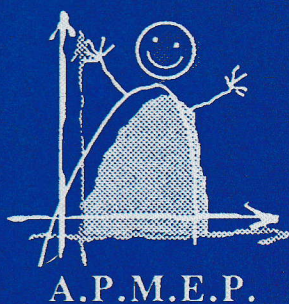
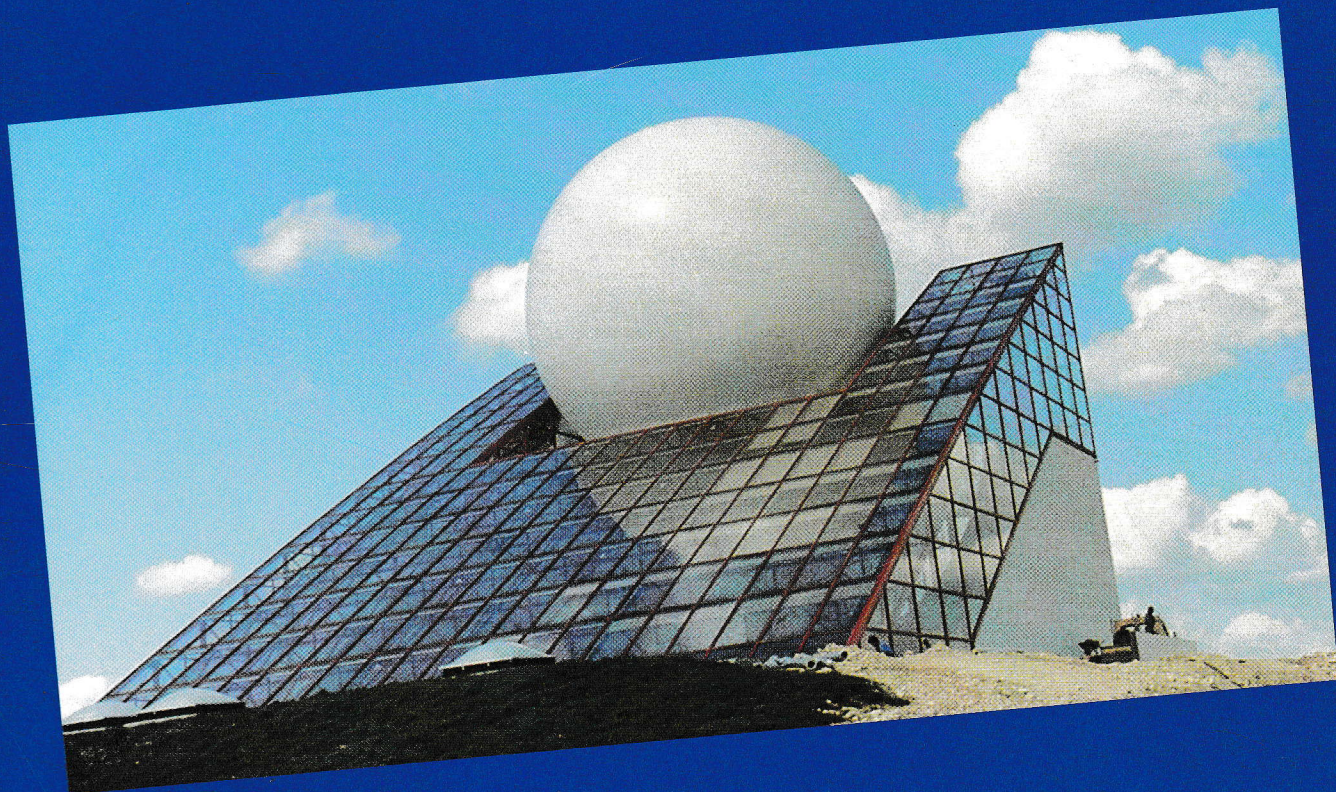


PLOT

67

*Journées nationales
de l'APMEP 1993
à Poitiers*

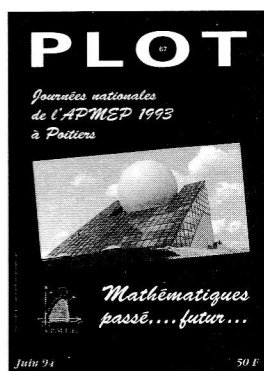


A.P.M.E.P.

*Mathématiques
passé, ... futur...*

Juin 94

50 F



Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Luce Dossat, René Gauthier,
Georges le Nezet, Ginette Mison,
Serge Parpay, Raymond Torrent,
Michel Mirault, René Métregiste.

Rédaction
Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
120 FF pour 4 numéros par an
Adhèrent APMEP : 100 F.
Abonnement étranger : 120 F.

**Photocomposition
et maquette**
i.c.e.

Impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse
Brest, Caen, Clermont-Ferrand et
La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours
du Centre National des Lettres et
du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

Les diapositives en classe

Jean Fromentin, Niort 2

DEFI, un logiciel de démonstration

R. Gras & C. Boulard, Rennes 9

Le concept de la valeur absolue

A. Gagastis & I. Thomaidis, Thess ... 12

Cabri-Géomètre, un outil...

B. Capponi & C. Laborde, Grenoble..... 17

Rapports entre visuel et géométrie

Colette Laborde, Grenoble 20

Math. en JEANS

Pierre Audin, Paris 26

Image et Maths

Colette Malé, Paris 33

Les Chryzodes

Rouiller, Germain, Sonntag 34

Multi sunt vocati

Jean Aymes, Montauban 39

Les IUFM pour demain

Blanchard & Cie., Poitiers 45

EDITORIAL

Comme l'habitude en a été prise depuis plusieurs années, vous allez trouver dans ce numéro du PLOT les premiers textes des ateliers et exposés des Journées Nationales de l'APMEP. D'autres suivront dans le prochain numéro.

Pour les lecteurs qui n'ont pas pu venir au Futuroscope participer aux Journées Nationales de Poitiers, en octobre dernier, nous espérons que ces textes leur donneront un aperçu de la richesse des échanges qui ont eu lieu.

Pour les participants, fidèles ou nouveaux lecteurs du PLOT, nous espérons que ces textes gommeront un peu la frustration que l'on éprouve toujours lorsque l'on a à faire 2 choix parmi 80 propositions.

Nous vous laissons le soin de calculer le nombre de combinaisons offertes, avant de vous souhaiter une bonne lecture, et en espérant vous retrouver en octobre aux Journées Nationales de Brest.

Utilisez les diapositives en classe

Jean FROMENTIN - Niort

Il m'est très difficile, par écrit, de traduire exactement ce qui s'est passé dans cet atelier, celui-ci reposant essentiellement sur la présentation d'images avec, comme chacun peut l'imaginer, toute la dynamique, tous les échanges et tout l'étonnement que ces images ont suscités parmi les participants.

Moins chaleureux que le travail en atelier, ce compte rendu va donc prendre l'aspect un peu froid d'un exposé, avec une présentation assez générale de l'utilisation de l'image en classe, suivie d'une présentation succincte de chacune des six séries de diapositives de l'IREM de POITIERS.

Je tiens à remercier ici tous les collègues qui ont participé à cet atelier et qui, par l'intérêt qu'ils ont manifesté, m'ont incité à poursuivre ce travail.

Pourquoi des diapositives en Math ?

L'image occupe une place prépondérante dans la communication. La télévision, la bande dessinée, l'affiche publicitaire sont là pour nous le rappeler au cas où on oublierait de la prendre en compte dans l'enseignement.

Il n'est cependant pas question de sacrifier à la mode audiovisuelle, en utilisant coûte que coûte films ou diapos dans notre enseignement. Ce dernier est guidé par un certain nombre d'objectifs, et notre travail consiste à rechercher les moyens de les atteindre. L'image est peut-être l'un de ces moyens :

- Il nous faut en effet faire preuve de plus en plus d'ingéniosité pour capter l'attention de nos élèves ; il nous faut rechercher des activités motivantes pour les inciter au travail. L'utilisation de l'image encore inhabituelle dans l'enseignement des mathématiques peut nous aider dans cette tâche.

- Nous ne voulons pas que notre enseignement soit coupé de la réalité. Si nous voulons que nos élèves réinvestissent leurs connaissances mathématiques dans leur environnement, il nous faut introduire cet environnement dans notre enseignement ; et l'image peut y contribuer largement.

- Nous voulons dispenser notre enseignement au plus grand nombre d'élèves. Nous voulons améliorer leurs connaissances en mathématiques, voire même les intéresser aux mathématiques ! La visualisation d'objets, la concrétisation de no-

tions mathématiques peut en permettre une meilleure appropriation et peut-être une mémorisation plus durable.

Enfin, le texte et la parole ne sont pas les seuls moyens de communication. Contrairement au texte et à la parole, une «lecture» d'images n'est pas linéaire et nous devons tous, élèves et enseignants, nous habituer à lire des messages visuels, à nous exprimer par l'image. Est-il nécessaire de signaler l'importance de la lecture d'images en mathématiques ! En géométrie bien sûr, mais aussi en algèbre ou en arithmétique pour la reconnaissance de modèles, de structures.

Ce qui vient d'être évoqué concerne bien sûr toutes les techniques visuelles : films vidéo, retroprojecteur, diapos et affiches. Il n'est pas question de privilégier l'une plutôt que l'autre ; chacune, dans son domaine, a des intérêts qui lui sont propres et le choix se portera sur l'une ou l'autre en fonction

- des possibilités matérielles (présence des appareils, existence de documents) en ce qui concerne l'utilisation,

- des objectifs à atteindre ou de la nature du message à transmettre en ce qui concerne la réalisation des documents.

S'il est plus particulièrement question, dans ce qui suit, de l'utilisation de diapositives, il ne s'agit pas pour autant de sous-estimer les autres moyens visuels ; et le retroprojecteur en particulier, qui faisait l'objet d'un autre atelier pendant ces Journées Nationales, fait partie de ceux qu'il ne faut pas négliger.

D'un point de vue matériel, le projecteur diapos est très répandu dans les établissements ; sa manipulation est aisée.

Contrairement au film, dont le scénario est imposé par les auteurs, les diapositives laissent l'utilisateur entièrement libre du montage. En fonction de ses objectifs, l'enseignant peut choisir l'ordre de présentation des images et même en laisser de côté.

S'il possède le matériel nécessaire (reflex, compact 24x36), l'enseignant peut lui-même réaliser des diapositives pour compléter une série déjà proposée ou sur un thème original.

Au niveau de l'utilisation en classe, l'avantage des diapositives est qu'on peut

s'arrêter aussi longtemps qu'il est nécessaire sur une image. On peut même revenir très facilement en arrière pour revoir une image qui prend «après coup» un intérêt nouveau.

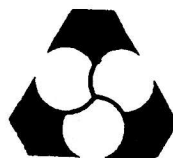
On peut envisager la mise en place d'une diathèque accessible aux élèves. Dans le cadre d'un travail autonome ou de la réalisation d'un exposé, les élèves peuvent facilement visionner et choisir les images en fonction de leur thème de travail. Le montage diapos leur servira ensuite d'«aide-mémoire» au moment de leur exposé. Pendant leur exposé, ils ne seront pas face à leurs camarades, mais au milieu d'eux ; et ils seront d'autant plus à l'aise dans leur intervention que les regards de leurs camarades se porteront sur l'image et non sur eux-mêmes.

Voilà donc les intérêts majeurs de l'utilisation de diapositives en classe. Les extraits des six séries de diapositives (IREM de POITIERS) qui suivent ce texte donneront une idée plus précise des activités possibles et permettront de considérer des utilisations originales.

LES LOGOTYPES

Cette série propose des dessins de marques, symboles associés à une entreprise (Citroën, Renault, Crédit Mutuel, Banque Populaire ...).

Certains logotypes admettent un ou des axes de symétrie, un centre de symétrie ; d'autres sont invariants par rotation d'un tiers, d'un cinquième ... de tour ; d'autres sont composés d'un motif reproduit par translation.



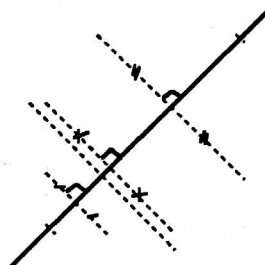
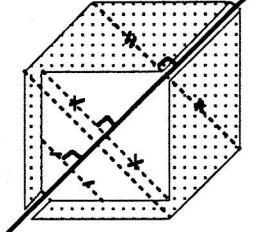
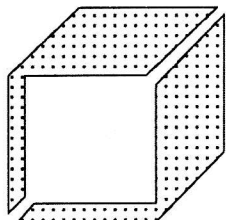


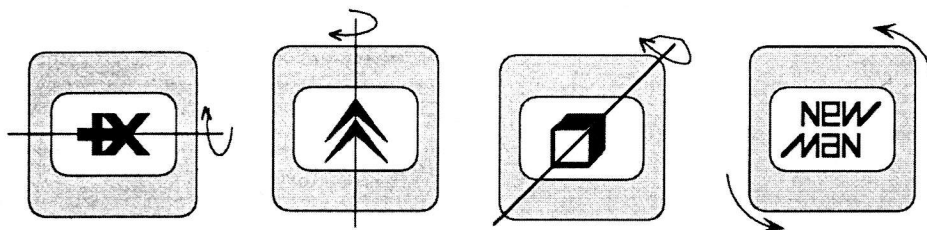
Si cette série est utilisée pour faire découvrir une «transformation», la symétrie orthogonale par exemple, on peut choisir 4 ou 5 logotypes admettant un axe de symétrie et y glisser un intrus que les élèves devront découvrir. Pour mettre en évidence les éléments de symétrie, on peut projeter sur «tableau noir» et travailler à la craie sur le document projeté. En éteignant alors le projecteur, seules restent au tableau les segments reliant un certain nombre de points à leurs images et la médiatrice de ces segments. On voit ici

comment on peut, à partir d'une image, accéder au concept.

Cette série peut aussi être utilisée pour faire «fonctionner» mentalement l'une ou l'autre des transformations. La reconnaissance visuelle des éléments caractéristiques de telle ou telle transformation permet ainsi à l'élève de construire ou développer ses propres images mentales.

Une utilisation originale à ce sujet est la possibilité de retourner manuellement la diapo dans l'appareil pour mettre en évidence le fait que, dans le retournement





(vertical, horizontal suivant la position de l'axe de symétrie) ou dans le déplacement d'un demi-tour (symétrie centrale), le dessin reste identique à lui-même.

Cette série de diapositives peut être utilisée sur les quatre niveaux du collège ; certains documents sont utilisables en lycée (composée de transformations, détermination du centre et de l'angle de rotation).

CALCULS AU QUOTIDIEN

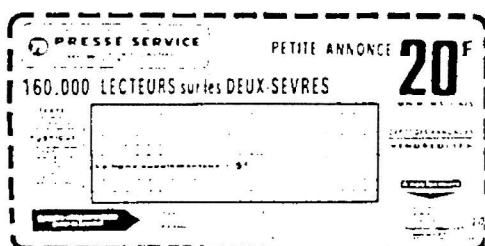
Cette série propose, à partir de documents réels (extraits de catalogues ou de dépliants publicitaires, produits de commerce) des situations numériques simples. L'activité proposée est un travail sur le sens des opérations et non pas sur les techniques opératoires. Voici, pour fixer les idées quelques documents proposés avec un commentaire pour chacun.



Ce document est intéressant au niveau de la lecture d'images : 480 est la seule information numérique ; et il est difficile de l'éviter ! De là à penser qu'il y a 480 bâtonnets dans la boîte, c'est une conclusion logique que font les élèves... et les

consommateurs. Mais il s'agit d'extrêmes de coton et c'est écrit en tout petit dessous 480 ! Alors...

- Combien de bâtonnets ?
- Combien de sachets dans la boîte ? (il y a 15 bâtonnets par sachet).



Pour être tout à fait honnête, il faut dire que de l'autre côté de la boîte figure en clair l'information : 240 bâtonnets. Mais de quel côté la boîte est-elle présentée au consommateur ?!



Si l'enseignant peut poser lui-même les questions, il peut aussi laisser les élèves les poser. Il peut aussi présenter un document aux élèves et leur demander de se poser un problème à partir de la situation présentée, d'en rédiger le texte, puis de le résoudre.

Pour les élèves qui ont des difficultés à se représenter mentalement une situation décrite par un texte (difficulté de lecture ou situation non vécue), la présentation de ces documents peut permettre momentanément d'atténuer ou de contourner cette difficulté et de les faire tout de même travailler sur le sens des opérations.

Par ailleurs, il est manifeste que cette activité mathématique a un rôle éducatif. Tout en développant le sens des opérations, elle participe à l'éducation du «jeune» consommateur.

POURCENTAGES

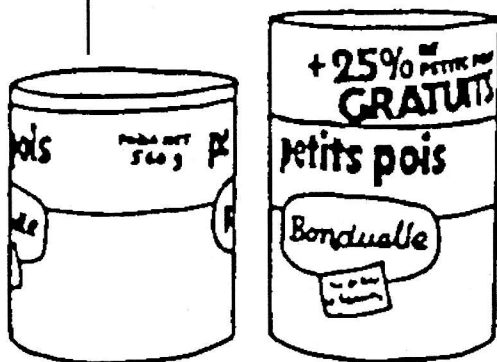
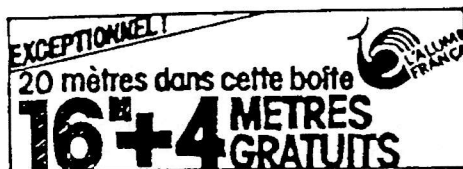
Toujours à partir de documents réels (publicités, promotions ...) cette série aborde donc la notion de pourcentage. Les six premières vues permettent d'aborder cette notion. Elles donnent l'occasion de «faire parler» les élèves sur ce sujet et permettent à l'enseignant de détecter éventuellement des «idées fausses». Les autres documents proposent des situations où on doit appliquer un pourcentage (niveau

6ème) ou bien déterminer un pourcentage (niveau 5ème). Voici quelques documents avec commentaires.

Signalons aussi que la forme de cette activité (projection au mur donc pas de document «sur la table», salle assombrie)



incite naturellement les élèves à calculer mentalement, surtout que les données numériques sont simples.



Les situations proposées dans cette série permettent d'étudier la différence entre «+20% gratuit» et «20% gratuit». Ces deux expressions ne diffèrent que d'un signe, mais la nuance est de taille :

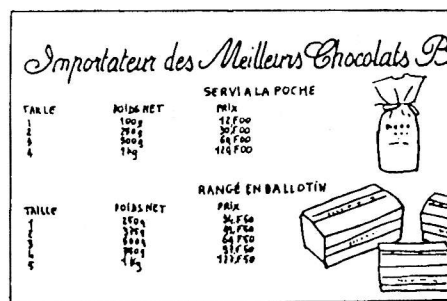
+1/2 gratuit donc 1/3 gratuit ; +1/3 gratuit donc 1/4 gratuit etc ...

Cette activité met une fois de plus en évidence le rôle éducatif des mathématiques.

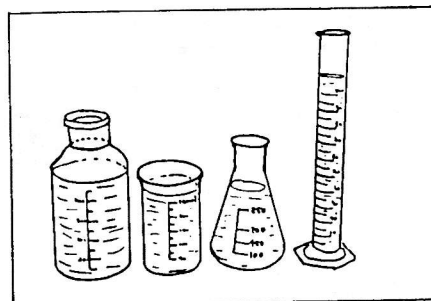
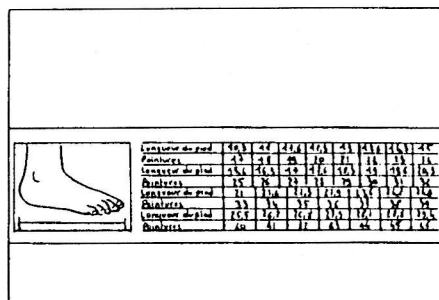
PROPORTIONNALITE

Cette série propose des situations réelles où intervient la proportionnalité ou la non-proportionnalité (recettes, abonnements, carte routière ...). Les différents aspects de la proportionnalité y sont abordés : tableaux numériques, échelles, graphiques, géométrie (agrandissement-réduction).

Cinq documents «fabriqués» permettent d'aborder les problèmes de volumes



en relation avec les hauteurs de liquide (graduations régulières ou non). On peut ainsi faire le lien avec les solides étudiés en géométrie de l'espace : prismes, cylindres, cônes.



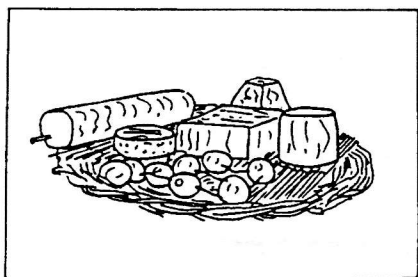
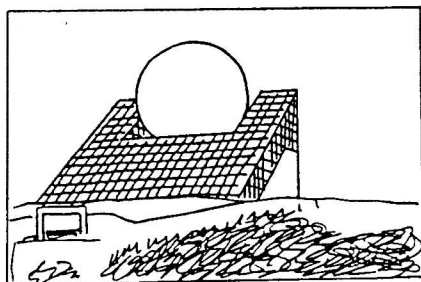
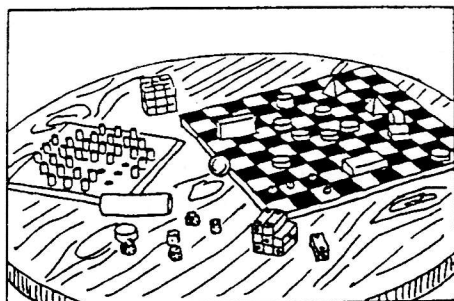
AUTOUR DES SOLIDES

Comme celle des logotypes, cette série pourrait s'intituler : «des images aux modèles». En effet, les objets, les édifices présentés permettent de dégager les modèles des solides étudiés au collège.

