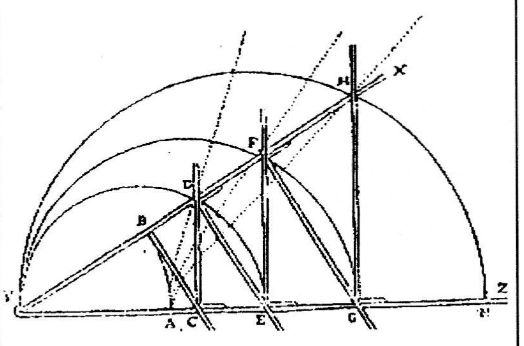
Descartes, les nombres et la géométrie

Jean Dhombres - Nantes



Afin de mieux faire comprendre les avatars ultérieurs de la notion de nombre, il nous faut parcourir rapidement l'histoire des équations. Nous n'entrerons dans aucun détail mathématique, car cela sortirait de notre propos.

On sait que les Italiens (Cardan, Ferrari, Scipione del Ferro, Tartaglia, etc.) ont réussi à obtenir un procédé pour calculer les racines d'une équation du 3e degré et du 4e degré. Le récit de ces découvertes tient de la foire d'empoigne à cause des revendications d'antériorité. Tartaglia ira jusqu'à mette en vers la méthode utilisée pour trouver la racine de $x^3 + px = q$ (p, q positifs) ["Quando che'l cuba con le cose appresso..."].

Ce faisant, ces mathématiciens se trouvent confrontés aux nombres négatifs et aux nombres complexes. Face à ces nouvelles entités, l'attitude est surtout pragmatique. On ne leur reconnaît pas encore de statut en tant que nombre, mais on en utilise les propriétés formelles.

Stevin est le premier à admettre le caractère légitime des nombres négatifs, mais il refuse les nombres complexes. Au contraire, Albert Girard, dans son ouvrage L'Invention nouvelle en l'algèbre (1629), dit:

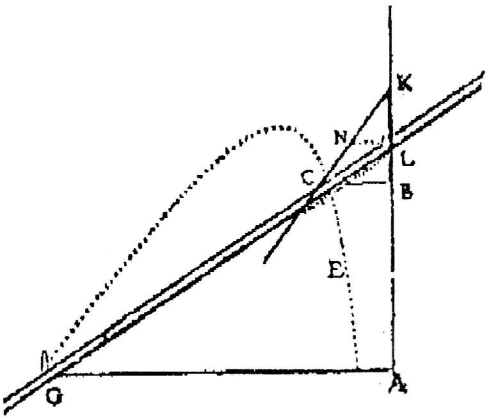
"On pourrait se demander : A quoi servent ces solutions impossibles ? Je réponds : à trois choses, d'une part, pour la certitude des règles générales, d'autre part, pour leur utilité, et enfin, parce qu'il n'existe pas d'autre solution".

Les nombres "imaginaires", le vocabulaire est de Descartes, seront difficilement admis avant la fin du XVIIIe siècle et connaîtront les mêmes avatars que les irrationnels. Ne nous y attardons pas.

Dans sa Géométrie (1637), au Livre III, Descartes expose la théorie des équations algébriques. Il est symptomatique de noter que la Livre III qui va être consacré aux Equations commence en fait par des considérations géométriques. Ceci est bien conforme aux conclusions du § 6, à savoir que le géométrisme prédomine en fait chez Descartes. Pour bien saisir le sens du texte cartésien, on se reportera au Document n° 8 où est exposée la conception mécanique de l'instrument XYZ.

«Encore que toutes les lignes courbes, qui peuvent être décrites par quelque mouvement régulier, doivent être reçues en la Géométrie, ce n'est pas à dire qu'il soit permis de le servir indifféremment de la première qui se rencontre, pour la construction de chaque problème ; mais il faut avoir soin de choisir toujours la plus simple par laquelle il soit possible de le résoudre. Et même, il est à remarquer que, par les plus simples, on ne doit pas seulement entendre celles qui peuvent le plus aisément être décrites, ni celles qui rendent la construction ou la démonstration du Problème proposé plus facile, mais principalement celles qui font du plus simple genre qui puisse servir à déterminer la quantité qui est cherchée.

Comme, par exemple, je ne crois pas qu'il y ait aucune façon plus facile, pour trouver autant de moyennes proportionnelles qu'on veut, ni dont la démonstration soit plus évidente, que d'y employer les lignes courbes qui se décrivent par l'instrument XYZ ci-dessus expliqué. Car, voulant trouver deux moyennes proportionnelles entre YA & YE, il ne faut que décrire un cercle dont le diamètre soit YE : et parce que



ce cercle coupe la courbe AD au point D, YD est l'une des moyennes proportionnelles cherchées. Dont la démonstration se voit à l'œil, par la seule application de cet instrument sur la ligne YD : car, comme YA, ou YB qui lui est égale, est à YC, ainsi YC est à YD, et YD à YE.

