pas prié de le faire. Il resta aux Pays-Bas.

Les dernières années

Les dernières années de sa vie furent solitaires mais non inactives. Huygens entretenait une importante correspondance ; il voyagea en Angleterre en 1689, rendant visite à Newton, et publia son *Traité de la lumière* en 1690. Il vivait à La Haye et dans la maison de campagne de sa famille, Hofwijck, non loin de là.

La solitude de ses dernières années ne provenait pas seulement de circonstances extérieures ; par nature Christiaan Huygens était plus renfermé que sociable. Dans sa jeunesse il avait dédaigné les modes de la "jeunesse dorée" de son milieu ; les études solitaires lui convenaient mieux. Il pouvait être charmant, se plaisait dans la

compagnie des dames, mais il ne se maria jamais. La gaieté n'était pas son fait encore moins l'excitation mais il appréciait la grâce et l'élégance. Il était capable d'indignation et d'amertume, en particulier si sa réputation scientifique était en jeu. Il était aussi sujet aux rechutes d'une maladie mal définie qui entraînaient des périodes de profonde dépression.

Signification

Le rôle de Huygens dans la révolution scientifique est différent de celui des chefs de file de la génération qui l'a précédé ou de ceux qui l'ont suivi. Il n'a pas laissé d'empreinte sur la philosophie naturelle du moment. En fait, dans une époque révolutionnaire, il fut plutôt conservateur, adepte d'une approche mécaniste pour comprendre la nature et d'un style géométrique classique en mathématiques. La première pouvait ne pas prendre ou assimiler la nouvelle perception de la gravitation universelle, le second devait être bientôt remplacé par les méthodes nouvelles de calcul des fluxions de Newton et de calcul différentiel de Leibniz.

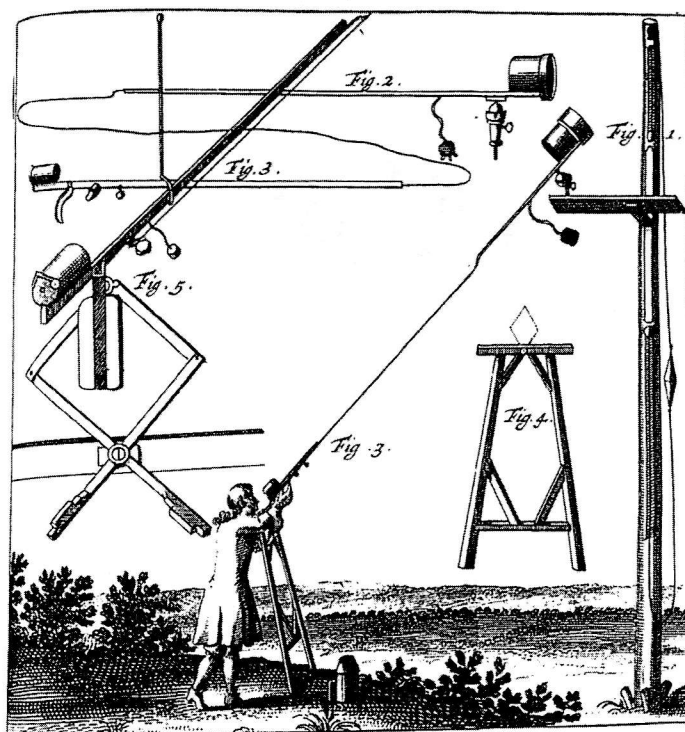
Une liste même abrégée des découvertes de Huygens, comme celle qui suit, montre l'importance fondamentale de ses contributions à la science : sa théorie des collisions fondée sur le principe de la rela-

tivité des mouvements, sa découverte de l'anneau de Saturne, son invention de l'horloge à pendule, sa théorie du mouvement oscillatoire $\left(T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}\right)$ et du centre d'oscillation, sa théorie mathématique relative à la rectification des arcs de courbes et aux développées, son traitement des probabilités, les lois de la force centrifuge, sa théorie des ondes, ou du moins des impulsions lumineuses.

Son importance cependant transcende le total de ses apports pris séparément ; Huygens a montré, plus clairement que Galilée et Descartes et avec une intensité que Leibniz et Newton n'ont pas surpassée, le pouvoir exploratoire d'une approche mathématique pour l'étude des phénomènes naturels et l'efficacité de son application aux techniques. A cet égard toutes les sciences naturelles et mathématiques lui sont redevables.

La lunette de Huygens

Il y a trois siècles, entre les années 1670 et 1700, une méthode d'observation du ciel complètement originale fut mise en œuvre à l'Observatoire de Paris, alors nouvellement créé. Découvrant que la qualité d'une lunette astronomique pouvait être améliorée en augmentant considérable-



La lunette astronomique de Huygens.
© Société astronomique de France

ment la longueur de l'instrument, Christiaan Huygens équipa l'Observatoire de Paris de lentilles de très long foyer, utilisées à l'aide de mâts et de tours (la tour de Marly transportée à l'Observatoire), l'instrument étant pointé et centré à l'aide d'un filin tendu au bras.