Les premiers documents conçus par thème (architecture, jeux, confiseries ...) amènent à considérer les différentes formes les unes par rapport aux autres et à utiliser le vocabulaire approprié.

Six documents font le point sur les différents modèles : parallélépipède en 6ème, prisme et cylindre en 5ème, sphère en 4ème, pyramide et cône en 3ème.

Un document attire l'attention sur les solides de révolution et un autre sur les solides de Platon. Deux documents, avec fiches-réponse, permettent de faire un bilan. Voici trois extraits.



Comme pour les logotypes, on peut projeter les documents au «tableau noir» et dessiner à la craie les contours des

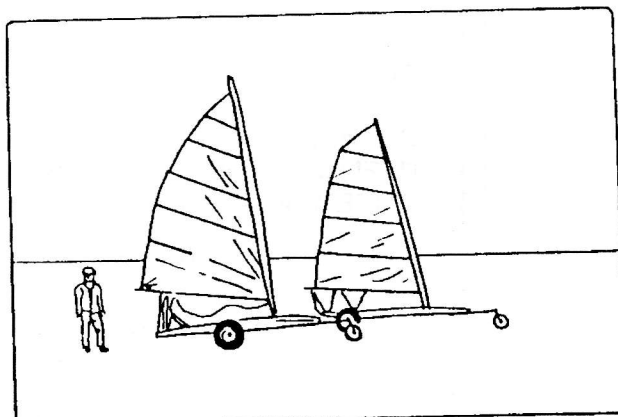
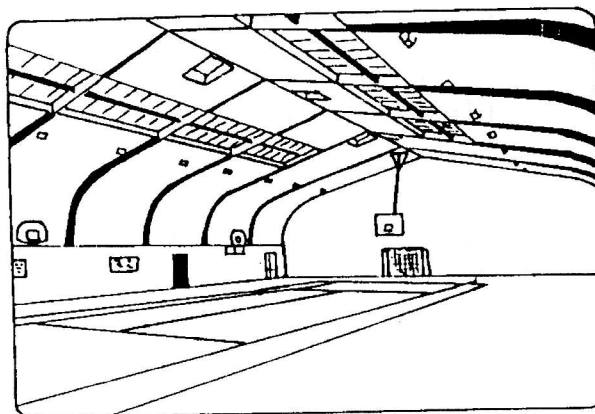
objets. En éteignant alors le projecteur, on ne fait apparaître que l'«ossature», et on s'approche ainsi du modèle mathématique.

SPORTS ET GRANDEURS

L'objectif de cette série est d'inciter les élèves à se fabriquer visuellement et mentalement des références, des repères au niveau des ordres de grandeur. En effet, bien souvent, lors de résolution de problèmes dits «concrets», nos élèves donnent sans sourciller des réponses qui défont le bon sens. Mais ont-ils l'habitude de se soucier de la vraisemblance d'un résultat ?

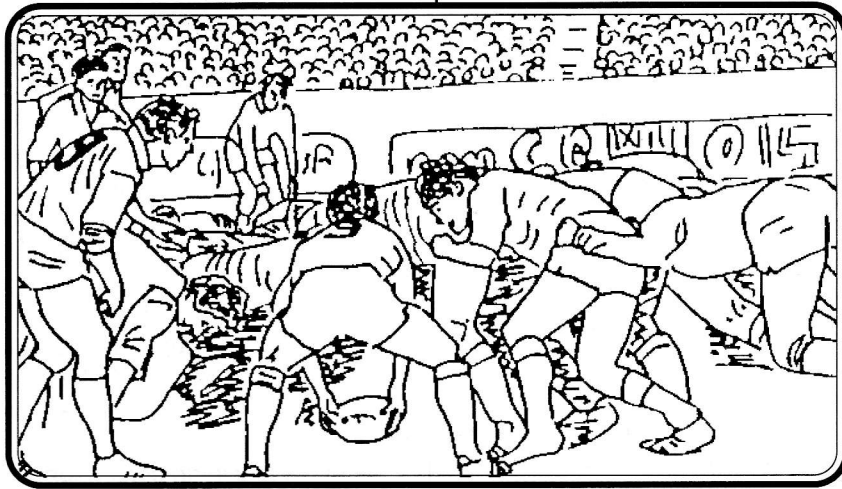
Aussi, à la vue de ces documents réalisés dans le domaine du sport (domaine «proche» de nos élèves), ils pourront se rendre compte s'ils évaluent correctement ou non les longueurs, les masses, les aires les effectifs ...

Cette activité qui, à notre sens, devrait être menée de façon ludique, devrait inciter nos élèves à observer les objets de leur environnement et en évaluer les différen-



tes mesures. On pourra espérer que pour eux, «connaissances» rime avec «bon sens».

Le document d'accompagnement propose une grille réponse (à dupliquer) pour faciliter le déroulement de l'activité.



EN GUISE DE CONCLUSION

L'intérêt essentiel des documents diapos est donc de pouvoir faire entrer facilement dans la classe des situations réelles, de les observer, les étudier et ainsi de faire des mathématiques. Les activités proposées n'ont pas ce caractère artificiel si souvent ressenti par les moins motivés. Ces derniers ont souvent l'impression que les problèmes existent pour faire des mathématiques. Ils se rendront alors peut-être compte que ce sont plutôt les mathématiques qui existent pour résoudre des problèmes.

Ces six séries de diapositives sont disponibles à l'IREM de Poitiers. (cf bon de commande PLOT page 48)

Chaque document d'accompagnement présente :

- les objectifs généraux de la série de diapositives,
- la présentation de chaque diapositive (dessin et commentaires),
- des idées d'utilisation,
- des compléments ou des prolongements sous forme d'activités ou d'exercices (à dupliquer).

Le rétroprojecteur : bien communiquer pour mieux enseigner.
Atelier (93-E212)

Jean Fromentin a déjà présenté cet atelier lors des Journées Nationales de Guadeloupe et son compte rendu a été publié dans le PLOT n° 57 de décembre 1991. Aussi ne nous paraît-il pas utile de le remettre dans ce numéro. Cependant, si vous souhaitez vous le procurer, vous pouvez le demander à l'IREM de POITIERS en joignant 6,70 F **en timbres** pour les frais de port.

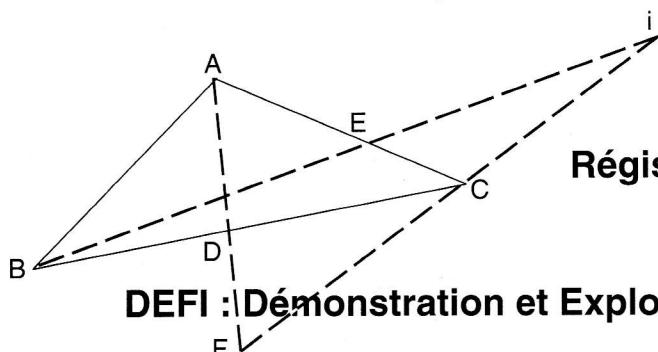
IREM, 40, Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS Cedex.

**PLOT n° 57 de décembre 1991 rendait compte des ateliers
des Journées Nationales de la Guadeloupe.**

DEFI

Un logiciel de démonstration en géométrie

Régis Gras et Christian Boulard , (IRMAR)
IREM de Rennes



DEFI : Démonstration et Exploration de la Figure Interactives

La version actuelle de ce logiciel, écrite en Pascal pour Macintosh par Italo Giorgiutti, est le résultat de refontes successives depuis 8 ans au sein de l'équipe de didactique de l'IRMAR. Les mathématiques sur lesquelles il porte sont celles qui sont enseignées dans les classes françaises d'élèves de 12 à 15 ans. Dans ces classes, l'enseignement de la géométrie conduit à de sérieux problèmes didactiques et, quelquefois, à des obstacles rédhibitoires pour la suite de la formation mathématique de ces élèves. En effet, ces derniers rencontrent généralement pour la première fois des problèmes avec démonstration à pas multiples, passant d'une géométrie des figures, géométrie physique, à une géométrie de la raison : la découverte de la solution, le sens et la pratique canonique de la preuve sont à l'origine de ces obstacles. C'est cette prise de conscience qui agit en moteur de notre tâche didactique et sa transposition informatique. Nous faisons l'hypothèse, validée par la suite, que des élèves en difficulté ou commençants, ayant la possibilité de travailler à leur rythme, en interaction avec un interlocuteur à grande capacité mnémonique, obstiné, patient mais rigoureux, exprimeront peu à peu leur rationalité comme l'exigent les règles de la géométrie euclidienne. Nous conjecturons également que l'exploration guidée d'une figure géométrique leur fera prendre conscience de la structure du problème, que l'expression d'un contrat

personnalisera la structure de la solution et leur permettra de distinguer ce qui est constaté de ce qui est rationnellement établi.

1- Description sommaire

Deux modules principaux constituent l'architecture du logiciel :

- le module «Exploration de la figure»,
- le module «Démonstration».

Un troisième module est en cours d'expérimentation. Il doit permettre la traduction graphique des données, sous contrôle de conformité de la traduction avec le texte et avec les règles de la géométrie euclidienne, ainsi qu'une animation des éléments géométriques dès que l'utilisateur lève des contraintes particulières du problème.

Ces modules peuvent se dérouler en parallèle, en s'informant mutuellement, mais peuvent être interrompus pour obtenir des informations et, en particulier, pour consulter un module «Bilan». D'où son nom : «Démonstration et Exploration de la Figure Interactives» (D.E.F.I.). Voici un exemple de problème proposé par D.E.F.I.:

*On considère un triangle **ABC** et on désigne par **D** et **E** les milieux de **[BC]** et **[AC]**, par **F** et **i** les symétriques de **A** par rapport à **D** et de **B** par rapport à **E**. Démontrer que **C** est le milieu de **[Fi]**.*

1-1- Module «Exploration de la figure»

Il a une fonction heuristique et, pour cela, se présente comme une suite de

dialogues de 3 types:

- «sais-tu démontrer telle propriété...?»,
- «existe-t-il dans les données un objet possédant telle propriété...?»,
- «désigne par son nom cet objet...».

Les déclarations sont enregistrées dans un fichier «Bilan» qui se constitue comme un véritable contrat entre l'élève et l'ordinateur et qui est consultable à tout moment par l'élève.

1-2- Module «Démonstration»

Il contraint l'élève à procéder, sans indulgence de rigueur, par pas de démonstration successifs. Ici aussi, une suite de dialogues s'engage entre l'élève et l'ordinateur :

- «quelle propriété veux-tu démontrer...?», «spécifie-la..»,
- «sur quelle définition, sur quel théorème t'appuies-tu...?» (un fichier informatisé est disponible),
- «quelles données en permettent l'emploi...?».

Tout pas de démonstration acquis s'inscrit dans le bilan et est capitalisé comme donnée complémentaire. Si l'élève transgresse la rigueur, il reçoit un message spécifiant le type d'erreur faite. S'il est bloqué dans le développement de la preuve, il peut revenir au module «Exploration de la figure».

2- Expérimentations de D.E.F.I.

Elles se déroulent depuis plusieurs années et ont donné lieu à une thèse d'Université de Rennes (S.Ag Almouloud 1992). Une autre thèse en cours doit prolonger ce travail et devrait déboucher l'année prochaine sur une soutenance de thèse.

Les premières expérimentations prouvent, non seulement l'intérêt du logiciel pour l'élève, mais également son efficacité didactique: recherche de solution facilitée sans blocage, compréhension du sens de la démonstration, respect des règles de fonctionnement de la preuve mathématique (par exemple, plus de confusion entre hypothèse et conclusion,...). Cette efficacité, évaluée dans la durée, montre l'accès à un certain équilibre cognitif des élèves.

Mais, en outre, par l'analyse des bilans enregistrés et des travaux écrits, les expérimentations conduisent à la mise en évidence d'une typologie de comportements, stable et fermée pour le type de situations-problèmes proposées et pour l'environnement informatique donné. Citons, par exemple, le comportement: «*conclusion intermédiaire non démontrée utilisée comme hypothèse dans l'inférence hypothèse-théorème-conclusion*». Une vingtaine de tels comportements sont donc répertoriés et permettent une action directe et automatique sur l'élève. Cependant, voulant agir sur les raisons profondes en amont des comportements, comme le sont les représentations ou les conceptions, nous poussons plus loin le degré d'analyse.

3- Du comportemental à l'épistémique

En pratiquant sur ces comportements, au sein des problèmes qui les font émerger, des analyses de données multidimensionnelles, nous conférons à la typologie comportementale précédente une structure, certes sous-jacente, mais inapparente à l'examen statistique classique. Rappelons, à ce sujet, le développement d'une nouvelle méthode qui nous est propre, l'analyse implicative statistique, créée spécialement pour donner un sens quantifiable à des inférences du type: «si l'on observe tel comportement **a**, alors on observe aussi tel comportement **b**». C'est une telle méthode, conjugée avec des méthodes basées sur la similarité, qui a permis de mettre en évidence la structure en quatre familles disjointes de comportements, définissant elles-mêmes quatre modèles épistémiques plausibles:

- modèle correct,
- modèle avec centration sur la conclusion,
- modèle avec centration sur les hypothèses,
- modèle sans fondement logique.

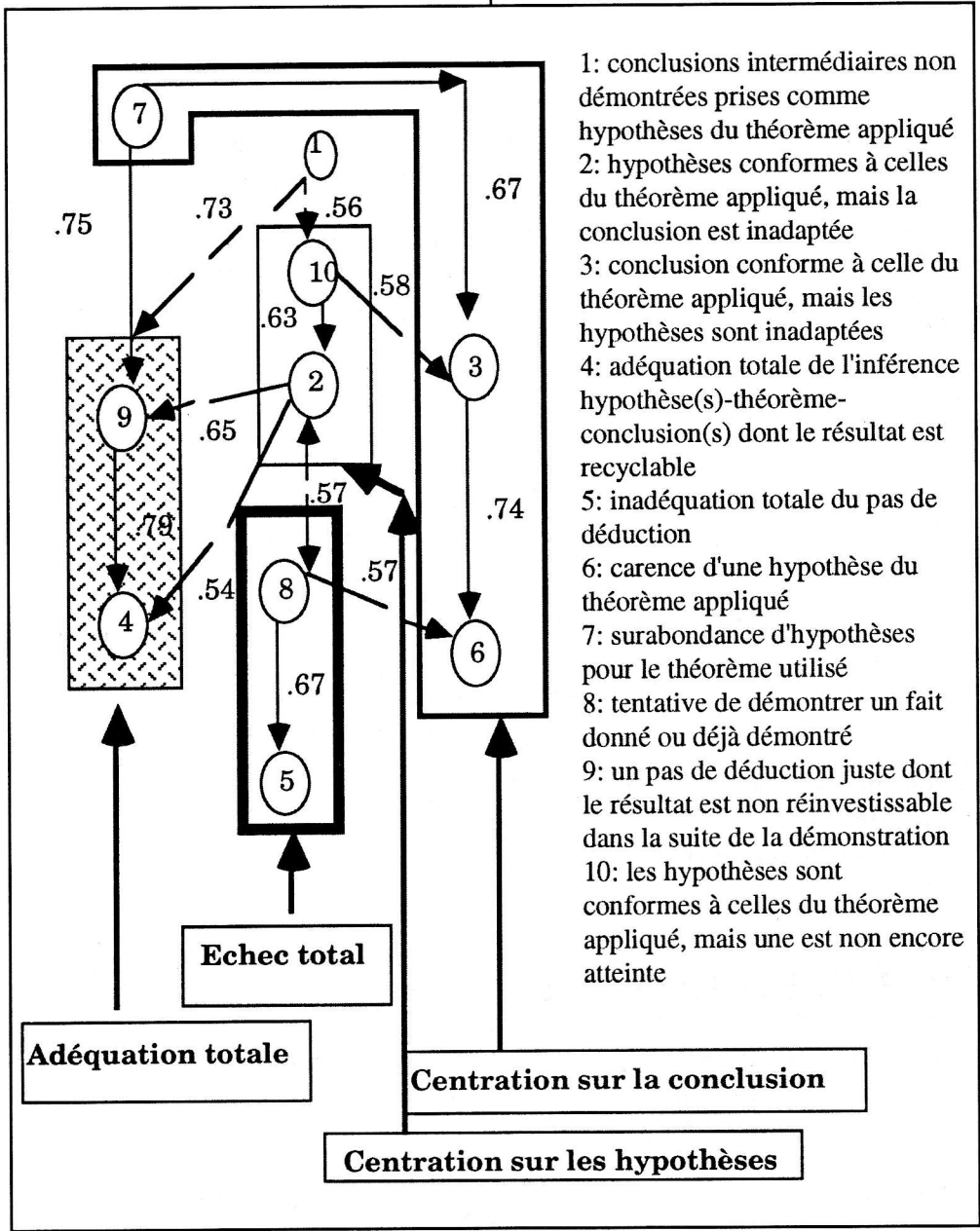
Nous observons ci-après le graphe représentatif de la structure mise en évidence.

Le modèle «**centration sur la conclusion**» se caractérise par l'emploi de procédures où sont prégnants les buts ou les sous-buts à atteindre, mais en négligeant le sens et le rôle des hypothèses. Ce modèle met en jeu le rôle générateur du théorème et le rôle dérivé de la conclusion.

Le modèle «**centration sur les hypothèses**» est marqué par le rôle localement producteur des hypothèses du fait de la possibilité qu'elles don-

nent de paraphraser et de se livrer à un simulacre d'argumentation.

Les recherches qui suivent vont, nous l'espérons, affiner ces conceptions et tenter d'identifier, en temps réel, celle privilégiée sous laquelle fonctionne l'élève. Cette reconnaissance donnerait ainsi une voie d'action médiatrice très utile pour le maître et complémentaire de son propre diagnostic.



Le concept de valeur absolue, une étude multidimensionnelle

Athanassios GAGATSIS - Ioannis THOMAIDIS. Thessalonique

Les auteurs sont du Département des Mathématiques de l'Université Aristote de Thessalonique, ville qui vient d'accueillir une exposition de Centre-Sciences.

Résumé

De façon caractéristique, le concept de la valeur absolue croise, sur les plans scolaires et scientifiques, les différents statuts d'un concept mathématique. D'où notre proposition d'une étude multidimensionnelle de cette notion: étude historique, étude de la transposition didactique de ce concept et étude expérimentale auprès d'élèves et étudiants grecs.

Cette dernière étude met en évidence un large éventail d'erreurs commises par les élèves-étudiants; ce qui interroge: «jusqu'à quel point ces erreurs sont-elles dues aux obstacles qui sont les éléments constitutifs du savoir mathématique et, par voie de conséquence, jusqu'à quel point proviennent-elles des interventions didactiques?»

1. ETUDE HISTORIQUE

Pour saisir la nature des problèmes à partir desquels se forma le concept de valeur absolue et se précisèrent ses fonctionnements, nous avons eu recours à un grand nombre de textes historiques, dont l'étude nous permit de jalonner quatre principales phases d'évolution (Gagatsis et Thomaïdis, à paraître).

Dans la **première** phase, la valeur

absolue apparaît comme une notion implicite, strictement liée à une conception du nombre relatif en tant que nombre commun muni d'un signe. Cette conception, pour un nombre positif ou négatif, a fonctionné de manière efficace et pendant longtemps comme outil de résolution de problèmes arithmétiques et algébriques; par exemple pour construire des tables logarithmiques (Napier) ou pour élaborer une théorie générale des équations polynomiales (Descartes, Newton). Parallèlement cette même conception a ouvert un champ théorique dans l'étude des nombres relatifs autorisant la libre transposition de modèles exo-mathématiques, comme le «gagner» et le «perdre» (Euler). Dans les textes de cette période, nous avons pu reconnaître le concept de la valeur absolue en tant que concept du «nombre sans son signe», ou de la «distance à partir de zéro sur la droite arithmétique». Mais rien ne semblait alors imposer, pour ce concept, une étude spécifique et son utilisation particulière.

Dans la **seconde** phase d'évolution, la valeur absolue assure une fonction explicative dans le contexte du calcul algébrique, et notamment au niveau de l'algèbre des inéquations. Plurielles sont ses applications dans la résolution des équations du calcul approché (calcul d'erreurs) et dans la théorie des nombres (Lagrange, Gauss). Les termes «pris positivement» ou «abstraction faite des si-

gnes» sont utilisés comme substituts du concept de la valeur absolue, pour rendre le sens exact de certaines transformations sous forme d'inéquation.