Tout de même, pour trouver quatre moyennes proportionnelles entre YA et YG, ou pour en trouver six entre YA et YN, il ne faut que tracer le cercle YFG, qui, coupant AF au point F, détermine la ligne droite YF, qui est l'une de ces quatre proportionnelles; ou YHN, qui, coupant AH au point H, détermine YH, l'une des six ; et ainsi des autres. Mais, parce que la ligne courbe AD est du second genre, et qu'on peut trouver deux moyennes proportionnelles par les sections coniques, qui font du premier ; et aussi parce qu'on peut trouver quatre ou six moyennes proportionnelles, par des lignes qui ne font pas de genres si composés que font AF et AH, ce serait une faute en Géométrie que de les y employer. Et c'est une faute aussi, d'autre côté, de se travailler inutilement à vouloir construire quelque problème par un genre de ligne plus simple que sa nature ne permet».

C'est alors bien pour éviter les deux fautes mentionnées que Descartes se doit de "dire quelque chose en général de la nature des Equations".

<u>Le premier énoncé est le suivant</u> :

«Pour chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines... Mais souvent il arrive que quelques-unes de ses racines sont fausses ou moindres que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a $x + 5 = 0$, qui étant multipliée par $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir quatre vraies, qui sont 2, 3, 4 et une fausse qui est 5».

Essentielle est l'assertion suivante de factorisation. Avec elle débute l'algèbre polynomiale moderne.

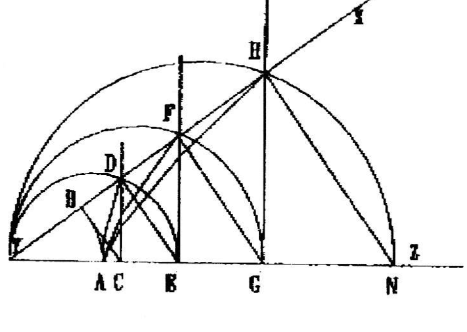
«Et on voit évidemment, de ceci, que la somme d'une Equation qui contient plusieurs racines, peut toujours être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue, moins la valeur de l'une des vraies racines, laquelle que ce soit ; ou plus la valeur de l'une des fausses. Au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions. Et réciproquement, que si la somme d'une Equation ne peut être divisée par un binôme composé de la quantité inconnue, + ou - quelque autre quantité, cela témoigne que cette autre quantité n'est la valeur d'aucune de ses racines. Comme : cette dernière

$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$

peut bien être divisée par $x - 2$, et par $x - 3$, et par $x - 4$, et par $x + 5$; mais non point par x + ou - aucune autre quantité : ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 et 5».

Sans démonstration, Descartes enchaîne sur ce qui est devenu sa fameuse règle d'alternance.

«On connaît aussi , de ceci, combien il peut y avoir de vraies racines, et combien de fausses, en chaque Equation. A savoir : il y en peut avoir autant de vraies que les signes + et - s'y trouvent de fois être changés ; et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes - qui s'entresuivent(*). Comme, en la dernière, a cause qu'après $+ x^4$ il y a



$- 4\ x^3$, qui est un changement du signe + en - ; et après - 19xx il y a + 106x, et après + 106x il y a - 120, qui font encore deux autres changements, on connaît qu'il y a trois vraies racines ; et une fausse, à cause que les deux signes , de $4x^3$ et 19xx, s'entresuivent».

Suivent quelques calculs qui reviennent à trouver l'équation déduite d'une équation quand on ajoute ou retranche aux racines une même quantité. Ceci est utilisé pour éliminer le second terme d'une équation (rangée par puissances décroissantes) et faire "que toutes les fausses racines d'une équation deviennent vraies sans que les vraies deviennent fausses". De même, on procède au cas de la multiplication de toutes les racines.

«Ce qui peut servir pour réduire, a des nombres entiers et rationaux, les fractions et souvent aussi les nombres fours, qui se trouvent dans les termes des Equations. Comme, si on a

$$x^3 - \sqrt{3}\,xx + \frac{26}{27}x - \frac{6}{27\sqrt{3}} = 0,$$

et qu'on veuille en avoir une autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux, il faut supposer y $= x\sqrt{3}$, et multiplier par $\sqrt{3}$ la quantité connue du second terme, qui est aussi $\sqrt{3}$; et par son carré, qui est 3, celle du troisième, qui est $\frac{26}{27}$ et par son cube, qui est $3\sqrt{3}$, celle du dernier, qui est

$$\frac{6}{27\sqrt{3}}$$

Ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \frac{26}{9}x - \frac{3}{9} = 0.$$