Entre les mains de Jean-Dominique Cassini et de Christiaan Huygens, cette méthode alors révolutionnaire apporta un nombre impressionnant de découvertes dans l'étude du système solaire : mesure des dimensions des planètes et analyse des configurations de leur surface, découverte de satellites, autour de la planète Saturne : Japet en 1671, Rhéa en 1672, Dioné et Thétys en 1684, découverte de la division

dite de Cassini séparant les anneaux de Saturne (1675), cartes de la lune (1692), gravées par Claude Mellan, tables des mouvements des satellites dont résulta la découverte par le Danois Oleaeus Römer de la vitesse de la lumière.

Cette extraordinaire floraison de découvertes et de données fondamentales apparaît comme un événement bref, dense et bien localisé dans le développement des connaissances, la méthode ayant été délaissée après le décès des intéressés. □

Audouin Dollfus
Astronome titulaire de
l'Observatoire de Paris

Publications récentes

Huygens et la France : Table ronde, paris, 27-29 mars 1979, Vrin, 1982, coll. "L'histoire des sciences".

Œuvres en librairie

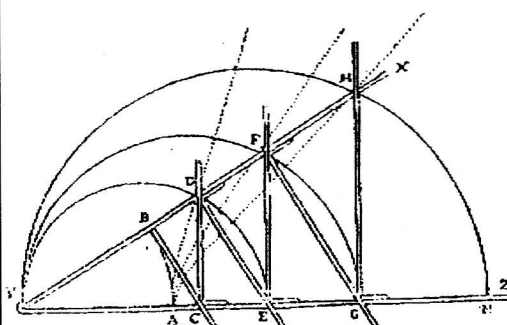
Les œuvres complètes de Huygens sont éditées depuis 1888 par la Société hollandaise des sciences. A ce jour, 22 volumes ont été publiés.

Faites abonner votre CDI
à PLOT

"A quoi servent les
solutions impossibles?"
Albert Girard - 1629

Descartes, les nombres et la géométrie

Jean Dhombres - Nantes



Afin de mieux faire comprendre les avatars ultérieurs de la notion de nombre, il nous faut parcourir rapidement l'histoire des équations. Nous n'entrerons dans aucun détail mathématique, car cela sortirait de notre propos.

On sait que les Italiens (Cardan, Ferrari, Scipione del Ferro, Tartaglia, etc.) ont réussi à obtenir un procédé pour calculer les racines d'une équation du 3^e degré et du 4^e degré. Le récit de ces découvertes tient de la foire d'empoigne à cause des revendications d'antériorité. Tartaglia ira jusqu'à mettre en vers la méthode utilisée pour trouver la racine de $x^3 + px = q$ (p, q positifs) ["Quando che'l cuba con le cose appresso..."].

Ce faisant, ces mathématiciens se trouvent confrontés aux nombres négatifs et aux nombres complexes. Face à ces nouvelles entités, l'attitude est surtout pragmatique. On ne leur reconnaît pas encore de statut en tant que nombre, mais on en utilise les propriétés formelles.

Stevin est le premier à admettre le caractère légitime des nombres négatifs, mais il refuse les nombres complexes. Au contraire, Albert Girard, dans son ouvrage *L'Invention nouvelle en l'algèbre* (1629), dit:

"On pourrait se demander : A quoi servent ces solutions impossibles ? Je réponds : à trois choses, d'une part, pour la

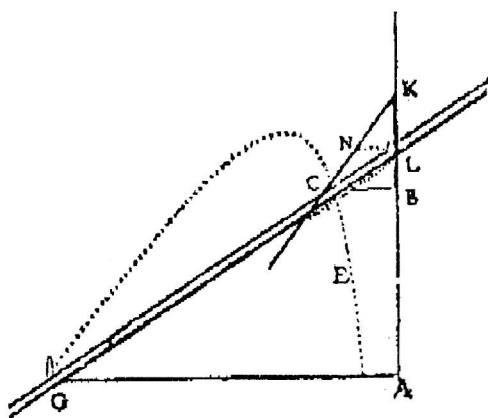
certitude des règles générales, d'autre part, pour leur utilité, et enfin, parce qu'il n'existe pas d'autre solution".

Les nombres "imaginaires", le vocabulaire est de Descartes, seront difficilement admis avant la fin du XVIII^e siècle et connaîtront les mêmes avatars que les irrationnels. Ne nous y attardons pas.

Dans sa *Géométrie* (1637), au Livre III, Descartes expose la théorie des équations algébriques. Il est symptomatique de noter que la Livre III qui va être consacré aux Equations commence en fait par des considérations géométriques. Ceci est bien conforme aux conclusions du § 6, à savoir que le géométrisme prédomine en fait chez Descartes. Pour bien saisir le sens du texte cartésien, on se reportera au Document n° 8 où est exposée la conception mécanique de l'instrument XYZ.

