

ANALYSE D'ERREURS D'ELEVES DANS DE COURTES DEMONSTRATIONS

Régis Gras (Rennes) et Marie-Danielle Fontaine (St Malo)

Cette présentation tire, pour une grande part, son contenu de la thèse d'Annie Larher soutenue à Rennes en février 1991 et d'un travail de l'équipe de didactique de l'IRMAR (Université de Rennes).

Des observations et quelques études plus approfondies de productions d'élèves, de 12-14 ans en particulier, sur les problèmes à démonstration géométrique, ont montré la multitude et la grande variété des procédures erronées des élèves, la structure de la solution étant pourtant déjà découverte. Certes, les erreurs puisent leur origine profonde dans l'absence de signification de la preuve mathématique et dans une carence de maîtrise du lexique nécessaire (puisque, donc, or, car ...), mais également de façon ou conséquente ou conjointe :

- dans une absence de rigueur dans l'articulation dissymétrique des trois éléments-clés de l'inférence :

hypothèse – théorème – conclusion ;

- dans la prise en compte d'indicateurs extrinsèques pour choisir l'un quelconque de ces éléments-clés :

- indicateurs formels (structure, rythme, ...)

- indicateurs sémiotiques (mot, lettre, symbole, ...)

- indicateurs sémantiques (un sens voisin, une utilisation antérieure,...)

Tout enseignant sait bien qu'il lui est difficile, voire impossible, de repérer à chaque fois dans une copie d'élève le type d'erreur commise et surtout sa répétition chez l'élève, sa fréquence dans la classe et les conditions dans lesquelles l'erreur s'élabore et apparaît. De plus, il lui est encore plus difficile de trouver pour chaque élève les situations qui permettraient de faire prendre conscience et déséquilibrer les procédures, voire les conceptions. L'ordinateur, en revanche, permet un travail plus individualisé et, surtout, une sanction immédiate de l'erreur et donc un retour de l'élève sur ses démarches.

Méthodologie retenue

Il semble donc important, pour mieux traiter ensuite ces procédures chez chaque élève, de les identifier et d'en repérer les circonstances d'apparition.

Notre tâche didactique et informatique consistera alors, à plus ou moins long terme :

- à construire des situations où les variables sont contrôlables ;
- à identifier et interpréter les erreurs et les conditions de leur émergence ;
- à construire un modèle prédictif de procédures erronées ;
- à élaborer des logiciels satisfaisant les objectifs didactiques.

Schématiquement, compte-tenu de ces objectifs, le micro-ordinateur est intégré sous deux aspects :

- aide tutorielle de l'élève dans une situation de problème à démonstration (logiciel DEFI : «Démonstration et Exploration de la Figure Interactives» que nous développons) ;

- aide pour l'enseignant à mieux comprendre les erreurs commises par l'élève et donc si possible à les corriger (logiciel présenté plus loin) .

Il apparaît nécessaire de limiter les variables en interaction dans une démonstration et pour cela de fournir à l'élève des situations où le sens entretenu par le but lointain de cette démonstration n'est pas le moteur essentiel et où le lexique est réduit.

Pour ce faire, on établira une liste de faits mathématiques (géométriques en l'occurrence) pouvant tenir lieu, suivant les situations, d'hypothèses ou de conclusions et une liste de théorèmes. Une inférence incomplète (voire un problème à démonstration) étant proposée, l'élève devra, de façon pertinente, choisir un ou plusieurs faits, un ou plusieurs théorèmes pour que soit validées l'inférence ou les inférences





successives. La tâche de l'élève sera exécutée sur micro-ordinateur, à l'aide d'un logiciel permettant un travail personnel, puis une analyse individuelle de ses réponses (après éventuellement deux essais).

Ce logiciel, appelé «Premier Pas» et conçu par André Simon et Alain Nicolas (Rennes) n'est pas à proprement parler un didacticiel mais plutôt un outil de diagnostic qui a trois fonctions :

- renforcement de l'apprentissage des règles de déduction à un pas ;
- bilan des acquis sur le point précédent ;
- révélation et moyen d'analyse des erreurs pour étude diagnostique.

Suivant le choix fait au départ par l'enseignant, l'élève dispose de plusieurs essais (ou non) et la bonne réponse lui est donnée (ou non).