Puis, si on en veut avoir encore une autre en la place de celle-ci, dont les quantités connues ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut supposer z = 3y, et, multipliant 3 par 3,

$$\frac{26}{9}$$

par 9, et

$$\frac{5}{9}$$

par 27, on trouve :

$$z^3 - 9\ zz + 26\ z - 24 = 0,$$

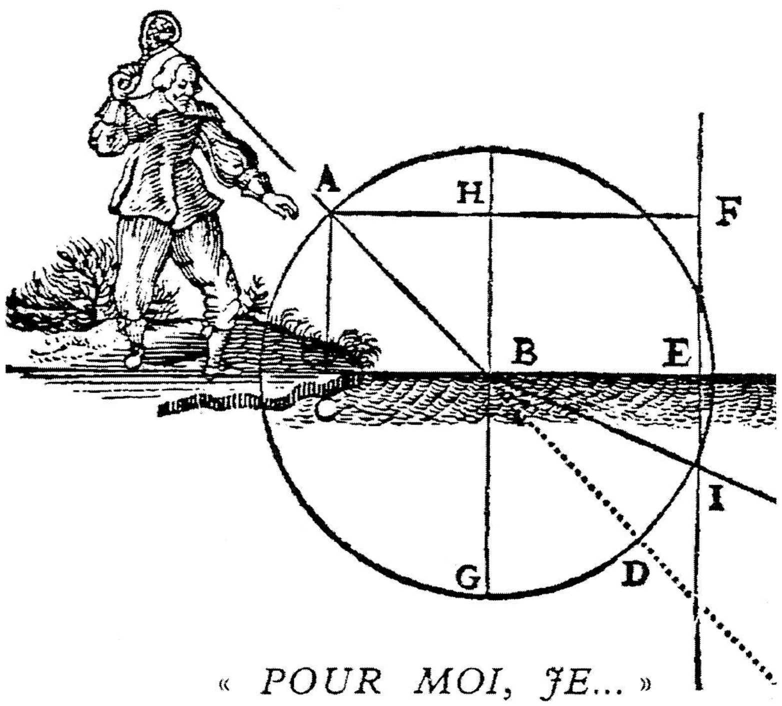
où les racines étant 2, 3 & 4, on connaît de là que celles de l'autre d'auparavant étaient

$$\frac{2}{3},\ 1\ \&\ \frac{4}{9}$$

et que celles de la première étaient

$$\frac{2}{9}\sqrt{3},\ \frac{1}{3}\sqrt{3}\ \&\ \frac{4}{9}\sqrt{3}\ ».$$

Descartes est bien conscient que sa règle initiale nécessite le recours aux nombres complexes, mais n'éprouve guère la volonté d'approfondir le raisonnement.



« *POUR MOI, JE...* »

«Cette opération peut aussi servir pour rendre la quantité connue de quelqu'un des termes de l'Equation égale à quelque autre donnée. Comme, si, ayant

$$x^3 - bbx + c^3 = 0,$$

on veut avoir en sa place une autre Equation, en laquelle la quantité connue du terme qui occupe la troisième place, à savoir celle qui est ici bb, soit 3aa, il faut supposer

$$y = x\sqrt{\frac{3aa}{bb}},$$

puis écrire

$$y^3 - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} = 0$$

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires : c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque Equation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine. Comme, encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci :

$$x^3 - 6xx + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, et pour les deux autres, quoi qu'on les augmente, ou diminue ou multiplie, en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires».

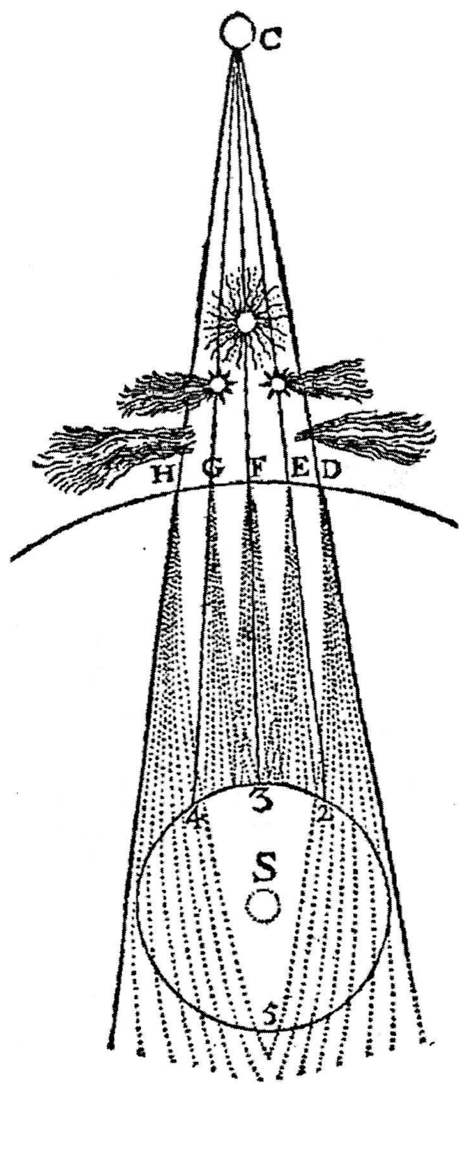
Descartes donne ensuite, sur un exemple, le moyen pour trouver les racines rationnelles d'une équation à coefficients rationnels. Il passe ensuite à quelques considérations sur l'équation bicarrée qu'il résout par factorisation en polynômes de second degré par la méthode des coefficients indéterminés.