«Encore que toutes les lignes courbes, qui peuvent être décrites par quelque mouvement régulier, doivent être reçues en la Géométrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de le servir indifféremment de la première qui se rencontre, pour la construction de chaque problème ; mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il soit possible de le résoudre. Et même, il est à remarquer que, par les plus simples, on ne doit pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du Problème proposé plus facile, mais principalement celles qui font du plus simple genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.

Comme, par exemple, je ne crois pas qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on veut, ni dont la démonstration soit plus évidente, que d'y employer les lignes courbes qui se décrivent par l'instrument XYZ ci-dessus expliqué. Car, voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre YA & YE, il ne faut que décrire un cercle dont le diamètre soit YE : et parce que



ce cercle coupe la courbe AD au point D, YD est l'une des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la démonstration se voit à l'œil, par la seule application de cet instrument sur la ligne YD : car, comme YA, ou YB qui lui est égale, est à YC, ainsi YC est à YD, et YD à YE.

Tout de même, pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre YA et YG, ou pour en trouver six entre YA et YN, il ne faut que tracer le cercle YFG, qui, coupant AF au point F, détermine la ligne droite YF, qui est l'une de ces quatre proportionnelles; ou YHN, qui, coupant AH au point H, détermine YH, l'une des six ; et ainsi des autres. Mais, parce que la ligne courbe AD est du second genre, et qu'on peut trouver deux moyennes proportionnelles par les sections coniques, qui font du premier ; et aussi parce qu'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionnelles, par des lignes qui ne font pas de genres si composés que font AF et AH, ce serait une faute en Géométrie que de les y employer. Et c'est une faute aussi, d'autre côté, de se travailler inutilement à vouloir construire quelque problème par un genre de ligne plus simple que sa nature ne permet».

C'est alors bien pour éviter les deux fautes mentionnées que Descartes se doit de "dire quelque chose en général de la nature des Equations".

Le premier énoncé est le suivant :

«Pour chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines... Mais souvent il arrive que quelques-unes de ses racines sont fausses ou moindres que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a $x + 5 = 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$

fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

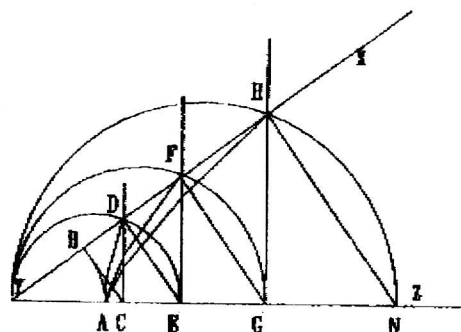
pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir quatre vraies, qui sont 2, 3, 4 et une fausse qui est 5».

Essentielle est l'assertion suivante de factorisation. Avec elle débute l'algèbre polynomiale moderne.

«Et on voit évidemment, de ceci, que la somme d'une Equation qui contient plusieurs racines, peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue, moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit ; ou plus la valeur de l'une des fausses. Au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions. Et réciproquement, que si la somme d'une Equation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue, + ou - quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme : cette dernière $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$ peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par $x - 4$, et par $x + 5$; mais non point par $x +$ ou - aucune autre quantité : ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2. 3. 4 et 5».

Sans démonstration, Descartes enchaîne sur ce qui est devenu sa fameuse règle d'alternance.

«On connaît aussi , de ceci, combien il peut y avoir de vraies racines, et combien de fausses, en chaque Equation. A savoir : il y en peut avoir autant de vraies que les signes + et - s'y trouvent de fois être changés ; et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes - qui s'entresuivent(*). Comme, en la dernière, a cause qu'après + x^4 il y a



- $4x^3$, qui est un changement du signe + en - ; et après - $19xx$ il y a + $106x$, et après + $106x$ il y a - 120 , qui font encore deux autres changements, on connaît qu'il y a trois vraies racines ; et une fausse, à cause que les deux signes , de $4x^3$ et $19xx$, s'entresuivent».

Suivent quelques calculs qui reviennent à trouver l'équation déduite d'une équation quand on ajoute ou retranche aux racines une même quantité. Ceci est utilisé pour éliminer le second terme d'une équation (rangée par puissances décroissantes) et faire "que toutes les fausses racines d'une équation deviennent vraies sans que les vraies deviennent fausses". De même, on procède au cas de la multiplication de toutes les racines.