La **troisième** phase d'évolution du concept de la valeur absolue est étroitement liée au changement conceptuel fondamental relatif au concept de nombre; c'est-à-dire au passage progressif qui va de la compréhension empirique du nombre en tant que moyen pour mesurer des quantités, jusqu'au concept abstrait du nombre en tant qu'élément d'un système mathématique caractérisé par les propriétés fondamentales de ses éléments et par l'absence de contradiction. Les nombres négatifs et positifs acquièrent un sens autonome et se distinguent, en arithmétique, du nombre commun muni d'un signe. La valeur absolue commence ainsi à se donner comme un concept spécifique, défini pour chaque nombre positif et négatif tandis que, parallèlement, est affirmée sa relation avec le concept de la mesure d'un nombre complexe, introduit durant la même période (Argan, Cauchy). Il est utilisé de façon systématique dans les différentes applications de l'algèbre des inéquations, et notamment dans les techniques d'«epsilon» proposées par Cauchy en 1821 au niveau de l'analyse. Cauchy s'en sert comme d'un objet mathématique ordinaire, pouvant être soumis aux transformations analytiques; mais, dans les démonstrations des théorèmes sur la convergence de séries, il utilise d'une manière indirecte tous les concepts fondamentaux qui constitueront la théorie contemporaine de la valeur absolue. A ce stade, ne manquent encore qu'un symbolisme simple et la formalisation des propriétés du concept au moyen de ce symbolisme.

La **quatrième** et dernière phase d'évolution correspond très précisément à ce processus vers la formalisation, vivement nécessitée par l'évolution de l'analyse complexe. Cependant le symbole actuel, qu'a introduit Weierstrass en 1841 pour exprimer

les mesures d'une variable complexe et certains concepts topologiques, ne sera communément accepté qu'à partir du dernier quart du XIX^e siècle. Après 1850, il y eut au moins six différents symbolismes pour exprimer la valeur absolue, ce qui n'a pas été sans provoquer certaines difficultés de communication. La formalisation des propriétés de la valeur absolue et sa compréhension comme fonction de R dans R^+ ont joué un rôle conséquent pour certaines des grandes généralisations du début du XX^e siècle, comme le concept de la distance dans la théorie des espaces métriques et le concept de l'estimation dans la théorie des corps.

2. ETUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

Le concept de valeur absolue apparaît dans les manuels scolaires de l'enseignement secondaire dès la fin du XIX^e siècle; mais pendant de longues décennies, son rôle se limite principalement à formuler des opérations sur les nombres positifs et négatifs. Ces derniers, dans les manuels d'alors, sont définis de façon traditionnelle, en tant que nombres communs de l'arithmétique munis d'un signe. La grande différence entre l'enseignement actuel de la valeur absolue et son enseignement au début du XX^e siècle, consiste en la complète absence, alors, d'exercices sur des équations et inéquations avec valeur absolue. Pour voir apparaître de tels exercices, il faut attendre les problèmes que posèrent les journaux mathématiques et les concours mathématiques (Olympiades) du début des années 1940. Issus vraisemblablement de la géométrie analytique, où les équations et les inéquations avec valeur absolue étaient utilisées pour exprimer de façon compacte différents ensembles de points du plan, ces problèmes ont ajouté, aux exercices traditionnels de résolution des équations et inéquations

tions, de nouvelles activités mathématiques comme la «distinction des cas» et le «contrôle de résolution». En Grèce, les exercices avec valeur absolue ont très vite été incorporés aux manuels scolaires par le biais des concours d'accès à l'université. Les concepteurs des examens visaient, avec ces exercices à la fois difficiles et originaux, à maintenir un haut niveau chez les candidats, notamment pour ceux qui préparaient l'Ecole Polytechnique. Ils créèrent ainsi une tradition qui a perduré jusqu'à la fin des années 1970.

Dans les livres d'algèbre, dès le début des années 1950 fut introduit un chapitre sur la théorie de la valeur absolue où était proposé un grand nombre d'exercices hétérogènes, convoquant différents domaines des mathématiques, élémentaires ou non. Il existait en outre force monographies portant exclusivement sur les valeurs absolues et indiquant des méthodes pour résoudre les exercices (on peut lister au moins onze ouvrages entre 1954-1978). Ainsi l'enseignement de la valeur absolue se faisait comme en vase clos: son objectif était la résolution de certains exercices spécifiques et non l'utilisation de la valeur absolue comme moyen qui aurait facilité l'approche d'autres sujets tels que la théorie des limites (elle n'a commencé à être enseignée dans les écoles grecques qu'en 1970). Ce fonctionnement a eu pour résultat la création d'un très vaste corpus d'exercices et d'une longue liste de règles méthodologiques pour les résoudre, ce qui correspond à une «théorie scolaire» parallèle à la «théorie scientifique» de la valeur absolue. L'exemple extrême de cette situation, c'est sans doute cet ouvrage d'algèbre publié en 1979, où toute cette «théorie» se trouve développée sur onze chapitres, chacun portant un titre particulier.

Ce que nous venons de mentionner, et qui pendant plusieurs années concernait principalement la préparation des candidats à l'université, a été incorporé dans le programme officiel, et donc le manuel d'algèbre contient un

large chapitre sur les valeurs absolues, ce qui a entraîné la publication de nombreux nouveaux ouvrages sur la question. Et, outre le concours d'accès à l'Ecole Polytechnique, un grand nombre d'examens et concours ont utilisé des exercices avec valeur absolue. Cette situation s'est poursuivie jusqu'en 1980, année où apparut un nouveau programme scolaire, ainsi que des modifications dans le système des examens; l'importance du concept de valeur absolue s'en est trouvé considérablement réduite en tant qu'objet de l'enseignement secondaire.

Cependant les enseignants actuels de Mathématiques, influencés probablement par la période où eux-mêmes étaient élèves ou candidats à l'université, continuent, aujourd'hui encore, à insister fortement sur les valeurs absolues et les exercices qui y ont trait. C'est ce que montre clairement d'une part les publications récentes et l'étude des sujets d'examen de l'enseignement secondaire, et d'autre part le recueil et l'analyse des conceptions des enseignants sur ce sujet. Insistons enfin sur le fait que cette évolution ne décrit que la situation en Grèce; il s'agit d'un cas singulier en comparaison à d'autres pays.

3. INTERPRETATION DES ERREURS

Les recherches publiées à propos des erreurs commises par les élèves sur des exercices portant sur la valeur absolue insistent sur les obstacles épistémologiques et en particulier sur les obstacles cognitifs au niveau de la compréhension de ce concept. Elles examinent non seulement la compréhension de la définition formelle de la valeur absolue, mais aussi son mode d'utilisation dans des situations telles que la résolution d'équations avec valeur absolue. Par exemple, Duroux (Duroux, 1983) propose d'interpréter ces erreurs sur la base de l'hypothèse qu'elles sont dues aux conceptions-

obstacles par rapport à un nombre relatif. Chiarugi et al. (Chiarugi, 1990) affirment que ces fautes proviennent d'obstacles provoqués par des représentations erronées et des malentendus quant aux concepts algébriques fondamentaux, comme la variable et la fonction.

Notre propre recherche a mis en évidence des erreurs comparables, et ce dans les trois niveaux de l'éducation scolaire grecque : dans l'enseignement secondaire, dans l'enseignement supérieur non mathématique et dans l'enseignement supérieur en mathématiques. Sur la base de l'étude historique et didactique présentée dans les paragraphes précédents, nous proposons d'interpréter les fautes des élèves en terme d'obstacles.

Le **premier obstacle**, qui est lié à l'existence même de la valeur absolue, concerne la conception du nombre comme moyen pour mesurer des quantités. Cette conception constitue un obstacle pour la notion du nombre relatif en général, et plus particulièrement pour l'ordre des nombres sur la droite réelle. L'étude historique nous a clairement montré que cette conception rend caduque une notion particulière de la valeur absolue puisque la fonction de cette dernière s'exerce de manière implicite mais effective par le nombre arithmétique qui produit un nombre positif ou négatif (Napier, Descartes, Newton). Comme dans l'histoire, cet obstacle se manifeste avec les erreurs qui concernent la manipulation de variables algébriques dans les inéquations; par exemple dans l'inéquation $x^2 > 9$ les élèves donnent comme réponses: $x > 3$ ou $x > \pm 3$.

Le dépassement de la conception quantitative du nombre est lié à l'apparition d'une notion primitive de la valeur absolue qui, historiquement, a été exprimée par «abstraction faite du signe». Mais en même temps cette attention portée au signe constitue un **deuxième obstacle**, lié d'une part à la reconnaissance de la valeur absolue comme notion indépendante et d'autre

part au besoin de sa représentation. Comme l'étude de la transposition didactique l'a mis en évidence, la définition et le symbolisme dans ce stade primitif servent à une nécessité interne de l'enseignement, en particulier l'architecture en spirale du programme, et non aux situations dans lesquelles l'utilisation de la valeur absolue est nécessaire. La conception selon laquelle la valeur absolue est «le nombre sans son signe» apparaît souvent plus tard dans les textes des étudiants et se manifeste par des erreurs du type $|x| = x$ ou avec la suppression du symbole de la valeur absolue.

Le dépassement de la conception de «abstraction faite de signes» correspond aux premières tentatives pour l'expression analytique de ce concept et l'intervention d'un symbolisme particulier. Ici apparaît un **troisième obstacle** qui concerne la notion de fonction et plus particulièrement l'identification de cette dernière à un type algébrique. Cet obstacle de «type algébrique», ou plus généralement «procedural rule», semble être à l'origine de certains malentendus concernant le concept de fonction, comme plusieurs recherches récentes l'ont montré. «Les étudiants initialement voient les fonctions comme des procédures, comme si elles disaient ce qu'on devait faire avec x » (Dreyfus et al., 1990, in Gagatsis A., Thomaïdis I., 1991). Dans le cas de la définition formelle de la valeur absolue comme fonction, cet obstacle se manifeste par des erreurs du type $|x| = \pm x$. Dépasser cet obstacle devient donc nécessaire pour acquérir la définition formelle de valeur absolue.

Le **quatrième obstacle** est lié à cette conception que la valeur absolue est un symbole «qui doit être supprimé». En effet, comme l'étude de transposition didactique l'a montré, il n'y a pas de liaison entre le traitement de ce concept et les conceptions qui, historiquement, ont justifié sa construction et son utilisation. A leur place apparaissent des exercices et des problèmes créés sur des critères didacti-

ques, comme les équations et inéquations avec valeur absolue. Une caractéristique fondamentale de ces exercices est que leur résolution est a priori liée à la suppression du symbole de valeur absolue. L'enseignement est ainsi conduit à une contradiction évidente: en essayant d'enseigner un concept mathématique à un niveau d'abstraction élevé, il introduit des situations-problèmes où ce concept non seulement va ne pas être utilisé, mais constitue un obstacle à supprimer pour parvenir à une solution. Cette contradiction devient l'un des traits permanents de l'enseignement quand les enseignants - et c'est la situation en Grèce - accordent une grande importance à la valeur absolue et au traitement algorithmique des exercices. Ce traitement algorithmique caractérise les étudiants en mathématiques qui, appliquant impeccablement la procédure de suppression du symbole de la valeur absolue par une équation, par-

viennent à des solutions arithmétiques calculées mais ne satisfaisant pas toujours aux conditions initiales posées par la suppression du symbole de la valeur absolue. Leur tendance à aborder de manière algorithmique ces exercices a pour conséquence que 29 % d'entre eux seulement déclarent rationnellement que l'équation $|x-2| - 7 = -3$ est impossible.

Le comportement donc des étudiants (et des élèves) grecs face aux exercices avec valeur absolue possède tous les traits d'une obéissance mécanique aux règles d'un contrat didactique (qui, ici, reflète cette injonction: «dehors le symbole de valeur absolue !»), notion introduite par Guy Brousseau (Brousseau, 1984). La seule issue, à terme, paraît être la rupture de ce contrat, c'est-à-dire la création de nouvelles situations didactiques où la valeur absolue va acquérir son sens réel et sa fonction propre.

Références

BROUSSEAU G. (1984), «Le Rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques», 3ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Orléans.

CHIARUGII., Fracassina, G., FURINGHETTIF. (1990), «Learning difficulties behind the notion of absolute value», in G. Booker, P. Cobb and T.N. De Mendicutti (eds), Proceedings of the P.M.E., 14, 3, Oaxtepec, Mexico.

DUROUX A. (1983), «La valeur absolue». Difficultés majeures pour une notion mineure». Petit x, n° 3, pp. 43-67.

GAGATSI A., THOMAIDIS I. (1991) Erreurs faites par de futurs enseignants en Mathématiques sur des exercices scolaires sur la valeur absolue, Educational Revue, 14/15, pp. 87-106 (en grec).

GAGATSI A., THOMAIDIS I., A study on the historical evolution and didactical transposition of the concept of absolute value (soumis à publication).



Lsd2

Bernard CAPPONI & Colette LABORDE, IMA-Grenoble

Cabri-géomètre, un outil de modélisation géométrique

L'objectif de l'atelier est de faire passer l'idée que la géométrie est aussi un outil de modélisation de phénomènes divers qui ne sont pas seulement spatiaux. L'ordinateur renforce l'efficacité de telles modélisations en permettant des simulations dynamiques dans le cas du logiciel concerné, à savoir Cabri-géomètre. Des activités de classe autour de ces aspects de la géométrie sont de plus susceptibles de montrer aux élèves l'intérêt de la construction d'un modèle et de l'exploration dans le modèle

On présente ici trois types différents de phénomènes qui peuvent être étudiés en classe dès le collège pour les deux premiers.

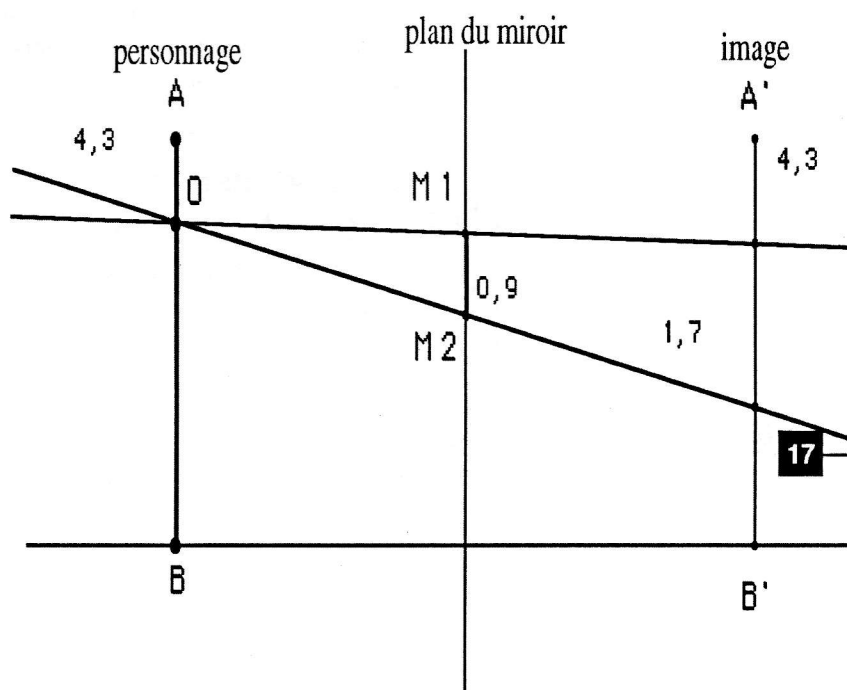
- Modélisation numérique
- Modélisation de phénomènes physiques
- Modélisation d'instructions conditionnelles.

Miroir

L'atelier débute par une présentation de la modélisation d'un miroir : un phénomène physique qui utilise des connaissances géométriques de la classe de quatrième. L'intérêt de la modélisation est ici l'étude qu'il permet des différents paramètres de la situation (par exemple la taille du sujet et de l'image, la position du miroir, sa taille, la position des yeux par rapport au miroir). C'est aussi une situation où la représentation que se font les élèves du phénomène physique entre en contradiction avec la réalité du phénomène. Pour la plupart des élèves (et d'autres) s'éloigner d'un miroir permet de se voir en entier si le miroir est petit.

La situation de classe décrite s'appuie

sur l'énoncé suivant : " quelle est la taille minimum d'un miroir pour que je puisse me voir en entier dedans ? ". La modélisation sert à simuler le phénomène pour en comprendre le fonctionnement. La figure permet de voir les éléments de cette simulation où l'on peut manipuler le personnage (taille, éloignement du miroir, position des yeux...) le miroir (plus haut, plus bas, plus grand...). On observe dans différentes positions relatives du personnage et du miroir ce que l'on peut voir dans le plan de l'image.

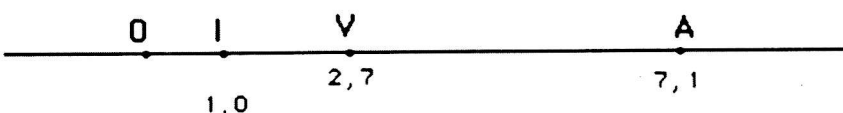


Modélisation dynamique d'un miroir.

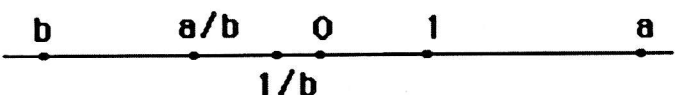
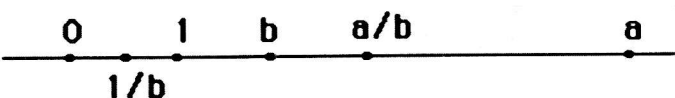
Modélisation numérique

Il s'agit ici de représenter des nombres sur un axe. Une variable a étant représentée, on modélise géométriquement son

carré, son inverse, sa racine carrée. Deux nombres étant donnés on modélise leur somme, leur produit ainsi qu'une différence ou un quotient. Cette modélisation permet de représenter sur un axe des caractéristiques numériques de figures (produit ou quotient de longueurs, des aires etc..).



exemple d'une racine carrée

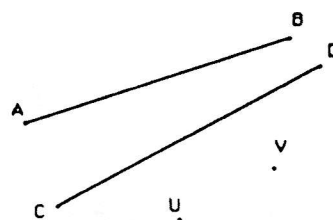
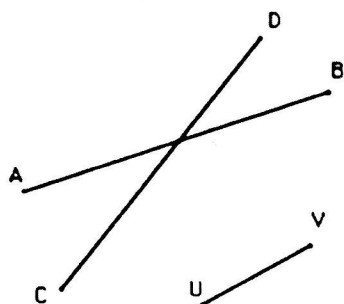


Exemple d'un quotient et d'un inverse dans deux positions.

Ce type de modèle est intéressant surtout par la dynamique qu'il procure dans l'étude des positions relatives de nombres comme les opposés, inverses, racines etc...

Modélisation d'instructions conditionnelles

On peut lier l'existence d'un objet (point, segment, droite, cercle) à une caractéristique d'une figure. Par exemple on peut lier l'existence d'un segment [UV] à la position relative des segments [AB] et [CD]: si ces derniers se coupent, alors [UV] existe, dans le cas où ils ne se coupent pas [UV] n'existe pas.



C'est un tel principe qui permet par exemple de gérer les arêtes cachées de la représentation plane d'un objet 3D.

Ce type d'instructions conditionnelles a été particulièrement étudié par plusieurs collègues de la Réunion et des exemples en sont fournis dans la revue AbraCAdaBRI.

Quelques références

Capponi. B. Laborde C. (1994) *Cabriclasse, enseigner la géométrie avec un logiciel*. (à paraître).

Martin Yves (1993) *Actes de l'Université d'été Cabri-géomètre*; Grenoble 93. IREM de Grenoble.

Martin Yves (1993). Introduction aux macros logiques *AbraCAdaBRI*. n°0. 12-13. Les Cabricotiers BP 19 F-97432 Ravine des cabris LA REUNION.

Annexe : Fiche de travail de l'Atelier

Cabri-géomètre, un outil de modélisation géométrique

Modélisation numérique.

Construisez un axe (O, I) . O sera l'origine et I le point d'abscisse 1. Cette unité pourra éventuellement être modifiée si le besoin s'en fait sentir.

Placer un point A d'abscisse a et un point B d'abscisse b , sur cet axe.

1 Construisez un point P dont abscisse est le produit ab . Une modélisation optimale prend en compte le signe de chacun des deux nombres.
Enregistrez cette construction comme macro-construction.

2 Construisez de la même façon une représentation du carré d'un nombre, de son inverse, de son opposé.
Enregistrez ces constructions comme macro-constructions.

3 Construisez un point S dont l'abscisse est la somme $a+b$
Enregistrez cette construction comme macro-construction.

4 Construisez un point Q dont abscisse est le quotient $f(a;b)$. Une modélisation optimale prend en compte le signe de chacun des nombres.
Enregistrez cette construction comme macro-construction.

5 Utilisez ces macro-constructions pour étudier les variations de l'aire d'un rectangle de périmètre constant.

Vous pouvez aussi faire une étude de situation de classe autour du théorème de Pythagore ou Thalès.

APMEP - 1994



BREST-LOCTUDY

Retenez ces dates!

Journées nationales

13 - 14 - 15 - 16 - octobre 1994

à Brest et Locudy

Cabri-Géomètre :

Les rapports entre visuel et géométrie dans un EIAO

Colette LABORDE- IMA Grenoble

Cet article a pour sujet le logiciel Cabri-Géomètre et son utilisation par des élèves de collège. Il pose la question de l'interaction entre les aspects visuels et les aspects théoriques dans l'activité des élèves en géométrie. Il étudie comment les caractéristiques de ce logiciel peuvent affecter cette interaction et analyse à partir de ce point de vue les processus de résolution des élèves quand ils sont confrontés à des situations problèmes sur ordinateur.