Tous les résultats avancés par Descartes sont déjà plus ou moins connus, la règle d'alternance étant exceptée.

Mais Descartes tient à rester dans le domaine de la Géométrie et la fin du Livre III de la Géométrie s'occupe de la construction géométrique des racines par des intersections de courbes. La discussion est fort intéressante, mais reste secondaire pour notre propos ; elle débouche sur les raisons mathématiquement, encore imprécises, qui font qu'un tel problème puisse se résoudre à la règle ou au compas, ou bien exige les sections coniques ou d'autres courbes enfin (division en problèmes plans et solides).

Tout mathématicien un peu pédagogue sera ravi par la phrase par laquelle Descartes justifie l'absence de démonstration concernant ses règles sur les équations :

«Au reste, j'ai omis ici les démonstrations de la plupart de ce que j'ai dit, à cause qu'elles m'on semblé si faciles que, pourvu que vous preniez la peine d'examiner méthodiquement si j'ai failli, elle se présenteront à vous d'elles-mêmes : et il sera plus utile de les apprendre en cette façon qu'en les lisant». ❑



Petite bibliographie cartésienne

• Baillet Adrien, Vie de Monsieur Descartes, abrégé 1693, rééd., Paris, éditions de la Table Ronde, 1992.
• Rodis-Lewis Geneviève, Descartes, Calmann-Lévy 1995.
• Sirven J., Les Années d'Apprentissage de Descartes (1596-1628), Albi, Imprimerie coopérative du Sud Ouest, 1928.
• Bos H.J.M., On the representation of Curves in Descartes's Geometrie, Archive for History of Exact Sciences, 24, 1981, n°4,295-338.
• Costabel Pierre, Démarches originales de Descartes savant, Paris, Vrin reprise, 1982.
• Costabel Pierre, Descartes et la Mathématique de l'Infini, Historia Scientiarum, 29, 1985, 37-49
• Milhaud Gaston, Descartes savant, Paris, Alcan, 1921.
• Rabuel C.,Commentaires sur la Géométrie de Monsieur Descartes, Lyon, Marcelin Duplain, 1730.
• Serfati Michel, Descartes mathématicien, Mnemosyme, Université de Paris VII, 1993.
• Tannery Pierre, article Descartes, Grande Encyclopédie, Paris.
• Pascal Georges : pour connaître Descartes, Bordas, 1985
• Damasio Antonio : l'erreur de Descartes, Ed. CLD, Chambray-les-Tours, 1996
• De Sacy Silvestre : Descartes, Seuil-poche, 1996
• Payot Roger : René Descartes, LUGD, 1996
• Consulta Frédéric : Descartes et l'argumentation philosophique, PUF, 1996
• Prigogine Lya ; la fin des certitudes, Rd. O. Jacob, 1996

et toujours :
• Descartes, oeuvres complètes (11 vol.), Ed. Vrin, 1996
• Lechat Jean : médiation métaphysiques, Nathan, 1996
• Descartes René : Discours de la méthode, Nathan, 1996
• Descartes (2 vol.), PUF 1996
• Descartes : la géométrie (Jullien Vincent), PUF 1996
• Pagès Frédéric : Descartes et le cannabis, Ed. Vrin, 1996
• Robinet André : aux sources de l'esprit, Ed. Vrin, 1996
• Descartes, Revue Internationale de philosophie, vol. 195, PUF, 1996
• Brunschivgg Léon : Descartes et Pascal, lecteurs de Montaigne, Ed. Pocket, 1995
• Petit Henri : Descartes et Pascal, Ed, L'Harmattan, 1995

Multimédia :

• CD-Rom : Descartes, savant et philosophe - 1996
Centre culturel Pierre Mendès France - CCSTI du Poitou-Charente - Poitiers
• Films vidéo : Descartes - Diffusion «la 5» - 1996
• Exposition interactive : Descartes, doutes et certitudes du chercheur - 1886
Centre Sciences - CCSTI de la région Centre - Orléans

Voir aussi les cahiers des amis du Musée Descartes à Descartes, Indre et loire