«Ce qui peut servir pour réduire, a des nombres entiers et rationaux, les fractions et souvent aussi les nombres fours, qui se trouvent dans les termes des Equations. Comme, si on a

$$x^3 - \sqrt{3}xx + \frac{26}{27}x - \frac{6}{27\sqrt{3}} = 0,$$

et qu'on veuille en avoir une autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux, il faut supposer $y = x\sqrt{3}$, et multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connue du second terme, qui est aussi $\sqrt{3}$; et par son carré, qui est 3, celle du troisième, qui est $\frac{26}{27}$

et par son cube, qui est $3\sqrt{3}$, celle du dernier, qui est

$$\frac{6}{27\sqrt{3}}$$

Ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \frac{26}{9}x - \frac{3}{9} = 0.$$

Puis, si on en veut avoir encore une autre en la place de celle-ci, dont les quantités connues ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut supposer $z = 3y$, et, multipliant 3 par 3,

$$\frac{26}{9}$$

par 9, et

$$\frac{5}{9}$$

par 27, on trouve :

$$z^3 - 9zz + 26z - 24 = 0,$$

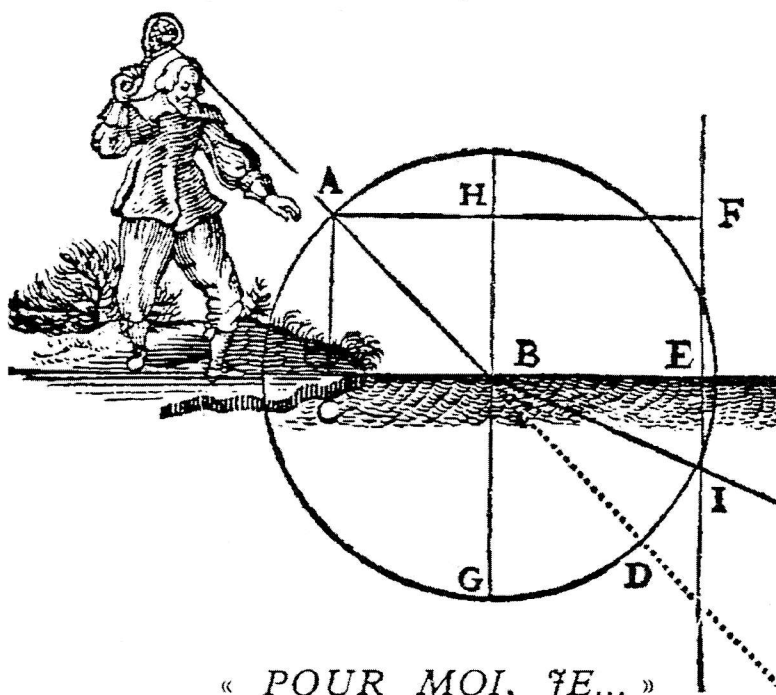
où les racines étant 2, 3 & 4, on connaît de là que celles de l'autre d'uparavant étaient

$$\frac{2}{3}, 1 \text{ \& } \frac{4}{9}$$

et que celles de la première étaient

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ \& } \frac{4}{9}\sqrt{3} \text{ »}.$$

Descartes est bien conscient que sa règle initiale nécessite le recours aux nombres complexes, mais n'éprouve guère la volonté d'approfondir le raisonnement.



« POUR MOI, JE... »

«Cette opération peut aussi servir pour rendre la quantité connue de quelqu'un des termes de l'Equation égale à quelque autre donnée. Comme, si, ayant

$$x^3 - bbx + c^3 = 0,$$

on veut avoir en sa place une autre Equation, en laquelle la quantité connue du terme qui occupe la troisième place, à savoir celle qui est ici bb, soit 3aa, il faut supposer

$$y = x \sqrt{\frac{3aa}{bb}},$$

puis écrire

$$y^3 - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0$$

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires : c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque Equation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine. Comme, encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci :

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, et pour les deux autres, quoi qu'on les augmente, ou diminue ou multiplie, en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires».

Descartes donne ensuite, sur un exemple, le moyen pour trouver les racines rationnelles d'une équation à coefficients rationnels. Il passe ensuite à quelques considérations sur l'équation bicarrée qu'il résout par factorisation en polynômes de second degré par la méthode des coefficients indéterminés.

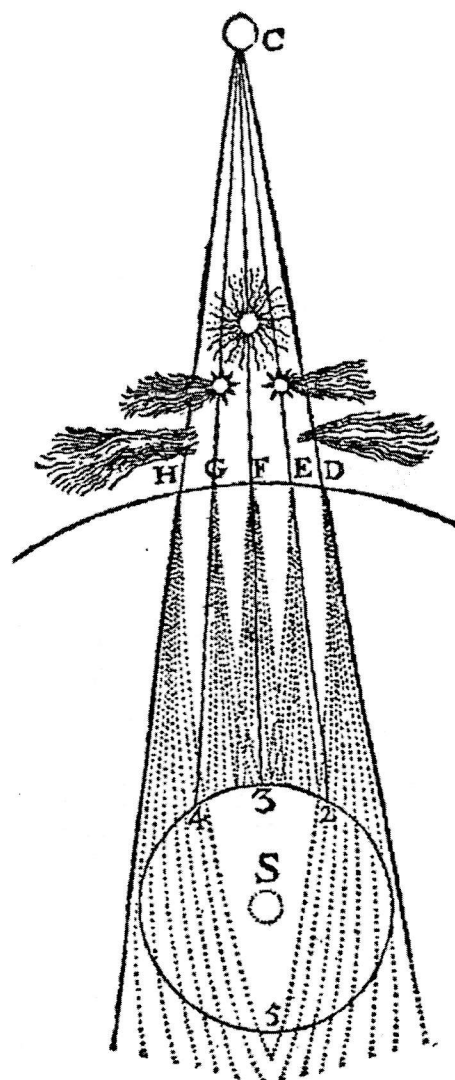
Tous les résultats avancés par Descartes sont déjà plus ou moins connus, la règle d'alternance étant exceptée.