Présentation du questionnaire

Un ensemble de 6 questions est donc proposé à des élèves de la 2ème année de collège (12-13 ans) après l'enseignement de quelques propriétés de la symétrie par rapport à un point (symétrie centrale). A chaque question correspond une inférence que l'élève doit compléter en choisissant un des 11 faits suivants à titre de conclusion:

Faits

- 1 (EF) et (CD) sont symétriques par rapport au point I
- 2 [MN] est le symétrique de [PR] par rapport au point I
- 3 (AB) et (CD) sont symétriques par rapport au point O
- 4 (MN) // (PR)
- 5 (CD) // (EF)
- 6 (AB) // (CD)

- 7 (AB) // (EF)
- 8 MN = PR
- 9 CD = EF
- 10 AB = CD
- 11 AB = EF

Théorèmes

- 1 La symétrie centrale conserve les longueurs.
- 2 Si (D) // (D') et (D') // (D''), alors (D) // (D'').
- 3 La symétrique d'une droite (D) par rapport à un point est une droite (D') // (D).
- 4 Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.
- 5 Deux segments symétriques par rapport à un point ont même longueur.
- 6 La symétrie centrale conserve les directions.

Question : Hypothèse et théorème des listes ci-dessus étant donnés, trouver la conclusion tirée de la liste des faits (deux essais sont possibles à chaque question).

Démonstrations (voir tableau ci-dessous)

A travers le questionnaire, nous cherchons à contrôler les variables didactiques suivantes :

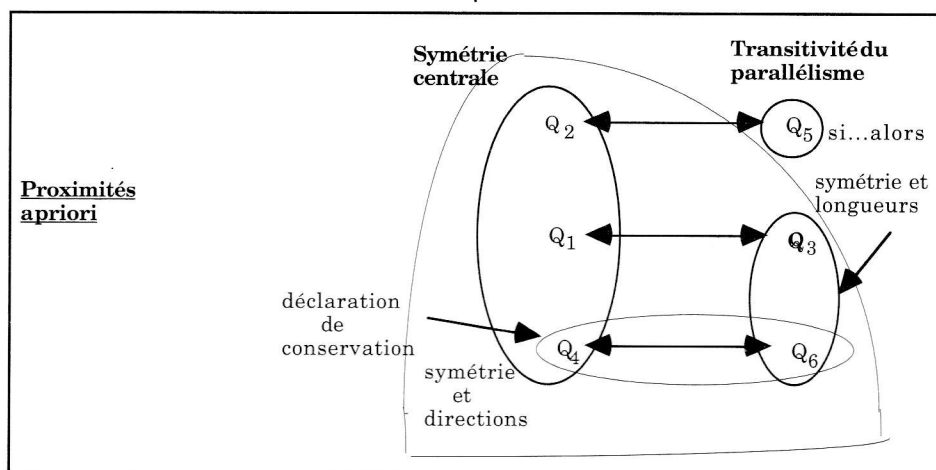
- le concept : 5 des 6 questions portent sur la symétrie centrale, une question porte sur la transitivité du parallélisme (question n° 5)
- la spécification ou instanciation des théorèmes (exemple : théorème 1 vs théorème 4)
- le degré de généralité de l'invariant relationnel (exemple : théorème 1 vs théorème 5)
- la complexité lexicale (exemple : « conserver ») ou conceptuelle (exemple : « direction »)
- la formulation en « si ... alors » (théorème 2)
- la symétrie de la relation entre les objets dénommés (exemple : fait 1 vs fait 2)
- la confusion entre // et = (exemple : fait 4 vs fait 8)
- l'expression de propriétés (exemple : théorème 1)

		Hypothèses	Théorème	? Conclusion (à trouver)
Q1	Hypothèse: 1 Théorème: 3 Conclusion: 5	(EF) et (CD) symétriques par rapport à I	Le symétrique de (D) par rapport à un point est (D') // (D)	(EF) // (CD)
Q2	Hypothèse: 4 Théorème: 4 Conclusion: 6	(AB) et (CD) symétriques par rapport à O	Si 2 droites sont symétriques par rapport à 1 point alors elles sont //	(AB) // (CD)
Q3	Hypothèse: 2 Théorème: 5 Conclusion: 8	[MN] symétrique de [PR] par rapport à I	2 segments symétriques par rapport à un point ont même longueur	MN = PR
Q4	Hypothèse: 3 Théorème: 6 Conclusion: 6	(AB) et (CD) symétriques par rapport à O	La symétrie centrale conserve les directions	(AB) // (CD)
Q5	Hypothèse: 6+5 Théorème: 2 Conclusion: 7	(AB) // (CD) et (CD) // (EF)	Si (D) // (D') et (D') // (D'') alors (D) // (D'')	(AB) // (EF)
Q6	Hypothèse: 2 Théorème: 1 Conclusion: 8	[MN] symétrique de [PR] par rapport à I	La symétrie centrale conserve les longueurs	MN = PR