The paper deals with the geometry program Cabri-géomètre and its use by middle school pupils. It addresses the question of the interaction between visual aspects and theoretical aspects in the pupils' activity in geometry. It will discuss how the characteristics of the software may affect this interaction and analyse from this point of view the solving processes of the pupils when they are confronted to problem situations on the computer.

I - L'interaction entre visuel et géométrique, objet d'apprentissage

Le domaine de savoirs concerné est ici la géométrie plane et les apprenants sont des élèves de collège. L'environnement retenu pour l'étude est fourni par le logiciel Cabri-géomètre (Laborde 1986). L'apprentissage de la géométrie passe à ce niveau scolaire par l'apprentissage du contrôle de l'interaction entre aspects visuels et aspects théoriques. La géométrie enseignée au collège traite d'objets théoriques mais met aussi en jeu des représentations graphiques. En reprenant une distinction déjà faite ailleurs (Parzysz 1988), on appelle ici figure le référent théorique (objet d'une théorie, par exemple la géométrie euclidienne, la géométrie projective,...) en opposition au dessin qui est une représentation graphique de la figure. Une figure géométrique donne lieu à des descriptions dans différents langages et à des représentations graphiques sous forme de dessins. Un dessin renvoie à des objets d'une théorie dans une lecture faite à l'aide de cette théorie (plusieurs lectures sont possibles) et il fait aussi appel à la perception en donnant lieu à des

effets visuels. Dans la mesure où la géométrie enseignée ne peut se passer de dessins, il importe que les élèves apprennent à contrôler par des connaissances théoriques les aspects perceptifs liés au dessin. On a pu montrer en effet (Duval 1988) que les aspects perceptifs du dessin peuvent gêner ou au contraire favoriser sa lecture géométrique. Savoir sélectionner les éléments pertinents d'un dessin pour les interpréter géométriquement, savoir attacher des dessins à des propriétés géométriques ne sont pas des compétences spontanées chez les élèves; elles ne peuvent être que le résultat d'un apprentissage.

La difficulté du contrôle de l'interaction entre perceptif et géométrique chez les élèves repose en partie sur la nature de cette interaction dans l'environnement papier crayon. D'une part le dessin ne rend pas compte du domaine de variation des constituants de la figure géométrique, d'autre part certains aspects visuels du dessin ne sont pas pertinents pour une lecture géométrique (Laborde 1993). Des environnements logiciels ont été créés en vue d'offrir une autre interaction entre dessin et

figure. Cabri-géomètre est un des ces environnements rendant compte de la variabilité des constituants de la figure par le déplacement du dessin fourni par la manipulation directe, et disqualifiant certains éléments visuels non pertinents dans une interprétation géométrique en offrant un déplacement contrôlé par la théorie (dans le déplacement, le dessin se déforme en respectant les propriétés géométriques qui ont servi à son tracé). Un nouvel objet que nous appelons Cabri-dessin est fourni à l'interface dont le comportement (en particulier lors de son déplacement par manipulation directe) n'est plus un simple dessin comme celui du papier crayon. Il est le résultat d'une description de l'utilisateur à l'intention du dispositif informatique, faite à l'aide de primitives du logiciel. Deux catégories de primitives sont possibles: des primitives de dessin pur, des primitives de dessin fondées sur des relations géométriques (médiatrice, perpendiculaire,...).

L'article présent analyse les modifications que Cabri-géomètre peut entraîner sur cette interaction entre visuel et géométrie dans les traitements mis en œuvre par les élèves lorsqu'ils sont confrontés à certains types de tâches à réaliser avec Cabri-géomètre.

II - L'interaction entre visuel et géométrie dans l'environnement Cabri-géomètre

Les primitives de Cabri-géomètre rendent possibles deux catégories de traitement et de contrôle pour l'utilisateur à la fois dans l'analyse de dessins tracés à l'écran et dans les actions de tracé à l'écran

- traitements et contrôles perceptifs fondés sur la reconnaissance visuelle de phénomènes comme l'alignement, la perpendicularité, le parallélisme, ou de formes culturellement familières carré, rectangle, losange ;

- traitement et contrôles par des connaissances théoriques géométriques.

Ces deux types de traitement et

de contrôle s'effectuent en interdépendance. Nous faisons l'hypothèse que cette interdépendance est plus forte dans l'environnement Cabri-géomètre que dans l'environnement papier-crayon pour au moins deux raisons :

- parce que fourni par une machine le tracé est reconnu comme exact par les élèves;

- le déplacement donne à l'appréhension perceptive un rôle plus important puisqu'il est fondé sur des connaissances théoriques (il préserve les propriétés de la figure).

Citons quelques processus possibles chez des élèves dans l'usage du logiciel, indices d'une étroite interaction entre le visuel et le théorique :

- 1 - Une recherche par essai-erreur des primitives géométriques qui fournissent visuellement le tracé escompté.

- 2 - Des inférences de type géométrique à partir de l'appréhension perceptive :

Si trois droites gardent un point commun tout au long du déplacement du dessin, les présomptions pour qu'elles soient concourantes pour la figure associée sont très fortes.

- 3 - Un phénomène visuel permet de conclure à une interrogation de type géométrique dans plusieurs cas :

- (i) Le tracé d'un dessin représentant une figure ne résiste au déplacement que si le dessin a été obtenu à l'aide de caractéristiques géométriques. Parce que l'utilisateur a une connaissance visuelle du dessin de deux droites perpendiculaires, il rejette la description donnant lieu à un Cabri-dessin qui montre par le déplacement que deux droites tracées au jugé apparemment perpendiculaires ne restent pas perpendiculaires.

- (ii) De même le visuel peut disqualifier une construction faite à l'aide de connaissances théoriques mais erronées. Un losange construit comme un quadrilatère n'ayant

qu'une seule des deux diagonales médiatrice de l'autre sera refusé parce qu'il n'aura pas la forme apparente d'un losange.

(iii) Pour vérifier certaines propriétés géométriques, on peut tracer des objets à l'aide de primitives géométriques et vérifier visuellement s'il y a coïncidence lors du déplacement. Par exemple, on peut vérifier que trois points sont alignés en traçant la droite déterminée par deux d'entre eux et en s'assurant visuellement que le dernier point appartient toujours à cette droite lors du déplacement.

La plus grande interaction entre visuel et théorique n'est pas sans conséquence sur les pratiques des élèves et donc sur les apprentissages. On peut soupçonner que le passage entre une pratique fondée sur des connaissances géométriques et une pratique empirique fondée sur le perceptif («problématique géométrique» versus «problématique pratique» selon les termes de Berthelot & Salin 1992) est facilité dans les deux sens. On peut ainsi penser a priori que dans des tâches de construction de Cabri-dessins, le déplacement fournit un élément important de déstabilisation de pratiques empiriques fondées sur la perception et que Cabri-géomètre constitue alors probablement un milieu favorisant le recours à des connaissances théoriques alors que dans des phases d'exploration d'un Cabri-dessin donné (par exemple dans des tâches de démonstration), le glissement vers une pratique empirique se satisfaisant de l'observation est facilité.

Nous présentons ci-dessous à titre d'illustration deux situations expérimentées avec des élèves familiers de Cabri-géomètre (plusieurs mois d'utilisation de façon régulière en géométrie). Ces situations consistent à demander aux élèves la production d'un Cabri-dessin mais à partir de données différentes : dans la première situation la caractérisation discursive de la figure géométrique

que était donnée, dans la deuxième c'est un Cabri-dessin inconnu qu'il s'agissait d'analyser pour le reproduire avec Cabri-géomètre.

III - Deux exemples

Construction d'une parallèle à une droite en utilisant des symétries en classe de 4ème

L'objectif est de faire utiliser les symétries en tant qu'outils matériels de tracé, objectif impossible à satisfaire en environnement papier crayon avec les instruments usuels. Ce qu'on énonce classiquement comme un théorème (comme celui de «la droite des milieux dans un triangle» ou celui de la composition de deux symétries centrales) devient ici un outil opératoire de tracé. L'environnement permet une extension de l'ensemble des classes des situations attachées à ces théorèmes. Un compte rendu détaillé de cette expérimentation figure dans Capponi (1993). La consigne est la suivante :

Soit une droite D et un point P extérieur à la droite. Il s'agit i) de construire une parallèle à la droite D passant par P en ayant à sa disposition les primitives : point sur objet, intersection de deux objets, symétrique d'un point et bissectrice; ii) de justifier par écrit la construction en donnant les propriétés mathématiques qui assurent que la droite construite est parallèle à D . Le symétrique d'un point peut être obtenu aussi bien par symétrie orthogonale que centrale.

Plusieurs procédés de construction sont possibles. Nous citons trois d'entre eux :

- double utilisation de la symétrie centrale (fig.1).

- utilisation d'une symétrie orthogonale et d'une symétrie centrale (fig.2)

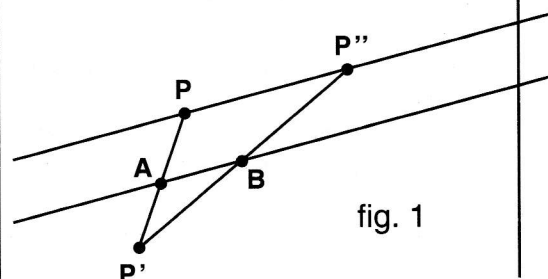


fig. 1

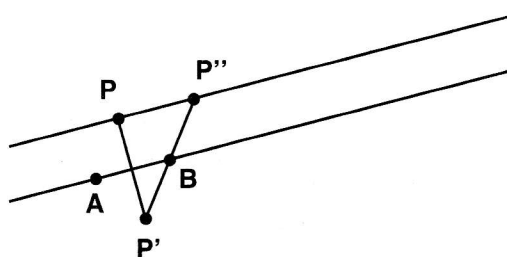


fig. 2

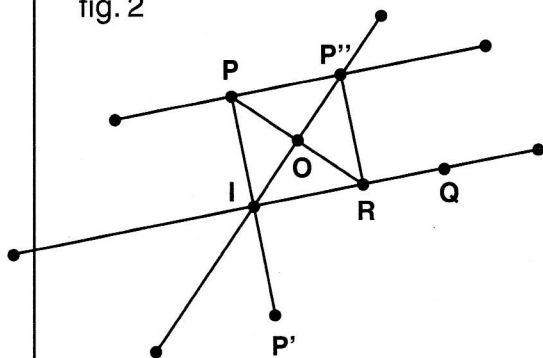


fig. 3

- construction d'un carré (fig.3)

P' est le symétrique orthogonal de P par rapport à D, PP' coupe D en I. Q est un point pris sur D. On trace la bissectrice de l'angle QIP puis le symétrique orthogonal R de P par rapport à cette bissectrice. RP coupe la bissectrice en O. P» est le symétrique de I par rapport à O. PIRP» est un carré. PP» est la droite cherchée.

Nous voudrions souligner, d'une part la grande réussite à la construction (21 binômes sur 22), résultat d'une évolution des stratégies, d'autre part le plus faible succès à la justification (la moitié des binômes). Les stratégies de construction ont évolué pour 9 binômes, de l'utilisation de primitives de dessin pur à des primitives géométriques, et cela grâce au déplacement invalidant visuellement les tracés au jugé. Le recours aux primitives géométriques de tracé a été favorisé mais il est difficile d'affirmer que ce recours s'accompagne toujours d'un passage à une pratique fondée sur des connaissances géométriques. En effet, la moitié des binômes seulement fournit une justification écrite, de plus parmi ces dernières, certaines ne

sont que des descriptions du procédé de tracé ou des justifications fondées sur une lecture perceptive. Il semblerait plutôt que la démarche de ces derniers binômes soit une conjonction de pratiques empiriques et géométriques : ils ne se livrent pas à une analyse géométrique du problème mais pour autant n'essaient pas des primitives géométriques au hasard ; ils utilisent soit les primitives disponibles qui n'exigent pas de construction intermédiaire, soit les primitives dont ils ont une idée approximative a priori du résultat visuel qu'elles fournissent, et procèdent ainsi en cherchant à s'approcher du résultat final « la parallèle à D » en effectuant des analyses géométriques locales. Si le déplacement dans tous les cas a invalidé le tracé obtenu, il n'a été analysé qu'une fois pour corriger le procédé de tracé.

Boîte noire

On donnait à des élèves de 3ème un Cabri-dessin formé d'un parallélogramme ABCD et d'un dessin central inconnu lié par des relations géométriques inconnues à ABCD (fig.4). Leur tâche consistait à construire le dessin correspondant à un autre parallélogramme donné PQRS. On trouvera un compte rendu détaillé des stratégies des élèves dans Boury (1993).

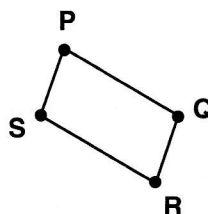
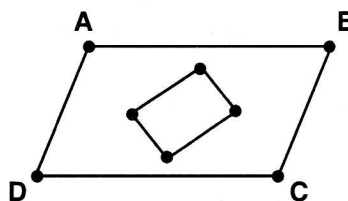


fig. 4

La solution passe par l'analyse géométrique du Cabri-dessin à l'aide du déplacement et des diverses fonctionnalités de Cabri-géomètre puis par la reconstruction à l'aide de cette analyse. Les élèves observés n'ont pas en général adopté cette stratégie et ont plutôt essayé en majorité de reproduire immédiatement le dessin central procédant par essai et correction, chaque fois que déplaçant la reproduction, ils constataient soit que le dessin central ne suivait pas entièrement le parallélogramme PQRS (ils avaient tracé des éléments visuellement au jugé), soit qu'il ne se comportait pas de la même façon que le modèle. Ils ont donc procédé à une lecture essentiellement perceptive du dessin fourni sans chercher à valider cette lecture par les autres fonctionnalités disponibles. Ainsi le dessin central a presque toujours été reconnu comme un rectangle mais aucun binôme n'a cherché à s'assurer du parallélisme des côtés opposés, ni de la perpendicularité des côtés consécutifs.

Quelques binômes ont eu une stratégie complètement empirique en traçant droites et cercles en espérant obtenir à la longue les sommets du rectangle comme intersections. Mais la plupart (9 sur 12) ont là encore eu une démarche partiellement géométrique, partiellement perceptive. Cherchant à reproduire le rectangle, ils ont placé au jugé un point libre à l'intérieur du parallélogramme PQRS puis construit le rectangle de façon à ce qu'il ait pour centre le centre de PQRS ; le déplacement d'un sommet de PQRS a immédiatement invalidé leur tracé puisque le rectangle obtenu ne bougeait pas. Le sommet n'était pas «attaché» au parallélogramme, il fallait le lier, ce qu'ils ont fait en traçant le premier sommet du rectangle comme point sur objet (sur une droite des milieux de PQRS) mais là encore le déplacement a invalidé leur tracé, le rectangle produit ne se comportant pas comme le modèle. Ils ont alors cherché à déterminer le sommet du rectangle de façon géométrique soit par une ana-

lyse, soit par tâtonnement à l'aide de constructions empiriques.

IV - Connaissances de l'environnement et connaissances géométriques en interaction

Pour ces élèves la conjonction du déplacement et des primitives de tracé favorise l'abandon du recours à des stratégies au jugé purement visuelles dans les activités de construction mais ne débouche pas nécessairement vers une pratique totalement géométrique. Le vocabulaire relevé dans les échanges verbaux entre les élèves donnerait à penser que la géométrie du logiciel serait davantage pour eux une géométrie du Meccano : les relations géométriques sont des liaisons mécaniques entre éléments du dessin les solidarisant dans le déplacement, la recherche de ces liaisons pouvant se faire de façon empirique. Les stratégies observées certes montrent une coexistence du visuel et du géométrique mais cette dernière pourrait s'exercer davantage à d'autres niveaux plus avancés : le géométrique n'est mis en œuvre que localement sous pression du visuel, les propriétés lues visuellement sont peu mises à l'épreuve à l'aide de connaissances géométriques.

Le déplacement est particulièrement efficace, pour tous les élèves observés, à un premier niveau d'invalidation de dessins faits perceptivement au jugé («tout ne bouge pas ensemble», «des éléments ne sont pas accrochés»). Il est aussi utilisé en liaison avec une connaissance visuelle de formes familières : un rectangle doit rester rectangle lors du déplacement. Il est utilisé pour invalider des propriétés conjecturées sur un Cabri-dessin qui ne résistent pas au déplacement (comme par exemple, le rectangle de la boîte noire reste à l'intérieur du parallélogramme). En revanche il est moins utilisé à des niveaux plus géométriques comme par exemple dans l'étude géométrique des trajectoires de certains éléments, ou la recherche de propriétés géométriques in-

variantes par déplacement. L'usage de primitives géométriques pour valider ou invalider une propriété géométrique lue perceptivement ne paraît pas développé. On peut en conclure que la maîtrise complète d'un environnement aussi complexe prend du temps et qu'elle s'appuie elle-même sur la mobilisation de connaissances géométriques. Il y a donc un certain coût à son appropriation. La thèse souvent défendue de la nécessité d'une multiplicité d'environnements divers pour la richesse des apprentissages effectués par les élèves se trouve remise en question.

Signalons aussi que le référent théorique auquel renvoie le Cabri-dessin n'est donc pas totalement identique au référent de la géométrie, car ont été introduites dans sa description des caractéristiques nouvelles dues à la séquentialité et au caractère algorithmique de cette description. L'exemple de la construction d'un triangle ABC rectangle en A illustre cette affirmation. Le triangle peut être construit avec A et B (resp. A et C) comme points de base et C (resp. B) point sur la perpendiculaire à (AB) (resp. (AC)) en A. Il peut être construit avec B et C comme points de base et A sur le cercle de diamètre BC. Cabri-géomètre introduit la distinction de trois catégories de

points : points libres, points sur objet (à un degré de liberté), points construits (à degré de liberté nul). Dans l'exemple précédent, la première construction attribuait un degré de liberté à C et deux à A et B, la deuxième un degré de liberté à A et deux à B et C. L'introduction de cette nouvelle caractéristique introduit de nouveaux problèmes quant au comportement du Cabri-dessin dans le déplacement. Comment varie un point à un degré de liberté (point sur un objet) quand un point libre est déplacé ? Par exemple comment varie A lorsque B est déplacé dans la deuxième construction. Cette décision relève du concepteur du logiciel, elle n'est pas complètement arbitraire dans la mesure où l'utilisateur n'attend pas n'importe quoi. En l'occurrence le choix fait a été de garder constant l'angle que fait OA (O est milieu de BC) avec une direction fixe du plan.

Un seul déplacement continu (celui de A ou B) dans la première construction permet de confondre A et B mais C reste distinct de ces deux points tandis qu'un seul déplacement continu (celui de B ou C) permet de confondre les trois points A, B et C dans la deuxième construction.

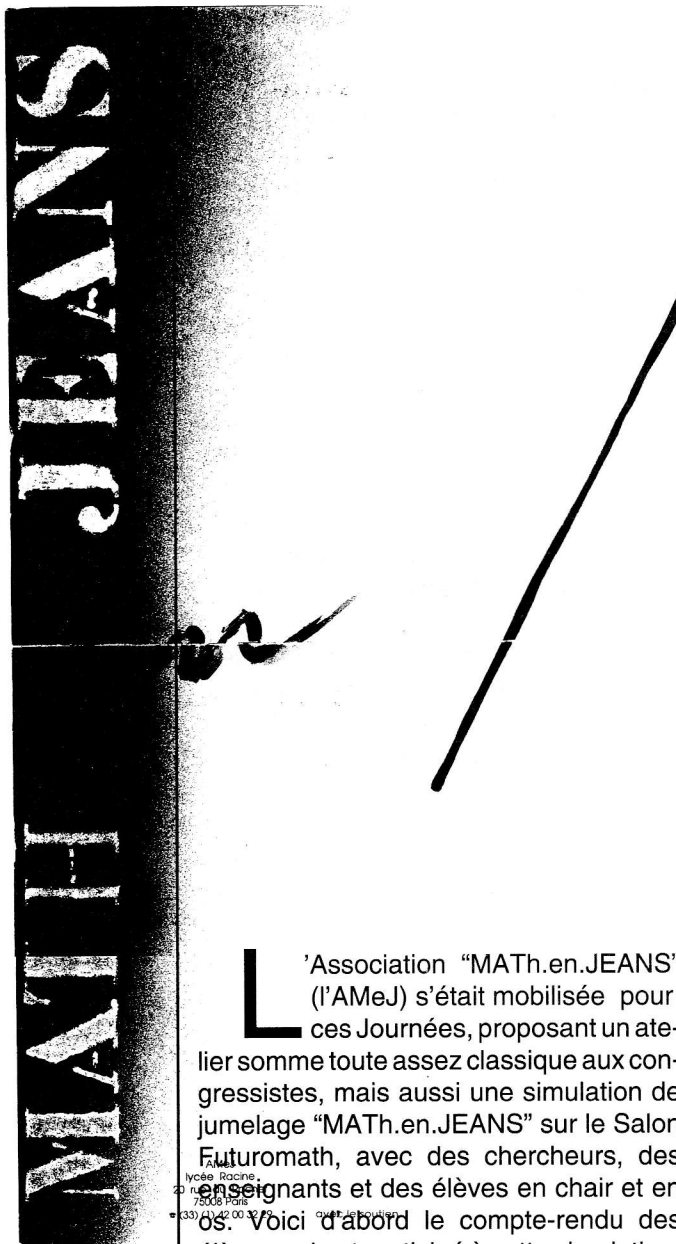
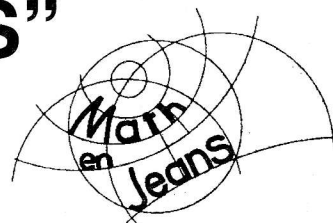
□

Références

- BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'Université Bordeaux 1
- BOURY, V. (1993) *La distinction entre figure et dessin en géométrie : étude d'une «boîte noire» sous Cabri-géomètre*, Rapport de stage du DEA de sciences cognitives, Equipe DidaTech, LSD2 IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble
- CAPPONI B. (1993) Modifications des menus dans Cabri-géomètre. Des symétries comme outils de construction, *Petit x*, n°33, pp.37-68
- DUVAL R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Université Louis Pasteur et IREM, Strasbourg, Vol 1, pp. 57-74
- LABORDE C. (1993) The computer as part of the learning environment : the case of geometry, in *Learning from Computers* Keitel C. & Ruthven K. (eds), NATO ASI Series, Springer Verlag, Heidelberg (à paraître)
- LABORDE J.M. (1986) *Projet d'un Cahier de Brouillon Informatique de géométrie*, Rapport interne LSD (IMAG), Université Joseph Fourier, Grenoble
- PARZYSZ B. (1988) Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.19, n°1, pp. 79-92

Ateliers "MATH.en.JEANS"

Pierr AUDIN, Argenteuil



qu'il ne raconte pas de façon chronologique le déroulement du travail (bien que des références à diverses opinions de différents moments soient présentes dans le texte) ; exemplaire enfin car l'importance de certaines démonstrations n'est pas perçue par les élèves [équivalence des "définitions" de rigidité par exemple : voir ci-contre 1.1.3.—] et les termes utilisés ont une définition "MATH.en.JEANS" qui ne correspond pas forcément à la définition mathématique dont les élèves n'ont pas connaissance [treillis, diagonalisable], et toute l'expérimentation [avec des barres de type MECANO] est passée sous silence. Un écrit "MATH.en.JEANS" n'est ni de forme scolaire, ni de forme recherche, les élèves étant soumis à la force de l'habitude (scolaire) et de la nouveauté en cours d'assimilation (recherche).