Mais Descartes tient à rester dans le domaine de la Géométrie et la fin du Livre III de la Géométrie s'occupe de la construction géométrique des racines par des intersections de courbes. La discussion est fort intéressante, mais reste secondaire pour notre propos ; elle débouche sur les raisons mathématiquement, encore impré-

cises, qui font qu'un tel problème puisse se résoudre à la règle ou au compas, ou bien exige les sections coniques ou d'autres courbes enfin (division en problèmes plans et solides).

Tout mathématicien un peu pédagogue sera ravi par la phrase par laquelle Descartes justifie l'absence de démonstration concernant ses règles sur les équations :

«Au reste, j'ai omis ici les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit, à cause qu'elles m'ont semblé si faciles que, pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failli, elle se présenteront à vous d'elles-mêmes : et il sera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les lisant».



Petite bibliographie cartésienne

- Baillet Adrien, Vie de Monsieur Descartes, abrégé 1693, réed., Paris, éditions de la Table Ronde, 1992.
- Rodis-Lewis Geneviève, Descartes, Calmann-Lévy 1995.
- Sirven J., Les Années d'Apprentissage de Descartes (1596-1628), Albi, Imprimerie coopérative du Sud Ouest, 1928.
- Bos H.J.M., On the representation of Curves in Descartes's Geometrie, Archive for History of Exact Sciences, 24, 1981, n°4, 295-338.
- Costabel Pierre, Démarches originales de Descartes savant, Paris, Vrin reprise, 1982.
- Costabel Pierre, Descartes et la Mathématique de l'Infini, Historia Scientiarum, 29, 1985, 37-49
- Milhaud Gaston, Descartes savant, Paris, Alcan, 1921.
- Rabuel C., Commentaires sur la Géométrie de Monsieur Descartes, Lyon, Marcelin Duplain, 1730.
- Serfati Michel, Descartes mathématicien, Mnemosyme, Université de Paris VII, 1993.
- Tannery Pierre, article Descartes, Grande Encyclopédie, Paris.
- Pascal Georges : pour connaître Descartes, Bordas, 1985
- Damasio Antonio : l'erreur de Descartes, Ed. CLD, Chambray-les-Tours, 1996
- De Sacy Silvestre : Descartes, Seuil-poche, 1996
- Payot Roger : René Descartes, LUGD, 1996
- Consulta Frédéric : Descartes et l'argumentation philosophique, PUF, 1996
- Prigogine Lya ; la fin des certitudes, Rd. O. Jacob, 1996

et toujours :

- Descartes, oeuvres complètes (11 vol.), Ed. Vrin, 1996
- Lechat Jean : médiation métaphysiques, Nathan, 1996
- Descartes René : Discours de la méthode, Nathan, 1996
- Descartes (2 vol.), PUF 1996
- Descartes : la géométrie (Jullien Vincent), PUF 1996
- Pagès Frédéric : Descartes et le cannabis, Ed. Vrin, 1996
- Robinet André : aux sources de l'esprit, Ed. Vrin, 1996
- Descartes, Revue Internationale de philosophie, vol. 195, PUF, 1996
- Brunschvigg Léon : Descartes et Pascal, lecteurs de Montaigne, Ed. Pocket, 1995
- Petit Henri : Descartes et Pascal, Ed. L'Harmattan, 1995

Multimédia :

- CD-Rom : Descartes, savant et philosophe - 1996
Centre culturel Pierre Mendès France - CCSTI du Poitou-Charente - Poitiers
- Films vidéo : Descartes - Diffusion «la 5» - 1996
- Exposition interactive : Descartes, doutes et certitudes du chercheur - 1886
Centre Sciences - CCSTI de la région Centre - Orléans

Voir aussi les cahiers des amis du Musée
Descartes à Descartes, Indre et Loire

Les groupes “recherche-action” en Côte d’Ivoire : Y’a pas son deux!

Michel Soufflet
IREM de Basse Normandie

Depuis 3 ans, un certain nombre de groupes de type “recherche-action” ont été mis en place en Côte d’Ivoire. Le numéro 70 de Plot s’en est d’ailleurs fait l’écho, plusieurs articles en émanant directement: soit en tant que comptes-rendus de travaux, soit comme contribution à leur réflexion interne.