Une analyse a priori de la complexité nous incite à prévoir les hiérarchies suivantes entre les différentes réussites

Ri: $R_2 > R_1 > R_4$; $R_3 \geq R_6$; $R_2 \geq R_3$; $R_6 > R_4$

On peut schématiser les proximités formelle, sémantique et référentielle, a priori, de ces six questions :



Nous avons entrepris pour ce questionnaire le traitement statistique des données recueillies suivant deux méthodes d'analyse : la classification hiérarchique (selon I.C. Lerman) et la classification implicative (selon R. Gras). Nous verrons plus loin les résultats que nous avons déduits de la seconde.

D'ores et déjà, nous pouvons nous demander sur quoi s'appuie la stratégie de décision de l'élève dans cet exercice très particulier qui consiste à faire un choix parmi un ensemble fermé de solutions. Elle est nécessairement fort proche de celle déployée dans les Q.C.M. (Question à Choix Multiples) et, en revanche, très différente de celle qui est suivie dans les démonstrations à plusieurs pas, dans les problèmes ouverts et même dans le logiciel D.E.F.I. Ici l'élève doit seulement retenir ou rejeter un élément d'une liste. Il n'a pas de véritable activité créatrice. De plus, le sens global n'est pas mobilisable; les seuls points d'appui sont le sens du pas de démonstration et l'ensemble langagier des assertions ou théorèmes dont l'élève dispose. Nous avons cependant remarqué, grâce à la répétition et à la concomitance d'erreurs, la stabilité de certaines procédures qui correspondent à des modèles de fonctionnement en équilibre aussi bien chez un élève particulier que chez l'élève en général. Les erreurs, que généralement nous appelons «erreurs de raisonnement», relèvent de causes profondément ancrées et pas seulement d'ordre logique. Elles tiennent aussi à la mécon-

naissance des objets traités (quand ce n'est pas du vocabulaire utilisé) ; et aussi, très fortement, lors de l'articulation hypothèse -> théorème -> conclusion, au pouvoir attracteur de certains mots, certains signes ou symboles, certaines formes (structures de phrases, rythmes, ...).

L'élève assemble plus, quand il se trompe, à partir d'un critère «signe» que d'un critère «sens». Il va puiser dans les solutions offertes les indices formels les plus vraisemblables, les plus pertinents pour lui.

Résultats : Paramètres des réussites

a) Moyennes

On retrouve la hiérarchie présumée a priori entre les réussites Ri aux 6 questions: R_2 (96,25 %), R_1 (78,75 %) et R_4 (72,5 %). De plus : $R_3 = R_6$ (87,5 %).

Le taux de réussite de Q_5 (85 %) est un peu inférieur aux taux de réussite de Q_3 et Q_6 (Q_5 ne fait pas référence à la symétrie centrale ; son théorème est instancié). Il est nettement inférieur à celui de Q_2 malgré la même formulation du théorème en «si ... alors ...» ; est-ce en raison de la double hypothèse?

b) Coefficients de corrélation entre les modalités «réussites» des 6 questions

Les plus fortes liaisons positives sont observées entre :

R_1 et R_2 (formulation différente du théorème mais même contenu) : $r = 0,38$

R_1 et R_6 ($r = 0,358$) : sont-ce les mêmes élèves qui ont des difficultés à commencer (Q_1) et à soutenir leur attention (Q_6) ?

R_3 et R_5 ont avec toutes les autres réussites un coefficient de corrélation très proche de 0 et même négatif sauf avec R_4 .



Analyse implicative
des 6 réussites
(à l'aide du logiciel C.H.I.C.)