**Et maintenant,
place au texte des élèves !**

L'Association "MATH.en.JEANS" (l'AMeJ) s'était mobilisée pour ces Journées, proposant un atelier somme toute assez classique aux congressistes, mais aussi une simulation de jumelage "MATH.en.JEANS" sur le Salon Futuromath, avec des chercheurs, des enseignants et des élèves en chair et en os. Voici d'abord le compte-rendu des élèves qui ont participé à cette simulation, rédigé par les élèves eux-mêmes.

Ce texte est exemplaire et atypique :
— **atypique** par une structure boubakiste peu commune dans les écrits "MATH.en.JEANS" des élèves [se reporter aux actes déjà parus des congrès de 1991 et 1992].

— **exemplaire** puisque c'est un exemple d'écrit d'élèves ; mais exemplaire aussi parce qu'il raconte l'état mathématique du travail lors de son arrêt et met l'accent sur tout ce que les élèves perçoivent de ce qu'il reste à faire ; exemplaire encore parce

"Rigidité - flexibilité".

A l'occasion du congrès de l'APMEP qui s'est tenu du 22 au 24 octobre 1993, l'AMeJ a voulu montrer comment fonctionne traditionnellement un jumelage. C'est pourquoi elle a réuni à Poitiers deux de ses chercheurs (Ch. Payan et P. Duchet), deux de ses professeurs (A. Soismier et R. Veillet) et sept élèves (trois de Poitiers, n'ayant jamais participé à "MATH.en.JEANS", et quatre de Paris, qui y avaient déjà participé) de 1ère et Terminale, économique ou scientifique.

Deux groupes ont été formés et ont cherché sur le même sujet (présenté par Ch. Payan) : "Rigidité et flexibilité". Ils se sont réunis lors de 3 séminaires pour s'échanger les résultats et conjectures. Tout s'est donc passé comme dans un vrai jumelage "MATH.en.JEANS", mais en accéléré.

Voici les résultats que les élèves ont exposés devant un public très attentif. Ils ne sont le miroir que d'une journée et demie de travail.

1.— Définitions et exemples simples.

1.1.— Définitions de la rigidité.

1.1.1.— Un treillis est une figure géométrique plane constituée uniquement de segments pouvant avoir deux longueurs (proportionnelles à 1 et à 2). Les segments de longueur 2 permettent de former des triangles rectangles isocèles, ou des carrés avec leur diagonale.

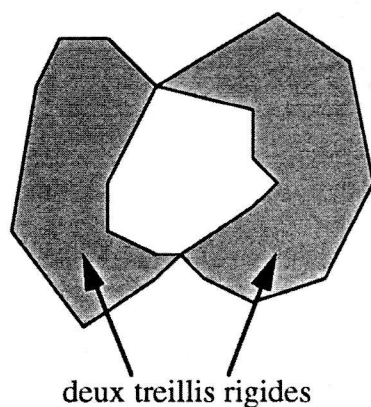
1.1.2.— Un treillis sera dit rigide si, quand on fixe l'emplacement de deux de ses points, le reste du treillis ne peut pas se déformer ni bouger.

1.1.3.— Une autre définition de la rigidité est qu'un treillis rigide est tel que ses angles soient fixes.

Dans le plan, ces deux définitions sont équivalentes.

1.1.4.— Quand on rattache deux treillis rigides entre eux, et qu'ils ont au moins deux points en commun, le treillis est rigide (cf. figure 1).

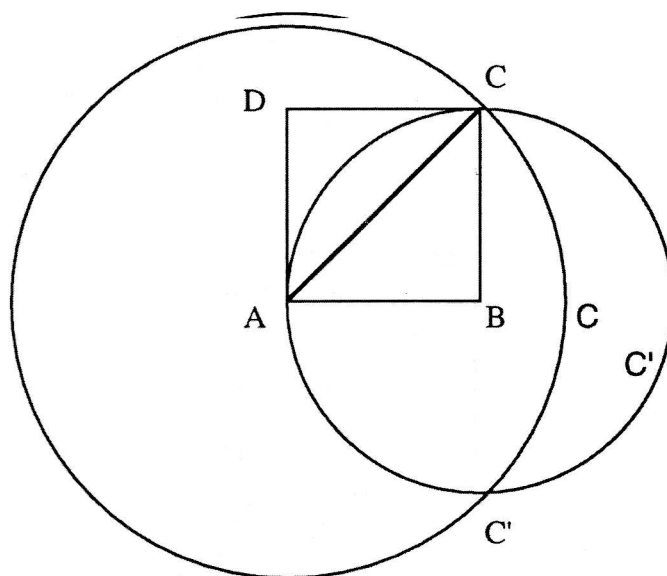
figure 1



1.2.— Structures de base rigide.

1.2.1.— Le carré muni de sa diagonale, ou carré diagonalisé, est rigide (cf. figure 2).

figure 2

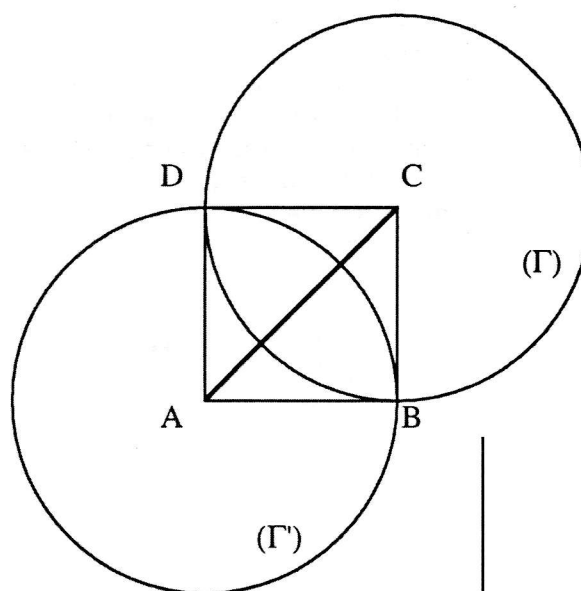


En effet, considérons comme fixes les points A et B. Le point C est alors tel que $AC = 2$ et $BC = 1$; il est à l'intersection des cercles C et C'. Ces cercles se coupent en deux points, C et C'. Comme un glissement continu n'est pas possible de l'un à l'autre, le point C est fixé.

De même, D est tel que $CD = 1$ et $AD = 1$.

D est donc à l'intersection de (G) et de (G') (cf. figure 3).

figure 3

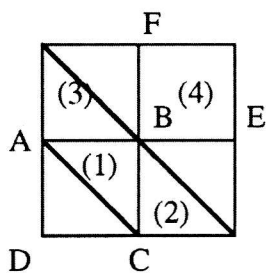


D est donc, de même que C, fixé. Le carré diagonalisé est donc rigide. On re-

marque que cela reste vrai quelque soit le sens de la diagonale (AC ou BD).

1.2.2.— Le carré dont deux côtés sont fixés est rigide. En effet, si A, B, C sont fixés (que la diagonale AC soit présente ou non), D l'est aussi (cf. ci-dessus et figure 3).

1.2.3.— La structure appelée carré de base, représentée figure 4, est rigide.
figure 4 (changement d'échelle)



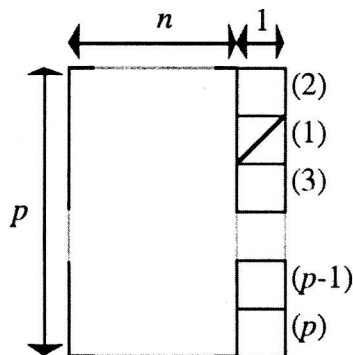
En effet, les carrés diagonalisés (1), (2) et (3) sont rigides ; comme ils ont à chaque fois un segment en commun ([AB] entre (1) et (3), [BC] entre (1) et (2)), l'ensemble (1)-(2)-(3) est rigide. Le carré (4) a deux côtés BE et BF fixés : il est rigide. Le carré de base

(1)-(2)-(3)-(4) est donc rigide.

2.— Procédé pour construire un treillis rigide rectangulaire.

2.1.— Raisonnons par récurrence. Supposons que nous ayons obtenu un treillis rigide, rectangulaire, de n par p cases (n ≥ 1, p ≥ 1). Pour p = n = 1, on part du carré diagonalisé. Pour augmenter n de un, il suffit d'ajouter un rectangle de 1 sur p au rectangle n sur p (cf. figure 5), tel que parmi les p carrés qu'il comporte, l'un au moins soit diagonalisé.

figure 5



En effet, le carré diagonalisé ajouté formera un ensemble rigide avec le rectangle n × p. Notons (1) ce carré diagonalisé.

Les carrés adjacents, (2) et (3), auront deux côtés fixes (l'un commun avec (1), l'autre avec le rectangle). (2) et (3) seront donc rigides, et ainsi de suite : (4), (5) ... , (p-1) et (p) sont rigides ; le rectangle (n + 1) × p est rigide.

2.2.— Nous avons donc déterminé un moyen de construction. Il utilise une diagonale par ligne ou colonne ajoutée. En partant du carré diagonalisé (1 × 1), on ajoute (n-1) diagonales pour obtenir le rectangle 1 × n, et (p-1) autres pour obtenir le rectangle (n × p). Un nombre suffisant de diagonales pour obtenir un rectangle rigide n × p, est donc :

$$1 + (n-1) + (p-1) = n + p - 1.$$

3.— Méthodes pour tester si un treillis est rigide.

3.1.— Méthode "du carré de base".

3.1.1.— Principe : soit un treillis comportant un carré de base (cf. figures 4 et 6). Le carré de base (1)-(2)-(3)-(4) de la figure 6 est rigide ; le carré diagonalisé (5) aussi, donc leur réunion aussi.

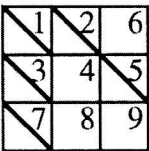


figure 6

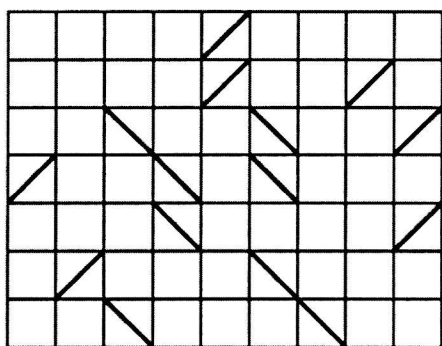
Le carré (6) a deux côtés fixés (un en commun avec (2), l'autre avec (5)) : il est rigide.

D'autre part, le carré (7) est rigide (il est diagonalisé et a un côté commun avec le treillis rigide (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6)) ; le (8) aussi (il a un côté commun avec (7) et un avec (4), (7) et (4) étant rigides). De même, (9), qui a deux côtés fixes (ceux qu'il partage avec (5) et avec (8)), est rigide : le carré 3 × 3 entier est rigide.

3.1.2.— Limites de cette méthode.

3.1.2.1.— Cette méthode n'est pas universelle : contrairement à ce que nous avons d'abord conjecturé, il existe des treillis rigides dépourvus de carré de base (c'est le cas de la figure 7).

figure 7



3.1.2.2.— Dans certains cas, le treillis comporte un carré de base, mais la méthode ci-dessus ne permet pas de conclure, bien que ces treillis soient rigides.

3.1.2.3.— Cette méthode est quand même intéressante car elle permet, dans certains cas, de démontrer qu'une structure est rigide (c'est le cas de la figure 6).

3.2.— "Conjecture du L".

3.2.1.— Énoncé : si on peut former un L en translatant une seule fois, horizontalement ou verticalement, les diagonales d'un treillis, alors celui-ci est rigide.

3.2.2.— Exemple : en partant du treillis de la figure 7, déplaçons les diagonales comme indiqué figure 8. On obtient le L dessiné figure 9. Selon notre conjecture, le treillis de la figure 7 est donc rigide.

figure 8

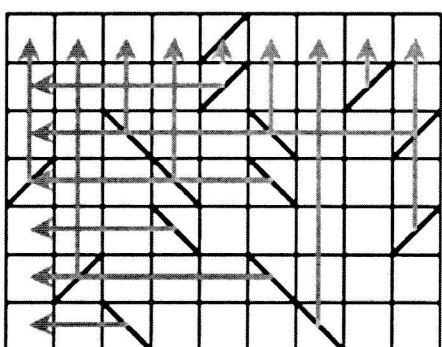
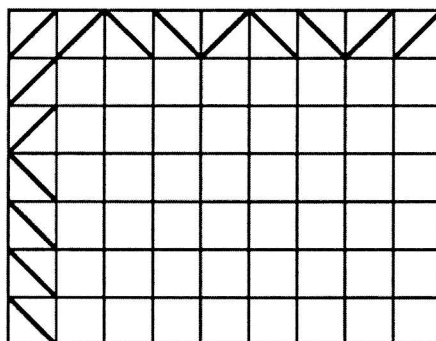


figure 9



Si nous n'avions pas réussi à former un L, nous aurions conclu que le treillis n'est pas rigide. [C'est une autre conjecture.]

3.2.3.— Contre-exemple : le treillis de la figure 10 infirme notre conjecture. En effet, il est flexible (il peut se déformer pour donner la figure 11) mais peut se ramener à un L (figures 12 et 13).

figure 10

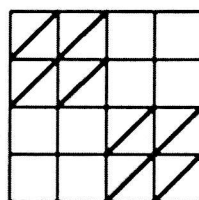


figure 11

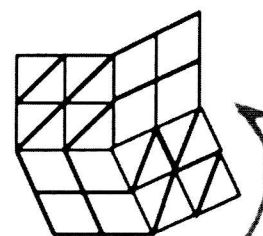


figure 12

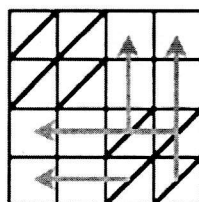
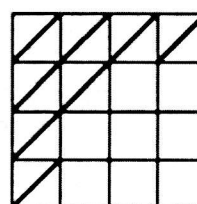


figure 13



Après une journée et demie de travail, nous avons abouti à une définition assez précise de la rigidité, à des démonstrations (comme le nombre suffisant de diagonales pour rigidifier un rectangle), à des conjectures (vérifiées ou infirmées), à des méthodes pour tester la rigidité d'un treillis. Mais nous n'avons pas, et de très loin, épuisé la question. Nous nous sommes demandé en particulier, sous quelles conditions on peut déplacer une diagonale sans changer la rigidité du trillis. De plus, le problème se complique encore plus si on travaille dans l'espace.

(texte des élèves synthétisé par Stéphane Fischler.)

Une belle brochette!

Sept élèves, quatre enseignants et deux chercheurs étaient à Poitiers pour présenter "MATH.en.JEANS". L'atelier (classique ; classique ?) était animé par Pierre Audin, enseignant, Pierre Duchet, chercheur, Stéphane Fischler, élève, Alain Huet, enseignant ; Pierre Duchet, chercheur, Charles Payan, chercheur, Annie Soismier, enseignante, René Veillet, enseignant, s'occupaient des recherches des élèves du salon Futuromath ; Marie-Claude Cellier s'occupait des visiteurs quand tout le monde était occupé ailleurs ; quand c'était possible, Pierre Audin et Alain Huet l'aidaient.

Reste à remercier ...

... Dominique Gaud d'avoir fait participer trois de ses élèves aux recherches qui devaient se tenir sur Futuromath ;

... et tous les organisateurs de l'APMEP de Poitiers d'avoir subi nos desiderata, notre improvisation avec tant de gentillesse.

Pourquoi tout ça ?

De faire "MATH.en.JEANS" nous a fait remettre en cause la plupart de nos pratiques pédagogiques. De pédagogie à démagogie, on pourrait croire qu'il n'y a qu'un pas, ce n'est pas le cas, même si de premier abord, dire ou écrire que nous apprenons beaucoup de nos élèves peut sembler de la plus pure démagogie, directement sortie de la cuisse de mai-juin 68. D'ailleurs "MATH.en.JEANS" a de fortes résonances baba-cool ... On parle de nous, on prend même parfois position (pour ou contre) sans savoir précisément de quoi il s'agit. C'est juste pour ça que nous sommes venus, donner la possibilité à tous ceux qui le souhaitaient de savoir ce qu'est réellement "MATH.en.JEANS" : Méthode d'Apprentissage des THéories mathématiques en Jumelant des Etablissements pour une Approche Nouvelle du Savoir !

Quelle méthode ?

Si nous avons choisi "MATH.en.JEANS" comme sigle, c'est bien sûr parce que nous souhaitons dédramatiser l'enseigne-

ment des mathématiques. Mais notre uniforme n'est pas le jean, ce sont les maths.

Alors quelle méthode ? Nous transformons les élèves en chercheurs, de façon à mener une activité mathématique la plus complète possible, et qui ressemble le plus possible à ce que sont les mathématiques pour les mathématiciens actuels.

Oui, mais pour quels élèves ? Tous ceux qui veulent. Il ne suffit pas de mettre un violon dans les mains d'un enfant pour en faire un Yehudi Menuhin. Mais une certaine culture musicale en passe certainement par l'apprentissage d'un instrument. Nous ne voulons pas faire de nos élèves des médaillés Fields. Nous leur mettons les maths dans les mains. Et pour trouver du plaisir à apprendre la musique, il suffit peut-être de choisir les morceaux adaptés, et de ne faire de solfège qu'au fur et à mesure que les besoins s'en font sentir. Ce qui compte avant tout, c'est la formation de l'oreille.

Alors quelle méthode pour les maths ? et pour quels élèves ? Lisez la suite. Et dites-vous bien que les premiers partisans des classes de neige ne cherchaient pas à révéler des champions de ski, qui se révèlent de toutes façons. Nous pouvons fixer un objectif raisonnable, même s'il est ambitieux : que tous les élèves aient une formation à / par le recherche à un moment ou à un autre de leur scolarité obligatoire.

Afin de former des citoyens plutôt que des médaillés Fields. Afin que quand on leur soumette un problème (même plus tard, dans leur vie de citoyen) ils n'aient pas la réaction des collègues qui participaient à l'atelier, à qui nous avons soumis le même problème que celui sur lequel les élèves planchaient à Futuromath :

"les consignes ne sont pas claires !"

Quand vous allez voter, les consignes de vote ne concernent pas le fond du problème, seulement sa forme. Et si cela concerne le vote lui-même, alors ce n'est plus un vote mais un simulacre. Il ne peut pas y avoir de consignes, ni pour un mathématicien ni pour un citoyen.

Quels apprentissages ?

Des concepts, des méthodes, des savoirs, un savoir ... avec des sous-produits utiles ou nécessaires : tout ce con-

cerne la communication moderne, mais avec du sens.

Quelles mathématiques ?

Des mathématiques actuelles. Dans le problème soumis à l'atelier (aux élèves comme aux collègues), où se trouve l'équation à résoudre ? quand utilise-t-on le théorème de Thalès, celui de Pythagore ? où apparaissent les vecteurs, les cercles circonscrits, l'intégration par parties, la loi binomiale ? y a-t-il des outils scolaires à utiliser ? oui, bien sûr, mais lesquels ? et suffisent-ils ?