De quoi s’agit-il?

L’idée de leur création est partie du séminaire “Mathématiques et Philosophie” organisé en janvier 1993 à Yamoussoukro au cours duquel des professeurs de l’ENS, des conseillers pédagogiques, des chercheurs de l’IRMA se sont retrouvés côte à côte dans des ateliers et ont éprouvés le besoin de poursuivre une réflexion commune : comment les professeurs assurant la formation initiale, ceux qui assurent la

formation continuée et ceux qui écrivent les manuels scolaires pourraient-ils continuer leur travail sans échanger entre eux leur réflexion sur l’enseignement des mathématiques?

Ces groupes ont été mis en place afin de permettre à ces personnels de se rencontrer pour approfondir leurs connaissances et parfaire leur réflexion. Afin de maintenir la recherche au contact de la réalité du terrain ils sont ouverts à des professeurs volontaires enseignant les mathématiques en collège ou en lycée et, le cas échéant, à des instituteurs.

Leur intérêt pour la formation continuée est double: ils sont l’instrument de celle des professeurs formateurs. Le fait de s’impliquer dans un groupe de recherche induit une auto-formation. L’expérience, en particulier celle des IREM en France, a montré que, lorsque les professeurs ont une formation initiale suffisante, ils ont, pour



leur formation continuée, davantage besoin de temps et de moyens que d'interventions extérieures, ces dernières pouvant être ponctuelles et effectuées à la demande des intéressés.

De plus, la production de ces groupes est un vivier dans lequel on puise les contenus des interventions lors des stages de formation.

Quelles recherches?

Actuellement, quatre groupes ont été mis en place, trois verticaux et un horizontal:

- apprentissage du raisonnement.
- utilisation du livre
- évaluation
- liaison CM2 - 6ème

Les trois premiers sont dit "verticaux" car leur action peut porter sur l'ensemble du cursus scolaire, du préélémentaire à l'université. Ils peuvent donner lieu à des sous-groupes s'intéressant à un niveau particulier.

Le quatrième qui se situe sur un niveau donné a, encore plus que les autres, vocation à s'étendre vers les autres disciplines.

Ils peuvent traiter de la didactique des mathématiques (raisonnement), de la pédagogie (livre) ou de l'ensemble de ces problèmes, ce qui est le cas pour le 3ème et le 4ème.

Quelles actions?

Outre les implications immédiates dans les séminaires de formation des professeurs ou des élèves professeurs, les contenus de ces travaux servant de support aux professeurs formateurs pour préparer leurs interventions, ces groupes allient tous une réflexion de fond avec une recherche d'efficacité concrète et immédiate pouvant donner lieu à des actions sur le terrain :

- Le groupe "apprentissage du raisonnement" a mis en place une expérimentation en seconde, 20 classes dans le pays ont ainsi pu bénéficier, au cours de l'année scolaire 94-95, d'une heure supplémentaire durant laquelle l'élève est amené à travailler

plus en profondeur. Par rayonnement de proximité, ce travail devrait aboutir à des changements de comportement chez les autres professeurs des établissements concernés qui privilégient encore trop souvent la forme au fond, par exemple, la définition d'un concept à son fonctionnement. Ce travail accompagne utilement la mise en place des nouveaux programmes car il ne suffit pas de changer les programmes pour modifier les comportements. Pour l'année en cours, ce groupe a élargi cette expérimentation à davantage de classes.

- Le groupe "évaluation" a, à la demande de l'administration centrale, mis en place un test visant à cerner les aptitudes exigées pour le passage de seconde C en 1ère C très sélectif actuellement. Ces travaux devraient également contribuer à la mise en place des nouveaux programmes en permettant de mieux préciser des niveaux d'exigence pratiqués souvent inconsciemment ou par habitude.

- Le groupe "livre" va consacrer une partie de son travail à l'élaboration de documents destinés à mettre en place un enseignement dynamique en utilisant les livres édités par la CIAM. Ce travail peut intéresser directement tous les pays qui ont adopté cette collection et ceci, d'autant plus que les conditions de travail sont difficiles: on sait l'importance d'une bonne utilisation des manuels scolaires dans les classes à effectif pléthorique entre autre.

- Le groupe "liaison CM2 - 6ème" a permis aux différents acteurs de s'informer sur les pratiques et programmes de l'autre cycle. Il doit, dans un premier temps contribuer à l'information des Inspecteurs du primaire sur les nouveaux programmes, il peut, dans un second temps, contribuer à leur formation.

Peut-on créer de tels groupes dans d'autres pays ?

Si des responsables de l'enseignement des mathématiques dans d'autres pays décidaient de créer de tels groupes, il leur appartient d'en faire les choix en fonction des besoins spécifiques et des possibilités locales. La revue PLOT ne peut pas intervenir dans ces choix, nous ne pouvons qu'émettre le vœu que des groupes similaires se mettent en place parallèlement à ceux de Côte d'Ivoire, nous pourrions alors

aider à la communication entre ces groupes.