Le tableau des implications permet de construire le graphe implicatif suivant orienté transitif, pondéré, associé à la relation de quasi-implication.

assez frappantes avec les classes formées a priori à partir des proximités formelles, sémantique et référentielle des 6 questions:

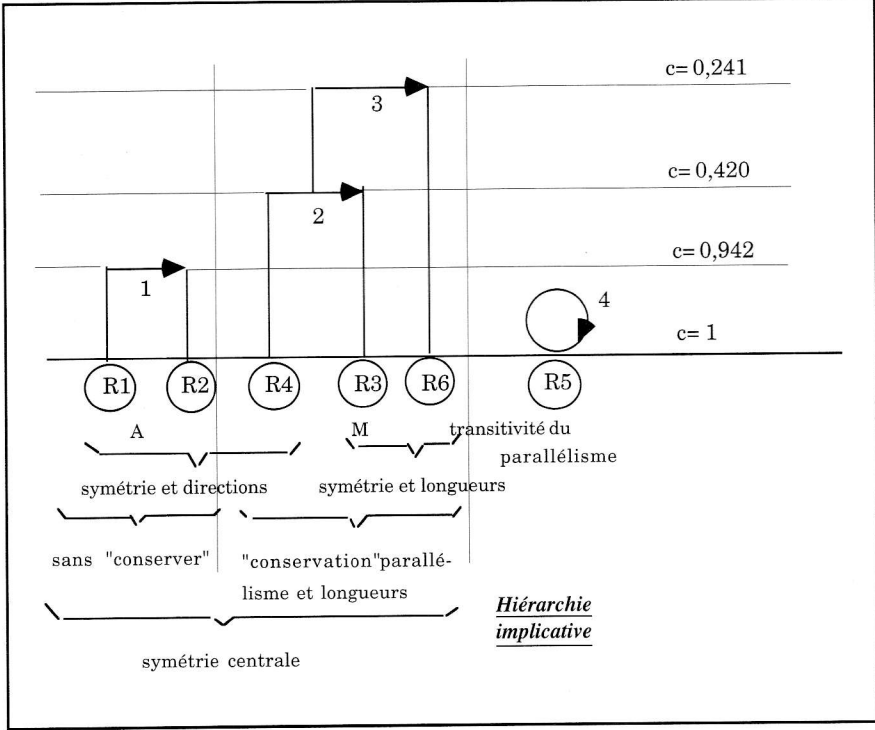
- séparation très nette de R5, réussite à la seule question relative à la transitivité du parallélisme ;
- classe (R1, R2) : les questions Q1 et Q2 ne diffèrent que par les expressions de

leurs théorèmes ; aucun de ceux-ci ne contient le mot «conserver» de compréhension ambiguë et, de toute manière, difficile pour les élèves;- classe (R4, R3, R6) regroupant les réussites aux deux questions (Q3) et (Q6) relatives à la propriété métrique de la symétrie centrale et la réussite à la question (Q4), de nature affine mais dont le théorème, comme celui de (Q6), est exprimé en terme de conservation.

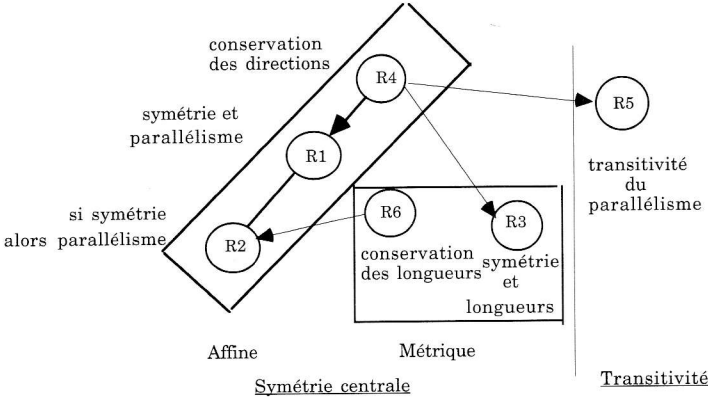
Ce dernier point placerait-il les 3 items à un même niveau de complexité ?

En conclusion, on aura vu la stabilité de certaines procédures utilisées par les élèves, stabilité soulignée par la

méthode d'analyse des données employées. Ce phénomène, s'il n'est pas nécessairement entièrement observable dans des démonstrations plus longues et plus ouvertes, n'en reste pas moins un élément complémentaire de diagnostic et d'interprétation de quelques comportements que l'on juge aberrants et qui pourtant sont significatifs d'une démarche ou d'une conception plus générale et en équilibre chez certains élèves.



Reprenant la méthode développée par R. Gras et A. Larher, on peut constituer des classes de réussites qui s'organisent ainsi en fonction des implications intra-classes.



Les valeurs des cohésions des classes, indices d'une significativité de leur constitution, sont indiquées à chaque niveau de la classification.

Nous retrouvons des similitudes