Question 1 : qu'y a-t-il qui vienne du XX^e siècle dans les programmes scolaires de la maternelle à la Terminale ?

Question 2 : que se passera-t-il en l'an 2001 ?

Question 3 : est-ce qu'un mathématicien peut se contenter d'un papier et d'un crayon à l'heure actuelle ?

Question 4 : est-ce qu'un mathématicien peut actuellement se permettre de travailler dans sa tour d'ivoire, à la lumière d'une chandelle, muni d'un parchemin et d'une plume d'oie ?

Réponses :

question 1 : vous savez, vous ? Il y a eu la théorie des ensembles, à la charnière des deux siècles, mais il n'y a plus ...
question 2 : on commence le 3^e millénaire le 1^{er} janvier ... avec ou sans rien du XX^e siècle ?
questions 3 et 4 : c'est la même réponse, on peut en trouver, mais comme les "bons indiens" du Général Sheridan, la plupart d'entre eux sont morts à l'heure actuelle.

Quels jumelages ?

Jumelage à trois :

— entre deux établissements et un chercheur (peu importe d'ailleurs qu'il soit estampillé mathématicien ou informaticien, chercheur ou enseignant-chercheur, combinatoricien ou géomètre, etc, etc).

— entre élèves, enseignants et chercheurs.

— entre travail personnel, travail en groupe ou en séminaire.

— entre documentation, conjecture et démonstration.

— entre hypothèse, affirmation et théorème.

— entre opinion, argument et preuve.

— etc, etc, etc.

Quels établissements ?

Deux établissements scolaires de même niveau. Jusqu'à présent, seuls des collèges et des lycées — du public — ont participé ; rien n'empêche a priori que les choses se fassent en lycée professionnel, en classes préparatoires, en université ; rien n'empêche que des établissements scolaires du secteur privé se lancent dans l'opération à leur tour. (**La seule condition** est d'avoir la même approche que nous : **aucune participation financière n'est demandée aux élèves**) ; la raison en a été depuis les débuts de "MATH.en.JEANS" que **l'enseignement est ... gratuit. (?)**

Quel savoir ?

Voilà la vraie bonne question. Qu'est-ce que nous voulons enseigner à nos (?) élèves ? Et qu'est-ce qu'enseigner ?

Les temps changent. Il y eut les années '60. Il y eut l'euphorie des maths modernes. Il y eut l'examen d'entrée en sixième, le déclin du certificat d'étude, le prestige du baccalauréat. Il y eut la crise du pétrole ... il y a la crise depuis ... depuis quand déjà ? Il y a déjà presque 80% d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat (soyons clairs : en classe de Terminale). Il y a trois millions de chômeurs (ne seraient-ils pas six millions avec la définition années '60 de chômeur ?).

On peut choisir de prendre le point de vue deuxième millénaire et fin de civilisation et se lamenter sur le bon vieux temps. On peut préférer se tourner vers le troisième millénaire en demandant de quoi aura besoin la nouvelle civilisation ?

On a commencé par avoir peur des ordinateurs (comme on avait eu peur du chemin de fer, de la TSF ou de la télé). Puis on a essayé de faire contre mauvaise fortune bon cœur. Il y a même des établissements où les profs de maths ont réussi à acheter une calculatrice ! Puis on a trouvé l'informatique magique et les profs de maths ont pu s'acheter des MO5 à pédales, pour les aider à faire des calculs (mais approchés) plus vite. On va bientôt se rendre compte que l'ordinateur et le mathématicien sont complémentaires,

grâce aux ordinateurs double disquette (le must !) que les profs de maths vont sauver des poubelles du secrétariat de l'établissement (qui travaille en réseau avec le Rectorat, et ne peut pas, lui, se contenter de matériel déjà vétuste.

Mais si l'ordinateur change évidemment la façon dont le mathématicien fait des mathématiques, c'est toujours le mathématicien qui fait des mathématiques. Et les coups publicitaires des Japonais sur la 153ème génération d'ordinateurs n'ont pas l'air d'y changer grand chose.

L'ordinateur ne fait pas de mathématiques tout seul. De même qu'un logiciel d'EAO ne peut pas remplacer un prof de maths. [Ne vous inquiétez pas, si c'était possible, vous le sauriez, vous seriez comme les autres en train de chercher du travail ... car les hommes qui nous gouvernent savent bien que la paye des enseignants comblerait facilement le trou de la sécu.]

Et Alors ?

La question "Démontrez que ..." est la question type pour un ordinateur. Le problème avec l'ordinateur, c'est que la seule question qu'il se pose vraiment c'est "quelle question pourrais-je bien me poser", et il répond en clignotant, le petit doigt sur la couture du pantalon. L'ordinateur n'est qu'un bœuf qui nous creuse très bien les sillons, mais il a encore besoin de nous pour les creuser. Quant au tracteur ... c'est pas demain la veille !

On ne peut pas tout changer d'un coup. On essaya avec les maths modernes, avec de l'argent, avec la naissance d'IREM qui avaient des moyens, avec des heures de décharges pour les profs de maths. Il ne s'agissait que de changer les contenus des programmes. Et ça a fait tchouffa.

Maintenant, il faut nous préparer à changer de métier, tout en restant des profs. Sans moyens supplémentaires. En asphyxiant chaque année un peu plus les IREM. En demandant sans cesse plus de travail et d'heures supp aux profs de maths.

Alors ? Alors ?

A l'impossible, nul n'est tenu. Mais on

fait ce qu'on peut, comme on peut.

Nous, on apprend aux élèves à se servir de documents, à expérimenter — oui, oui, en mathématiques aussi — avec des ordinateurs, des barres de mécano, des balles de golf, des bouées, etc, etc. On leur apprend à travailler en équipe, à mettre en commun leurs réussites, leurs échecs, leurs questions, leurs envies, leurs délires. On leur apprend à communiquer entre eux, ou avec d'autres élèves, ou avec des adultes, enseignants ou chercheurs.

Ils découvrent que les mathématiques sont une forêt qu'un arbre leur cachait. Que la démonstration n'est qu'une étape, et qu'elle n'est pas un but mais un moyen. Qu'il n'y a pas de réponses, mais de nouvelles questions.

Alors ?

Si vous avez lu jusqu'ici, c'est sans doute que vous êtes plutôt d'accord avec moi. Si ce n'est pas le cas, ce n'est pas bien grave, cela prouve la diversité des mathématiques et surtout des profs de maths. Mais si c'est le cas, reconnaissez qu'il est bien difficile d'expliquer en long en large et en travers ce qu'on fait en même temps qu'on le fait. Alors : venez nous voir, lors de notre école d'été, lors d'un de nos congrès, lors d'un des stages que nous proposons dans les MAFPEN, lors d'un séminaire ou même d'une séance hebdomadaire. Contactez-nous, voire même rejoignez-nous : quand la situation est grave, ceux à qui on peut reprocher le plus, ce n'est pas tant à ceux qui font et se trompent peut-être, qu'à ceux qui font semblant de ne pas se rendre compte que la situation est grave. Et comme "MATH.en.JEANS" est de toutes façons un peu une auberge espagnole ... chacun en fait un peu ce qu'il veut. Il suffit d'en avoir envie. □

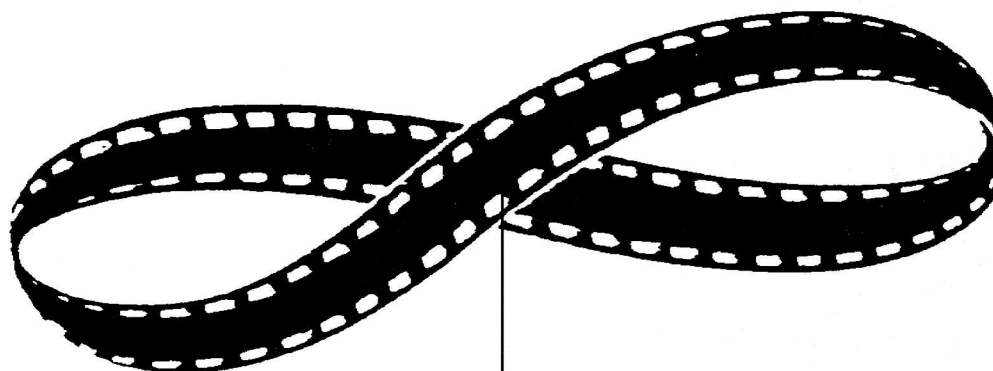
A bientôt ?

Association "MATH.en.JEANS"
Lycée Jean Jaurès
25 rue Charles Lecoq
95104 Argenteuil Cédex

Prix de la Démarche Scientifique (PERIF 90)
Prix d'Alembert 1992

Images et maths

Colette Pelé et Anik Demonget, Paris



Question : Comment se procurer les films du CNDP ?

Réponse : En les demandant dans votre CDDP !

quelques exemples de réalisation :

- Le merveilleux voyage de Flora au pays des vecteurs

Genre conte, un film au rythme assez lent à utiliser par tranche qui présente des vues réelles et des vues mathématisées. Une introduction progressive de la notion de vecteur et des opérations pour les élèves de 3ème et seconde.

- Tangentix

Genre dessin animé, c'est la trigonométrie du triangle rectangle pour élèves de 3ème et seconde. On peut y voir aussi le théorème de Thalès pour le fan club de Thalès ou l'homothétie pour les non membres de ce club !

- Le train sifflera fois

Genre animation sur ordinateur, il s'utilise par petits bouts en l'intégrant au cours. C'est la graduation du cercle trigonométrique et l'introduction des fonctions sinus et cosinus.

- Chronique du hasard

Genre théâtre historique, on y voit Pascal et le Chavalier de Méré jouant au passe-dix pendant que la télévision re-

transmet les derniers événements. A utiliser séquence par séquence avec les nouveaux programmes de lycée.

Un exemple : Rotation et translation

Existe sur cassette VHS ou disque Laservision.

Commentaires par Yves Pelloux
Prayer de Grenoble :

Ce type de film présente des problèmes de la vie courante (proportionnalité, géométrie, ...) des techniques (animations, calcul algébrique, ...) des points de vue historiques (Pythagore, ...).

Passée la première séance, utiliser la vidéo en classe devient un cours comme les autres. ce ne sont pas toujours les mêmes élèves qui interviennent. Le langage employé (l'image) leur est plus familier.

Si l'on veut que nos élèves utilisent dans la vie courante les maths apprises à l'école, il nous faut apporter le monde réel à l'école. La modélisation d'une situation concrète est une difficulté que l'utilisation de la vidéo permet de traiter.

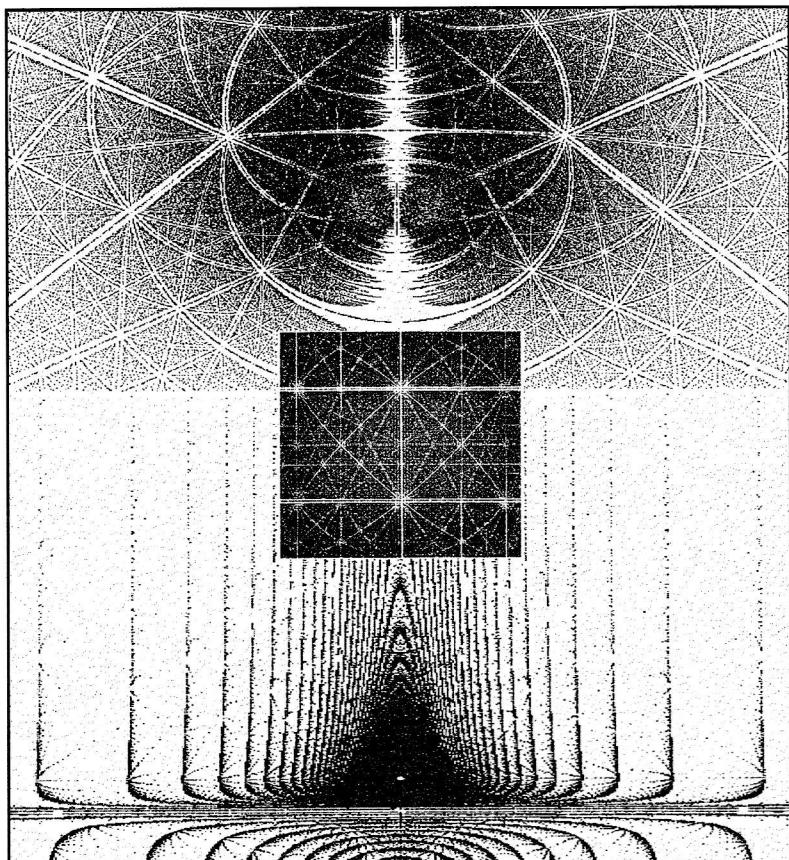
L'usage didactique d'un tel document nécessite la présence d'un professeur. Cependant la vidéo peut jouer le rôle de répétiteur individuel dans les CDI aménagés.



Les Chryzodes

Une découverte en image du nombre
et de ses résonances, harmonies, harmoniques, ...

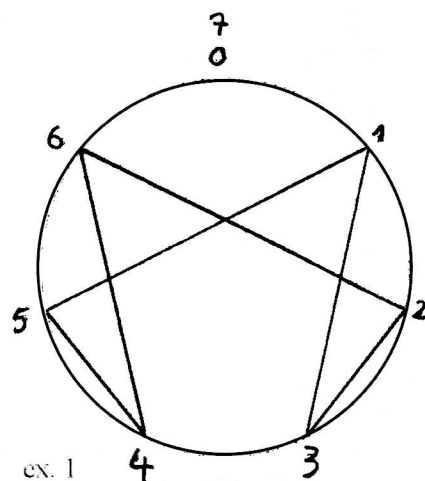
Corinne ROUILLER, Pierre GERMAIN, Jean-Paul SONNTAG.



nombre. (N.B. Les chryzodes ne sont pas des fractales).

Chryzodes en lignes

Comme exemple, étudions la multiplication par trois au moyen de la progression des triples soit : 1, 3, 9, 27, 81, etc...



ex. 1

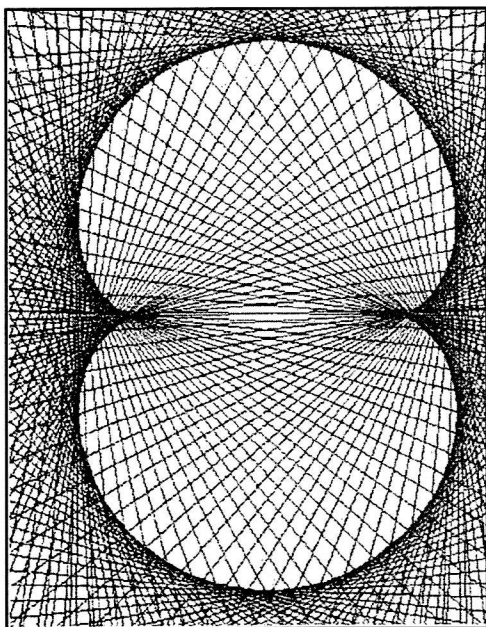
et dessinons celle-ci en nous aidant d'une circonférence où nous définissons $N = 7$ points équidistants numérotés de 1 à N . Il suffit alors de relier simplement par des droites, les points sur la circonférence selon l'ordre correspondant à la valeur des termes de la suite.

Evidemment la progression des triples théoriquement infinie, sera ici limitée par le nombre des éléments de N . Aussi, chaque fois que la valeur d'un terme de la suite est supérieure à la valeur de N , nous retranchons autant de fois que nécessaire la valeur de N à celle du terme de la suite. De la même façon nous comptons les heures où la 26^e heure équivaut à 2 heures. Autrement dit les termes sont congrus au nombre N . De cette façon, la progression : 1, 3, 9, 27, 81, 183, etc... se transforme en une suite périodique de 6 termes : 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, etc... ($9=9$, $9-7=2$). Sur le cercle, du point 1 nous traçons donc une droite qui va au point 3, puis une autre qui

L'union de l'arithmétique avec le cercle, la ligne et le point offre à tous un instrument étonnant, tant par sa simplicité que par la foison de découvertes qu'il permet. Une des innovations vient de l'utilisation d'un cercle gradué dans lequel nous inscrivons les suites de nombres obtenues par des opérations arithmétiques du type addition, multiplication, division, etc.

Au vu de l'exceptionnelle fécondité du processus ces graphes ont été baptisés du nom de : "Chryzode" (de chryzos et zoïde : écriture en or sur un cercle).

Les résultats sont surprenants. Là où auparavant vous ne voyiez que calcul et chiffres, les Chryzodes vous montrent qu'il existe une science des formes et nous enseignent les structures, les résonances, les harmonies, les harmoniques de ces êtres trop souvent méconnus que sont les



ex. 2

va de 3 à 2, puis de 2 à 6, etc... comme dans l'ex. 1.

En utilisant un nombre plus grand d'éléments sur le cercle, nous obtiendrons une meilleure définition graphique (voir ex. 2, ci-contre : multiplication par 3 dans un chryzode de 211 points sur la circonférence).

Nous y observons que les droites sont tangentes à une courbe en forme de huit appelée néphroïde.

Chryzodes en points d'intersection

D'une certaine façon, les chryzodes en lignes sont semblables à un échafaudage analytique. En effet, grâce aux moyens de calcul permis par l'informatique, nous faisons d'autres découvertes en ne faisant apparaître que les points d'intersection des droites. Ainsi dans l'exemple 3, nous avons dessiné les points d'intersection des lignes issues de la suite des triples représentée dans le nombre 2701. Les fines structures émergeant des chryzodes, nous les découvrons aussi en physique dans de nombreux phénomènes de résonance, particulièrement dans les réfractions lumineuses produites par un miroir circulaire vibrant. Nous proposons de nommer "Chryzode simple" le graphe issu des points d'intersection d'un chryzode en lignes et éventuellement : "Chryzode d'harmonie" lorsque nous y représentons une multiplication.

ex. 3

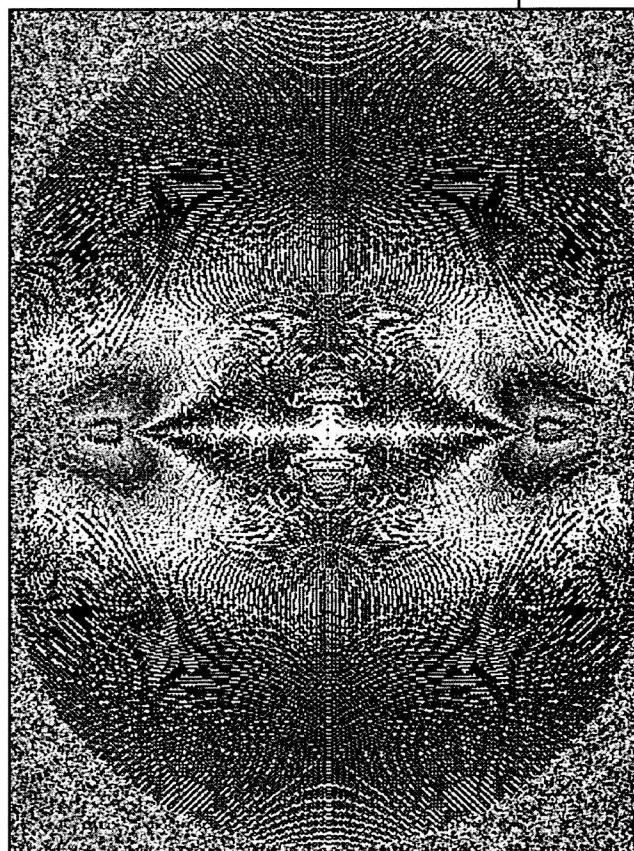
Le voyage dans les formes

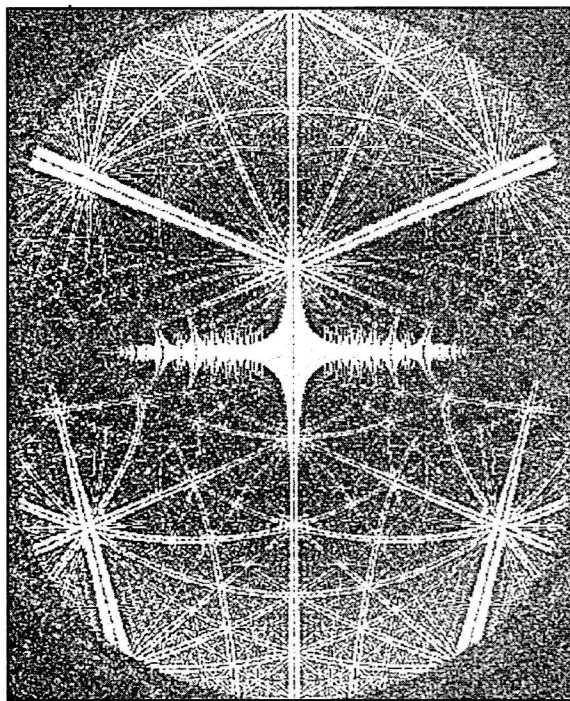
En continuant nos investigations nous remarquons que les détails des chryzodes issus de l'harmonie des triples, dépendent de la valeur des nombres dans lesquels celle-ci est exprimée. Par exemple, en superposant les divers chryzodes des multiplications par trois dans des nombres multiples de 7, soit : 7, 14, 21, etc... nous obtenons l'exemple 4 ci-contre. Le nombre de faisceaux simulant une impression de vitesse est proportionnel à l'intervalle entre chaque nombre, et nous pourrions dire pour cet exemple, que nous y parcourons les harmonies de 3 à la vitesse 7. Nous proposons de nommer "Polychryzode", cette combinaison sur un même anneau de chryzodes simples mais de nombres différents.