Comment créer de tels groupes ?

Il faut tout d'abord repérer les personnes ressources ainsi que les centres d'intérêt de ces personnes, il convient aussi de recenser les besoins afin d'orienter les recherches vers des directions utiles. Tout groupe a, pour son fonctionnement, besoin d'un minimum de moyens et il est illusoire d'espérer trouver, à l'heure actuelle, un quelconque financement sans afficher crédibilité et sérieux. Cibler les activités de ces groupes sur les objectifs des projets en cours leur donne une bonne chance de trouver les appuis nécessaires à leur fonctionnement.

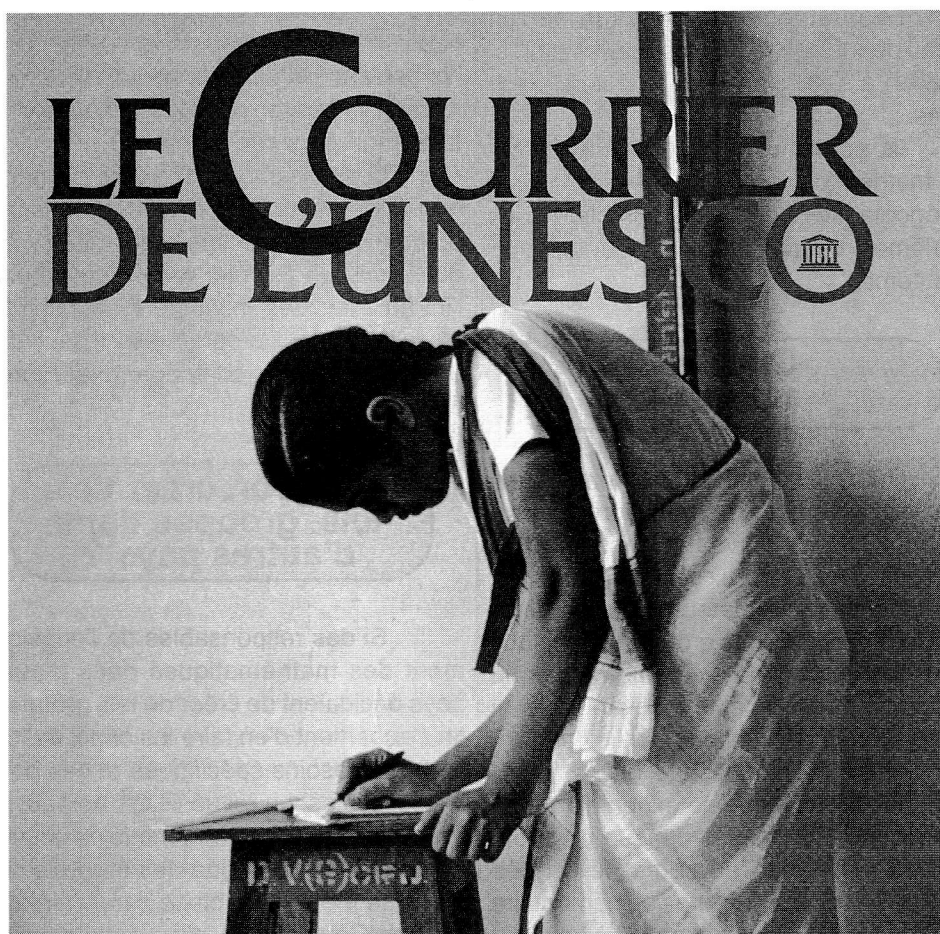
En Côte d'Ivoire le fonctionnement de ces groupes a été inscrit dans le PARMEN, projet Ivoirien soutenu par la Coopération Française. Cela semble tout à fait réalisable dans d'autres pays.

Remarque : nous n'avons jusqu'à présent évoqué que le cas de groupes parfaitement institutionnalisés et intégrés dans les plans d'action du Ministère de l'Educa-

tion Nationale. Cette institutionnalisation n'est pas une nécessité: en France, dans le cadre de l'APMEP (1), une dizaine de groupe de travail de ce type fonctionnent depuis de nombreuses années et certains, comme les groupes « Evaluation » ou « Mots », par exemple, ont acquis depuis longtemps crédibilité et reconnaissance. Cela semble plus difficile en Afrique compte tenu du manque de moyen mais sûrement pas impossible (2) : le travail fait par l'équipe du journal "Papyrus" de Bouaké le prouve. Ce journal, parce qu'il se place en dehors du cadre institutionnel, permet de susciter un travail bénévole et de toucher un public plus large. Il s'agit d'un véritable groupe de réflexion informel car il contribue fortement à la formation des enseignants qui y participent et aussi, bien sûr, à celle de ses lecteurs.

Quels groupes faut-il créer ?