Comme il nous est loisible d'agrandir autant que l'on veut les polychryzodes, nous pouvons y réaliser de véritables petits voyages d'exploration à travers une imbrication de "lèvres" et de "faisceaux harmoniques".

Ex. 5 : Agrandissement d'une portion de l'exemple précédent.

A vitesse lente, c'est-à-dire avec un



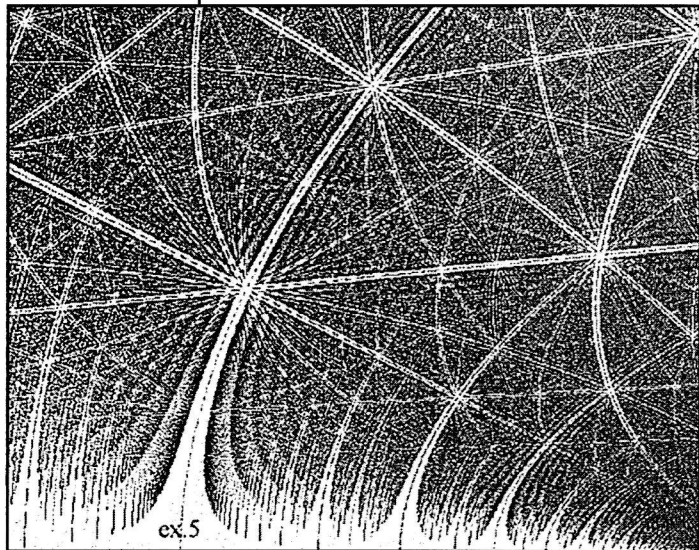


ex. 4

petit intervalle entre chaque nombre, les faisceaux harmoniques disparaissent, et laissent place à un enchevêtrement de moirages, courbes, cols, nœuds, foyers. Ex. 6 ci-dessous : Polychryzode issu des harmonies de 3 dans les nombres de 4000, à 4003, pour la partie à gauche et jusqu'à 4007 pour la droite.

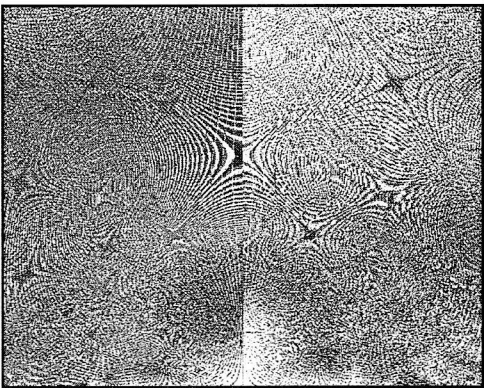
Perspectives :

Retenons donc, les chryzodes permettent d'explorer toutes les fonctions opérant sur les nombres réels. Que ce soient les décimales d'une fraction ou une équation compliquée, cette forme de représentation met toujours en relief des propriétés que cache l'abrupte austérité d'un forma-



ex. 5

lisme intégral-différentiel. C'est une nouvelle façon de représenter certains objets mathématiques, de visualiser des abstractions logiques, de générer des formes esthétiques. Il y a là un domaine de recherche, d'exploration, de création de formes, en quelque sorte, une porte ouverte vers un univers presque inexploré, celui du qualificatif.



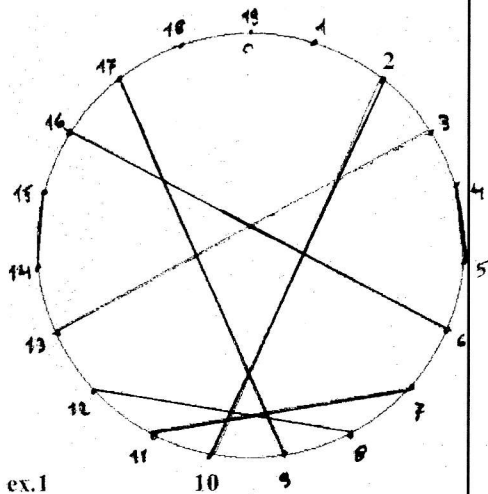
ex. 6

**Extraits de la brochure
"Les Chryzodes,
Introduction Générale"**

Les Couples d'inverses :

Parcourant verticalement et horizontalement la table des multiples congrus à un nombre, les chryzodes simples relatent une cinématique de chryzodes d'harmonies épi et hypo-cycloïdiques. Ceux-ci oscillent entre l'interne et l'externe selon des processus d'expansion-implosion générés par l'inversion des dites harmonies.

A un niveau supérieur de représentation, au lieu de dessiner toute la transformation signifiée par un chryzode d'harmonie, nous pouvons illustrer celle-ci par une



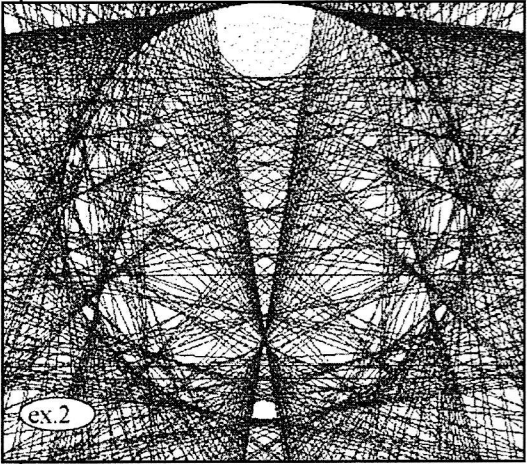
ex. 1

simple ligne reliant le terme verse à son terme inverse sur un nouveau chryzode. Ainsi pour la transformation des multiples de 2 en multiples de 10 dans le nombre 19, nous dessinons une simple ligne reliant le point 2 au point 10 sur une circonférence partagée en points équidistants, ex. 1 ci-contre.

A ce stade, il est avantageux d'y représenter aussi les autres couples de transformation verse-inverse du nombre 19. Une façon simple de les obtenir est de calculer les puissances N-2 du nombre, soit dans le cas du nombre 19 les puissances dix-septième de 1, 2, 3, etc... :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,	
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓	⇐ couples verse↔inverse
1, 10, 13, 5, 4, 16, 11, 12, 17, 2, 7, 8, 3, 15, 14, 8, 9, 18	⇐ puissance 17 (N-2)

Soit les couples :
 $2 \Leftrightarrow 10, 3 \Leftrightarrow 13, 4 \Leftrightarrow 5, 6 \Leftrightarrow 16,$
 $7 \Leftrightarrow 11, 8 \Leftrightarrow 12, 9 \Leftrightarrow 17, 14 \Leftrightarrow 15,$ (voir ex. 1) que nous représentons au moyen de vecteurs dans le chryzode en ligne des couples d'inverse.



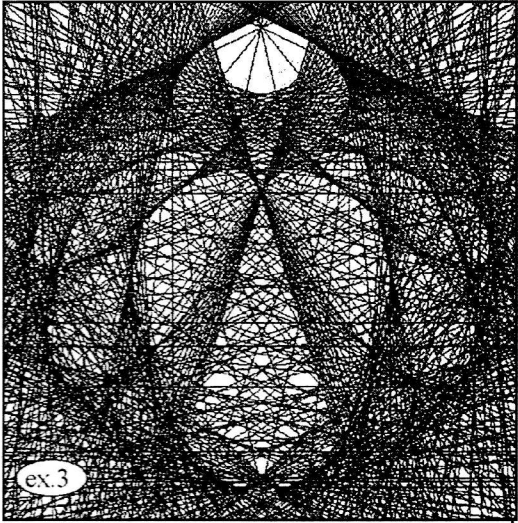
Ce chryzode des couples d'inverses (ex. 1) est comparable à une "carte d'identité" résumant les potentialités géométriques du chryzode de 19 éléments. De fait, une étude exhaustive de l'organisation dans les nombreux types de chryzodes fait apparaître le "chryzode-identité" à tous les niveaux de leur exploitation, et il apparaît que cette carte d'identité est unique pour chaque nombre.

Plus intéressant encore, en construisant le polychryzode des couples d'inverse, c'est-à-dire en superposant dans un même cercle les chryzodes identités des nombres de 3 à 50, voir l'exemple 2, nous découvrons alors une forme ressemblant quelque peu à une espèce de coquille. Dans l'approche instruite par les

chryzodes, cette topologie apparaît être comme un phare fondamental, un archétype, un pivot central, une sorte de clef pour un accès à de multiples autres formes.

Par exemple si nous y multiplions par sept le deuxième terme de chaque couple verse-inverse nous découvrons l'exemple 3, où certains discerneraient comme une espèce de faciès frontal encadré par d'autres vus de profil.

Construction de l'exemple 3 : soit le couple $2 \wedge 10$ dans le nombre 19 ; nous multiplions par 7 le deuxième terme :



$10 \times 7 = 70 \equiv 70 - (3 \times 19) \equiv 13$. Nous traçons une ligne de 2 à 13. etc...

La table de multiplication -1

Nous venons de voir que pour un nombre considéré (un module), une suite de multiplications récursives se transformait en une suite de multiplications inverses. Les représentations de ces transformations dans un référentiel circulaire mettent en relief des chryzodes d'harmonies, des chryzodes-quotients, les chryzodes-identités, etc...

Conscient de l'importance de cette transformation (à toute forme, n'observe-t-on pas une fin inverse de l'origine), il est tentant de répertorier sur un schéma ordonné les diverses variables de ces trans-

formation. Par exemple, en notant dans une grille, sur l'axe horizontal les harmonies origines 'A', sur l'axe vertical les harmonies inverses 'B', et à l'intersection de leurs lignes et colonnes respectives, le nombre 'N' permettant la transformation de 'A' en 'B'.

Très rapidement nous remarquons que la formule qui prévaut aux transformations verse-inverse est très simple. En effet, pour connaître dans quel nombre une suite multiplicative 'A' se transforme en une autre multiplication 'B' il suffit de faire le produit de 'A' par 'B' et d'y soustraire une unité.

Exemple : pour connaître le nombre de référence dans lequel les multiplications par 2 se transforment en multiplications par 10, il suffit de multiplier 2 par 10 puis de soustraire 1. Nous obtenons le nombre 19. Ainsi nous dressons le tableau des transformations vers-inverse ci-dessous. Comme il est symétrique par rapport à sa diagonale, nous en représentons la moitié seulement.

En étudiant cette table de multiplication -1, nous découvrons de curieuses coïncidences notamment le fait que des axes verticaux, horizontaux et diagonaux surgissent dont la propriété est de générer pour chacun d'eux un type particulier de polychryzode d'harmonie.

— Pour les axes horizontaux : des polychryzodes d'harmonies avec des pics d'inflexions internes.

— Pour les axes diagonaux : nous découvrons des lignées de nombres composés pour lesquels les sous-multiples transformant A en B produisent des polychryzodes munis de pics d'inflexions externes.

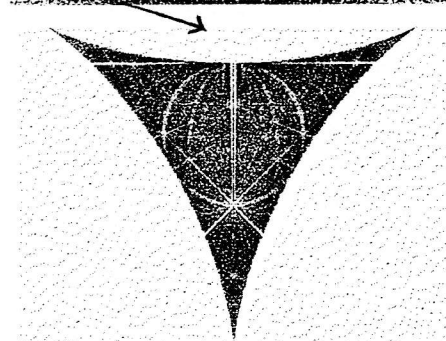
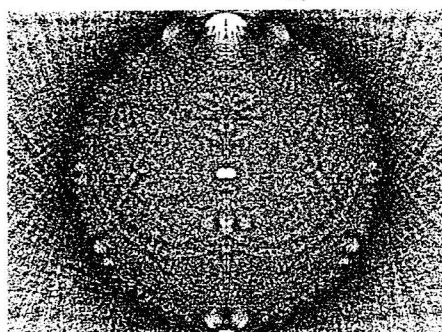
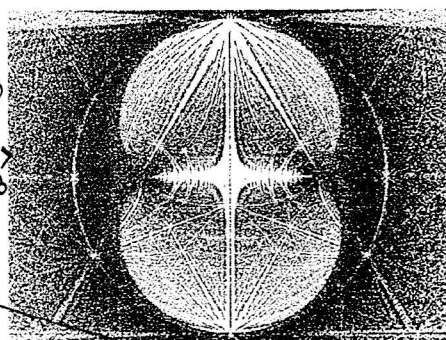
— Quant à la diagonale centrale, outre le fait qu'elle donne naissance à un autre type de polychryzode d'harmonie, nous remarquons que ses suites multiplicatives coïncident avec la progression de Fibonicelli : $c = a + b$, soit par exemple pour le couple d'inverse $4 \leftrightarrow 3$ du nombre 11, la période : 1, 4, 5, 9, 3, 1, ... ($5 = 4 + 1$, $9 = 5 + 4$, etc...). Nous rencontrons cette sorte de progression dans de nombreux phénomènes de développements naturels comme dans la prolifération des lapins, la croissance des plantes, les proportions du corps, etc...

Résumer la foison de découvertes et de renseignements que le tableau des transformations apporte à la compréhension des chryzodes prendrait de nombreuses pages. Concluons en reconnaissant dans les chryzodes un domaine particulier de géométrie de l'abstraction où un niveau de représentation transcende l'autre dans le sens de l'auto-observation du système par lui-même. □

Table de Multiplication -1

TABLE DE MULTIPLICATION -1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2			5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
3				11	14	17	20	23	26	29	32	35	38
4					19	23	27	31	35	39	43	47	51
5						29	34	39	44	49	54	59	64
6							41	47	53	59	65	71	77
7								55	62	69	76	83	90
8									71	79	87	95	103
9										89	98	107	116



Multi sunt vocati... (pauci vero electi)

Jean AYMES - Montauban

Aider les lycéens à élaborer leur projet personnel : un exemple

L'hypothèse principale de la situation décrite ci-après est de poser que, pour un élève de terminale, mieux connaître le vécu des jeunes étudiants est un facteur de mobilisation dans la précision et la vérité des choix d'orientation, dans le style du travail en classe ainsi que le rapport aux exigences scolaires.

Une procédure pour mettre en œuvre cette hypothèse a consisté à placer la classe en situation d'analyse d'une enquête auprès des anciens élèves... ceux qui les ont directement précédés dans la même classe un an avant, deux ans avant ou bien quatre ans avant.

Nous avons été plus d'une vingtaine dans cet atelier dont le propos était de réfléchir aux difficultés de la liaison bac - post bac en ce qui concerne les mathématiques. Si comme le titre en latin a voulu l'exprimer : "beaucoup sont appelés... peu sont élus", il y a bien lieu de s'interroger sur le fonctionnement de cette liaison.

De fait les élèves sont désormais beaucoup plus nombreux dans le cursus scientifique au lycée, mais leur insertion dans les études supérieures scientifiques est nettement malaisée !

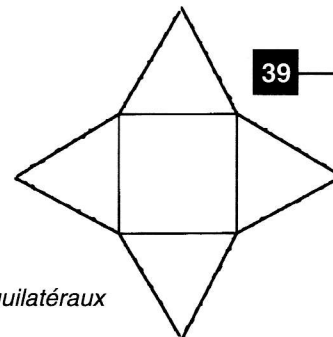
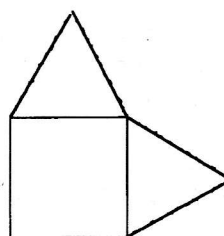
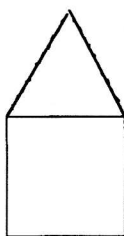
L'atelier a été développé autour de trois thèmes :

- un exemple d'aide à l'élaboration du projet personnel mis en pratique en terminale C ;

- un échange de vues à partir d'un état des difficultés de l'insertion des lycéens scientifiques dans le post-bac ;

- des propositions de type pédagogique en terminale aussi bien qu'en post-bac.

L'atelier s'inscrivait comme prolongement de ceux tenus aux Journées Nationales de Lyon en 91 et de Strasbourg en 92 (cf Plot 1992 et 93).



un carré est bordé extérieurement de triangles équilatéraux

Rappelons ce que le compte rendu publié des Journées de Strasbourg dans le Plot n° 63 décrivait.

"Une enquête a été adressée aux anciens élèves. L'envoi est fait au printemps pour :

1 - mieux comprendre la réalité du passage

2 - savoir ce que les élèves deviennent

3 - créer un lien entre générations d'élèves

4 - profiter d'un écho dans l'enseignement, dans la mesure où les informations obtenues ont des retombées pédagogiques.

Cette enquête interroge les bac + 1, bac + 2 et bac + 4 : les réponses sont parfois assez crues, surtout pour les bac + 1, il est donc nécessaire de disposer d'informations moins passionnelles, c'est ce qu'apportent un peu les bac + 4.

Le questionnaire adressé aux bac + 1 est en annexe.

Cette enquête interroge les étudiants sur leur cursus, leur vie étudiante, leur insertion dans les études supérieures, leur projet, leurs jugements sur les études secondaires, les conseils qu'ils donneraient à un futur étudiant."

Elle a commencé en 90, à l'occasion d'un repas amical avec les anciens élèves, à leur initiative. Puis en 91, le dispositif sur trois ans a été adopté, renouvelé en 92, il a été repris encore en 93 et il est prévu pour 94. Le tableau ci-contre indique (X) les générations interrogées.

au printemps	90	91	92	93	(94)
T.C. en 86-87		X			
T.C. en 87-88			X		
T.C. en 88-89	X	X		X	
T.C. en 89-90		X	X		(X)
T.C. en 90-91			X	X	
T.C. en 91-92				X	(X)
T.C. en 92-93					(X)

L'enquête est principalement le vecteur d'une mise en projet. Les réponses (plus de 70 % des interrogés) sont rassemblées dans un classeur qui est mis à la disposition des élèves. Ils le consultent au lycée, parfois le prennent à domicile :

• **chaque élève peut disposer des classeurs tout au long de l'année.** Il y a maintenant trois classeurs (91, 92 et 93). Cette personnalisation du rapport à l'enquête permet par exemple des prises d'informations complémentaires sous la forme de courriers personnels des terminales aux anciens. Elle favorise des comparaisons selon les filières des répondants, ce qui contribue à concrétiser la représentation des études projetées.

• **c'est un point d'appui pour les dialogues entre professeur et élève** car articuler "aspirations et capacités" demeure une impérieuse nécessité. Il est tout à fait utile de réguler la lecture par une relation à établir avec les résultats scolaires. Ces dialogues sont favorisés par l'existence d'une information qui joue le rôle d'une sorte de troisième partenaire vis-à-vis de la confrontation professeur élève... c'est extrêmement porteur de prise de distance.

• **la prise d'information sur la quatrième année régule la lecture** des échecs de la première, cela permet de lire les adaptations de cursus. Il ne s'agit pas d'en déduire qu'on va échouer après le bac. Au contraire, l'examen des stratégies des anciens dans leur modification de cursus en cas d'échec est un encouragement à préparer l'avenir pour les lycéens : penser à des choix alternatifs, explorer ses propres goûts, prendre conscience de la diversité, rechercher des moyens d'atteindre les buts dès la terminale...

L'enquête a un effet modérateur sur l'estimation que conçoit le professeur... les verdicts définitifs sont assez peu valides. Les évaluations en terminale sont franchement loin de permettre des pronostics fiables en ce qui concerne les réussites dans le post-bac.

• **l'enquête induit une adaptation des choix pédagogiques.**

Les exigences sont mises en perspective, leur diversification devient plus explicite, mieux négociable. L'enseignement en terminale contribue à atteindre deux buts : d'une part il est une préparation au baccalauréat, d'autre part il contribue à une formation vers les études futures. S'ils ne sont pas contradictoires ces buts peuvent en partie se neutraliser. Travailler uniquement dans la perspective de l'examen risque d'entraîner des scléroses... mais se fixer comme seul projet la préparation des études futures peut lourdement porter tort aux élèves notamment dans leur accès à la terminale. Tout un effort spécifique du professeur de terminale doit consister à faire cohabiter les deux visées... là aussi le témoignage des anciens rend crédibles de modifications d'exigences par rapport à la stricte préparation au bac.

• **les réponses touchent toute la scolarité, les autres disciplines.** Cela aide à

comprendre la dimension globale de la formation : l'organisation du travail personnel, le rapport à la formation que donne le lycée, l'importance et le rôle des disciplines non scientifiques, les objectifs des études.

• **les anciens ont une très forte envie de répondre.** C'est un phénomène observable depuis que l'enquête s'est inscrite dans la durée : par sa reproduction annuelle, les anciens qui y répondent en avaient tiré profit lorsqu'ils étaient élèves. L'enquête est, par eux, très attendue.

A-t-elle pour eux un rôle dynamisant ? A-t-elle un rôle dans leur réflexion sur leurs études ?

Les principaux pôles de difficultés

L'enquête n'est pas vraiment l'objet d'un traitement scientifique... elle n'a pas été d'abord prévue pour cela. On peut cependant en extraire quelques données pour mieux comprendre les difficultés d'insertion des lycéens dans le post-bac scientifique. ceci dans les "conditions de l'expérience" : une seule classe d'un lycée classique et moderne d'une ville de 50 000 habitants dans un département rural en relative difficulté économique. Ces résultats sont-ils transposables ? En tout cas ils ont été le prétexte d'un échange de vues dans l'atelier à partir d'un échantillon des réponses distribué à chacun des participants.