En Côte d'Ivoire, les thèmes choisis sont loin d'épuiser les besoins mais il ne semble pas raisonnable de faire fonctionner trop de groupes en même temps car les ressources humaines ne sont pas inépuis-





sables et l'expérience prouve que ce sont souvent les mêmes personnes qui sont sollicitées. D'autres pays africains pourraient développer des thèmes complémentaires, nous ne pouvons bien sûr que suggérer quelques pistes :

- des groupes "horizontaux" du type 3ème-2nde ou Bac - post-bac.
- des groupes interdisciplinaires du type "math-physique" ou "math économie".

Bien sûr il existe déjà des travaux de ce type, publiés par les IREM de France en particulier, mais les réalités au quotidien étant différentes les travaux de ces groupes ne sont pas directement transposables et il semble nécessaire que des réflexions spécifiques soient menées en Afrique, ce qui n'empêche pas, bien évidemment d'inviter un intervenant extérieur à l'occasion d'un séminaire de travail.

Vers une coopération de type "Sud-Sud" ?

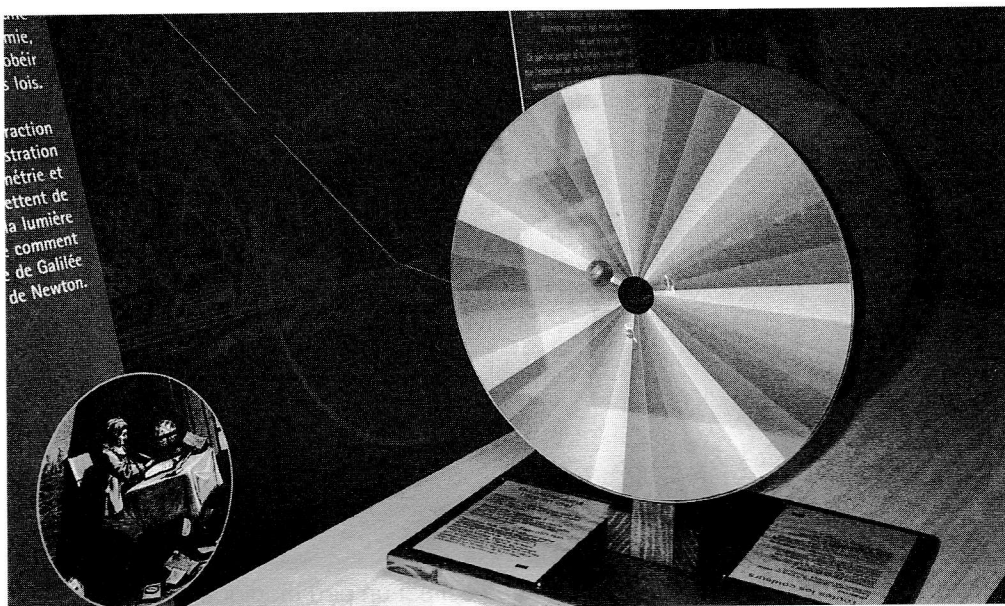
Si d'autres groupes de ce type devaient se mettre en place en Afrique, on pourrait envisager des réunions de travail regroupant les chercheurs de tous ces pays. On ferait ainsi évoluer la coopération actuelle de type "Nord-Sud" vers une coopération nouvelle, basée sur des échanges réciproques et plus proche de la réalité du terrain.

Bien sûr, ceci est un peu utopique compte tenu du coût élevé des déplacements internationaux mais, si la qualité des documents publiés en Côte d'Ivoire devait se retrouver en d'autres endroits, la crédibilité ainsi obtenue rendrait ces rencontres envisageables.

Pour une rubrique africaine dans PLOT

Ayant été le témoin privilégié de la mise en place de ces groupes en Côte d'Ivoire, je vous propose dans l'immédiat d'animer une rubrique dans votre journal favori: PLOT continuera à publier tous les articles témoignant des recherches sur l'enseignement des mathématiques en Afrique mais, ce que nous vous proposons est différent: une rubrique permet de communiquer des nouvelles brèves, des observations, des réponses, des problèmes.... Ecrire un article est une tâche lourde que l'on remet souvent à plus tard, voire à trop tard! Rédiger la pensée du moment est moins contraignant.

Nous vous proposons donc simplement un moyen de faire circuler l'information entre toutes les personnes concernées par l'enseignement des mathématiques en Afrique. □



(1) lire "apéhème" et non pas "apmèpe"
comme je l'ai souvent entendu de la
bouche de coopérants !
(2) "Impossible n'est pas africain!"
Félix Houphouët Boigny.

Après
Le Secret des pavages de Raoul Raba,
l'Adécum est heureuse de vous annoncer
la parution de

Maths en pièces

Un nouveau livre à lire avec du papier, du carton, des ciseaux et du scotch
pour découvrir des mathématiques en pièces, en tranches et en morceaux.

Pour tous ceux qui n'avaient pas souscrit à ce deuxième
volume, vous trouverez le bon de commande page 48.