Nous n'avons retenu que quatre pôles de difficultés ; ils schématisent assez une situation générale :

• l'évaluation

Elle revêt des aspects divers selon les filières de formation, pour des besoins d'adaptations diverses pour l'étudiant.

Des prises en charge par l'enseignant sont-elles possibles ?

D'une part en prépa : "la chute de 10 points"

Le jeune va devoir entrer dans une nouvelle démarche d'évaluation imprégnée par le style concours... c'est la notion de classement qui prend le pas sur la notion de niveau.

Le jeune va devoir apprendre à assumer, à apprendre à relativiser en se situant.

Les professeurs de classes prépa pour-

raient-ils faire autrement ? Rendre explicite le nouvel état d'esprit, adopter un scénario de début d'année qui soit aidant ?... comme le font certains collègues qui donnent leur témoignage.

Or avec l'évolution des épreuves du baccalauréat beaucoup d'élèves admis en prépas ont eu durant leur terminale ou à l'examen d'excellentes notes... oui la chute est brutale !

Ailleurs... une évaluation moins présente au début, en DEUG A ou INSA notamment.

Du fait de la certification par partiels avec une certaine absence d'évaluation instituée entre les partiels, le jeune étudiant a du mal à se situer, parfois il "oublie" l'exigence d'un travail régulier, il ne sait pas toujours s'auto-évaluer en cours de formation.

Là l'évaluation serait-elle presque sans fonction formatrice, toute sommative ?

Pour le jeune étudiant, il faudra adopter un travail plus autonome.

Quelle aide est alors possible dans les premiers temps de la part des professeurs ?

• le travail étudiant

Faire face à la quantité de travail est une grande difficulté en prépa.

En fac, il faut apprendre à l'organiser... il est souvent géré irrégulièrement.

• la relation pédagogique

Les jeunes étudiants sont surpris par le manque de communication, ou ce qui semble être un manque d'intérêt de la part de leurs professeurs.

Ils doivent apprendre à installer de nouvelles relations avec leurs professeurs... ce que certains dans l'enquête ont justement exprimé.

Ils ont à faire face à un contenu scolaire soudainement devenu plus abstrait... ceci est fortement exprimé y compris en termes de revendications de programmes au niveau des lycées.

Que ce soit pour le professeur de terminale ou celui du post-bac est-il impossible de les aider ? D'une part en repensant la nature de la relation pédagogique : stimuler la prise d'autonomie dès la terminale, avoir le souci d'une éducation à de nouvelles relations dans les débuts du post-bac, ... D'autre part en agissant sur les contenus des activités pédagogiques pour aider à abstraire : mise en perspective des exemples vers le général en terminale mais du

général vers les multiples exemples pratiqués au lycée dans l'enseignement post-bac.

• la formation secondaire

En gros l'enseignement secondaire est estimé, mais ce peut être pour des raisons inverses.

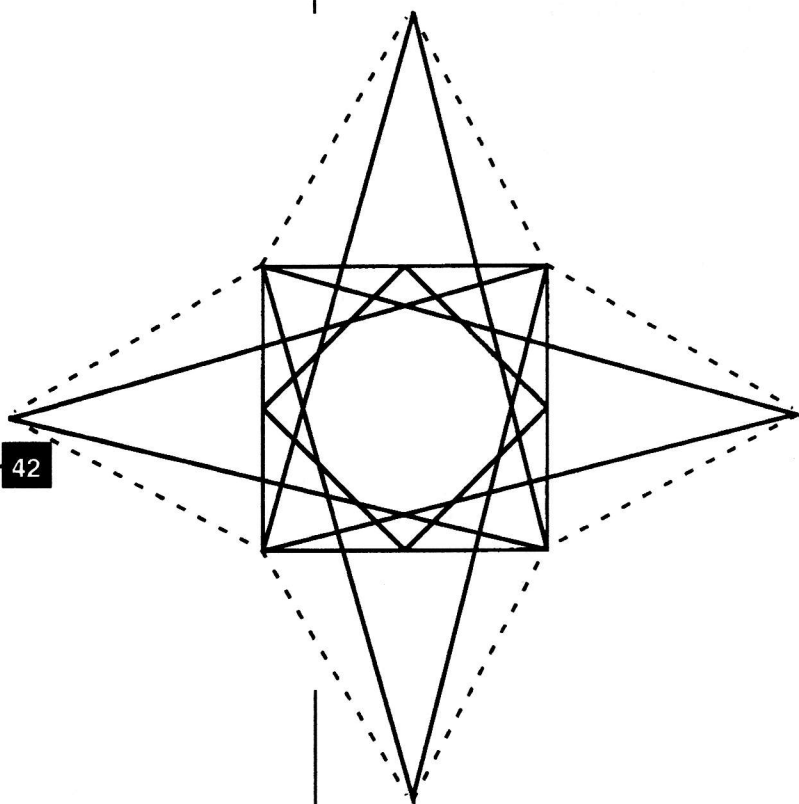
La dimension formation générale de base est appréciée.

Le second degré contribue à un apprentissage du travail scolaire.

La formation à la réflexion est plus discutée : il y a de vraies demandes de développement de l'esprit de recherche, de l'autonomie.

Des demandes d'accès à l'abstraction sont clairement formulées : que ce soient des demandes d'approfondissement ou aussi franchement des demandes d'anticipation de contenus de programmes.

Or par la diversité des contenus qu'elles évoquent eu égard à la multiplicité des filières, il semble finalement un peu vain de tenter d'y satisfaire. Les pratiques d'anticipation de pans entiers de programmes de l'après-bac ne semblent pas pertinentes pour tous les élèves.



42

joindre sommets du carré et sommets des triangles équilatéraux

Quelques propositions

• après le lycée

L'évolution de la formation des lycéens est résultat des infléchissements sur les structures : organisation des enseignements, programmes, évolution des exigences sont les fruits de décisions nationales. L'enseignement supérieur ne peut les ignorer, mieux prendre en compte l'étudiant tel qu'il se présente au sortir du lycée est une exigence qui s'impose.

— *assumer la formation passée...* y compris dans ses défauts, mais elle a bien tout de même des qualités !

D'abord par un impact sur l'organisation des apprentissages : les progressions, la montée des exigences peuvent être améliorées, adaptées.

Puis la formation passée offre un lot de situations propices à amorcer de nouvelles appropriations... elles sont des points d'appui utiles. On peut tenir le jeu des raccords et des ruptures qui se nouent pour le jeune étudiant : raccords avec les anciens savoirs et ruptures par approfondissements ou changements de points de vue par l'enjeu des nouvelles perspectives du savoir... elles peuvent prendre sens si on aide à la situer.

— *varier les pratiques*

Promouvoir la démarche scientifique... est un souci commun. Les programmes de lycée préconisent huit moments de l'activité mathématique :

formuler un problème,
conjecturer un résultat,
expérimenter sur des exemples,
bâtir une démonstration,
mettre en œuvre des outils théoriques,
mettre en forme une solution,
contrôler les résultats obtenus,
évaluer leur pertinence au regard du problème posé.

Ne sont-ils pas acceptables dans le supérieur ? Ne pourraient-ils nourrir des activités de type diversifié ?

Faire travailler en groupe, donner à conduire un projet... dans la dynamique d'une formation à la recherche.

Questionner les étudiants sur l'enseignement... à l'exemple de ce qui se pratique dans certaines universités, comme en témoigne la brochure inter-IREM "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année".

Peut-on évoquer brièvement le rapport

DA CUNHA juin 1989 ?

“Si pour un étudiant (le plus souvent passif en cours), l'on crée des conditions favorables (faire un exposé, conduire un projet, participer à un débat), alors il montre un intérêt et une ténacité dans le travail, insoupçonnables dans son comportement usuel”.

• au lycée

Varié le rapport de l'élève au savoir : “On ne reproche pas aux élèves de lycée, à l'Université, de ne pas savoir des choses, ils les savent. On leur reproche de ne pas savoir les utiliser de leur propre initiative dans des situations nouvelles. De ne pas être capables de faire preuve des connaissances qu'ils ont acquises en dehors des contraintes et des dispositifs didactiques dans lesquels ils les ont apprises...” d'après Philippe Meirieu qui fut membre du Conseil National des Programmes.

— proposer des problèmes

Le style bac implique un risque de dérive, on peut substituer quelques problèmes aux épreuves. Nous l'avons illustré par quelques exemples : il est ainsi possible de transformer des épreuves de l'examen ou poser des problèmes inspirés des huit moments.

Avoir, pour trouver, à changer de cadre ou avoir à investir un outil sans indice... on brise ainsi l'aspect répétitif de certaines activités ou le fait que leur formulation contient méthodes ou moyens de résolution. Cela ne va pas sans un appariement des activités et des objectifs d'une part en aidant l'élève dans sa réflexion sur les méthodes, d'autre part en identifiant plus clairement la fonction des activités (à distinguer notamment des activités d'évaluation).

— travailler spécifiquement sur des aspects plus formels

Par exemple pour s'approprier une définition : cela peut prendre appui sur des notions plus ou moins proches... il s'agit d'accentuer l'idée selon laquelle en mathématiques le sens provient des définitions posées.

Pour mettre en relation des pratiques dont un concept est unificateur : un travail d'abstraction visant à rapprocher des exemples divers dans le cadre d'une notion plus générale pour aider à en apercevoir sa signification.

Pour approfondir le statut de la démonstration car c'est manifestement une

réelle difficulté : les élèves ont l'impression qu'avant le bac on n'a pas fait de démonstrations alors qu'après on démontre entièrement... Quelques exemples :

— réinterroger le statut... des mathématiques : ce que sont théorèmes, définitions, leurs rôles, leurs énoncés. Faire situer les théorèmes comme outil de démonstration contribue à édifier la notion.

— donner une réelle valeur formatrice aux démonstrations qui sont faites... elles peuvent donner lieu à de vraies activités d'apprentissage.

— sur les théorèmes qu'on ne démontre pas : ils sont en effet nombreux au lycée mais cela a ses raisons d'être. On peut alors élaborer de riches activités : argumenter sur le rôle de chaque hypothèse, rechercher des contrexemples, ce peut être enrichissant pour s'approprier des notions du programme.

— quand on démontre ce qui paraît évident : aider à le resituer selon de nouveaux points de vues, légitimer la démonstration par avancée dans la rigueur formelle.

— quand voir ne s'accorde pas complètement aux arguments de preuves : depuis le collège beaucoup de démonstrations sont articulées implicitement ou explicitement avec des arguments sensibles ou des occasions de se dégager de ce “visible” sont fertiles en approfondissement de la notion de démonstration... ainsi du cas des calculs d'angles de couples de vecteurs. Il est temps en terminale d'accentuer cette prise de distance.

— quand un concept est l'outil clé d'une démonstration : c'est l'occasion de le mettre en exergue, peut-être de commencer à en faire un objet d'étude en soi... au gré de circonstances favorables.

— par classement des types de démonstrations et variété de leur champ d'intervention : le nécessaire, le suffisant, l'implication et sa réciproque, le contre-exemple, la disjonction de cas, l'absurde, la récurrence, les déterminations d'ensembles (images d'ensembles, lieux géométriques). Soulignons l'importance, non seulement d'activités dans lesquelles ils interviennent, mais plus encore du travail explicite de leur identification par l'élève. En prolongement on peut veiller à ne pas installer la pratique de certains types de démonstrations dans des cadres de contenus trop étroits... par exemple les élèves sont parfois surpris d'avoir à faire un raisonnement par récurrence en géométrie.

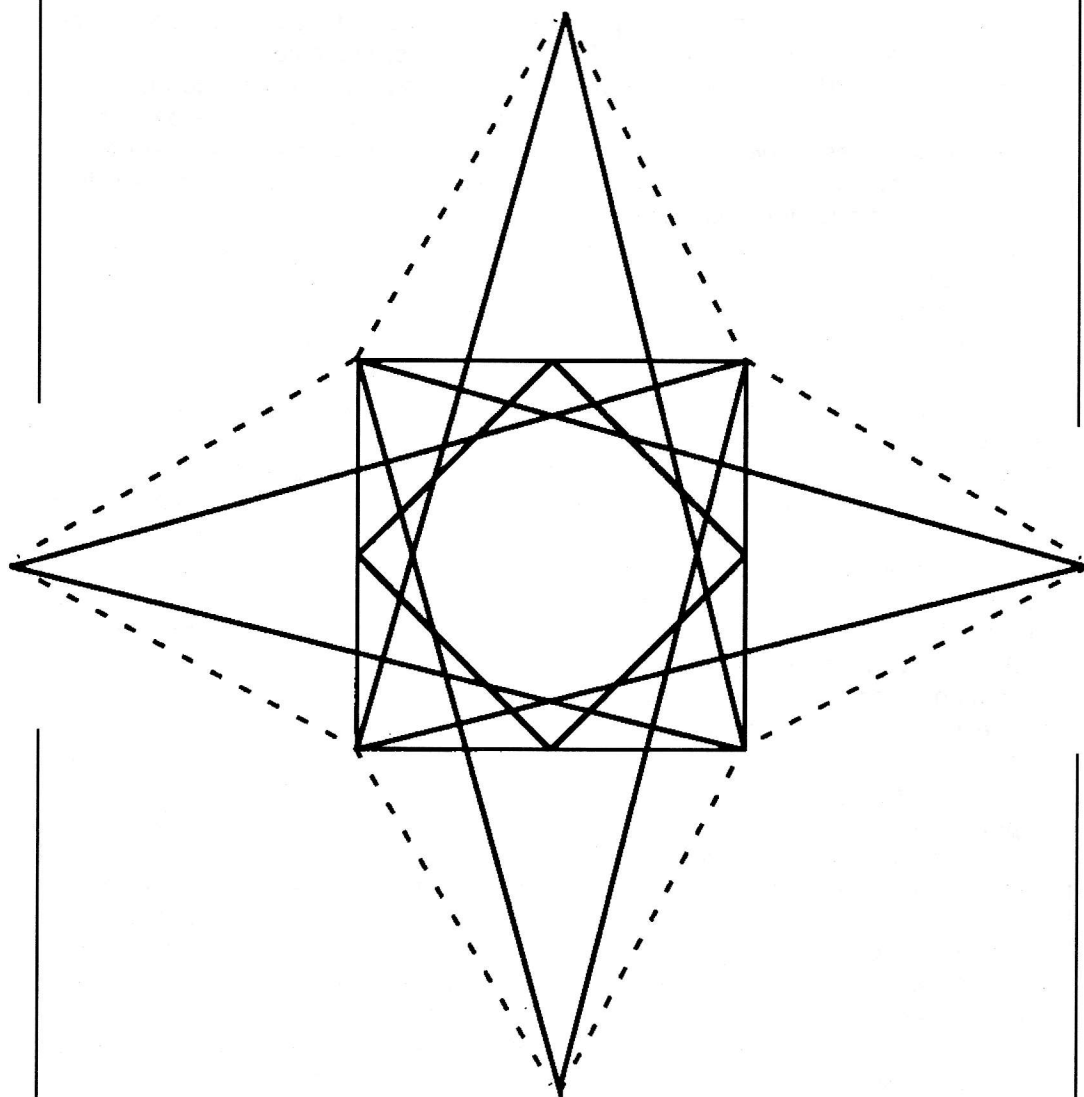
Service public ?

Où va l'accès aux études supérieures scientifiques s'il s'avère que se désagrègent les pratiques de formation ?

Les lycées sont-ils équitablement placés en position de former les jeunes scientifiques ?

Des pratiques pédagogiques en contradiction avec les programmes, aussi bien au lycée en ce qu'elles les détournent qu'après le baccalauréat en ce qu'elles les ignorent, peuvent-elles être admises alors que le système éducatif prétend augmenter le nombre de jeunes formés ?

Pour que davantage soient élus... multi eligantur !



joindre selon un carré les milieux des côtés du carré
un dodécagone régulier semble s'inscrire au cœur de la figure
est-ce une illusion d'optique ou une vérité mathématique ?

Le double défi des IUFM : recruter et former pour demain



M. Blanchard, M. Combrade, J. Souville, Poitiers.

1- En première année d'IUFM

Quantitativement

D'un point de vue quantitatif, la crise du recrutement des enseignants (dans de nombreuses disciplines dont les mathématiques) était larmante et les projections dans l'avenir inquiétantes. La perception de la crise s'atténue car les candidatures aux concours de recrutement augmentent considérablement.

D'autres raisons que la création des IUFM sont sans doute la cause de cet afflux et le débat s'est engagé sur la gestion des flux.

Le problème qui se pose est celui du recrutement en première année d'IUFM. Faut-il filtrer les entrées? Est-ce possible? Le débat a montré que les avis et les pratiques étaient divers d'un IUFM à l'autre.

Le taux de réussite est passé de 52% en 1992 à 41% en 1993 avec une très forte augmentation du nombre des inscrits.

La création du CAPES interne fait que l'essentiel des lauréats du CAPES externe constitue un «flux frais».

Qualitativement

D'un point de vue qualitatif, il a été énoncé que le niveau des licenciés de mathématiques était parfois faible, en particulier en géométrie. Il apparaît, contrairement à certaines idées reçues, que la plupart des lauréats du

CAPES sont des licenciés de mathématiques !

Les meilleurs licenciés réussissent au CAPES tout en se consacrant à la maîtrise.

L'épreuve professionnelle est regrettée, il ne lui a pas été laissé le temps d'atteindre sa vitesse de croisière, de faire ses preuves. L'articulation - stage d'observation - épreuve sur dossier - pour la session 94, est mal assurée. Le stage permettant l'élaboration des fiches (session 93) était sans doute très profitable, en particulier pour préparer à l'insertion professionnelle en 2ème année, avec toutefois un danger : l'élaboration de fiches stéréotypées. Danger d'un autre ordre : le bachotage que peut provoquer une liste fermée de questions, ce qui peut se produire avec la formule actuelle.

Les nouveaux stages sont organisés par la plupart des IUFM, pas sans difficultés parfois, car il convient de les préparer et les capacités d'accueil semblent parfois saturées. Ces stages semblent peu finalisés, ce qui rend leur efficacité douteuse. Un constat : la préparation à l'épreuve professionnelle faciliterait la prise en charge par les stagiaires de leur classe en responsabilité. On s'interroge donc sur les raisons de sa suppression.

Les professeurs de lycée professionnel

En mathématiques - sciences physiques, le tableau est différent.

Le nombre de candidats est moins

dre qu'aux CAPES, toutefois la multiplicité des lieux de préparation au concours (il n'y avait que 5 E.N.N.A. avant la création des IUFM) a augmenté les flux (au prix d'un effritement des effectifs). La crise de recrutement est donc très atténuée (bien que toutes les allocations prévues n'aient pas été attribuées).

Les candidats licenciés de mathématiques sont très minoritaires ; ceux de sciences physiques ou de chimie sont les plus nombreux ; ceux de sciences naturelles ne sont pas rares, tout comme les candidats qui ont une expérience professionnelle de plusieurs années (ingénieurs et le plus souvent maîtres-auxiliaires). La moyenne d'âge de ces candidats est plus élevée, les étudiants ne représentent que le quart des candidats.

Les professeurs d'école

Pour les candidats au professorat des écoles, d'abord la crise de recrutement n'existe plus, l'afflux est énorme et croissant. Tous les IUFM sont obligés de filtrer strictement l'inscription en 1ère année (sur dossier le plus souvent, avec entretien parfois).

La part des mathématiques dans la préparation à ce concours est parmi les plus importantes. Les représentants des anciennes écoles normales regrettent souvent encore ce qui s'y faisait ; les formateurs actuels reconnaissent généralement que si la formation à la polyvalence d'étudiants issus de licences spécialisées relève de la gageure dans le temps imparti, le niveau des candidats leur permet de suivre les enseignements avec profit. Les questions posées par les candidats sont peut-être plus pertinentes qu'auparavant mais il n'est pas sûr qu'ils soient mieux préparés à prendre une classe en main.

2- En deuxième année d'IUFM

Il a été constaté là encore une grande disparité d'un IUFM à l'autre.

La formation générale et la formation commune sont controversées. Elles ont disparu parfois (en particulier en 1ère année). Une ex-stagiaire a trouvé qu'il s'agissait de temps perdu.

La seconde année paraît pour beaucoup trop courte, d'autant plus qu'éparpillés ensuite au niveau national, les nouveaux professeurs perdent le contact avec leurs formateurs.

L'héritage du CPR n'était pas si négatif.

Les équipes des CPR et des IREM (sans qu'elles soient nécessairement disjointes) se sont investies dans les IUFM et ont trouvé là une occasion de se redynamiser. Pour la formation des PLP2, là où il n'y avait pas d'ENNA, il a fallu dans la précipitation, trouver des formateurs ; ceux-ci souhaiteraient davantage de possibilités d'échanges, **d'occasions pour eux-mêmes, de se former !**

Les mémoires professionnels sont désormais acceptés, tous les certifiés en élaborent un et le soutiennent. C'est même le cas pour les agrégés stagiaires dans quelques IUFM. Toutefois, la différence de traitement institutionnel entre stagiaires agrégés et stagiaires certifiés reste regrettée.

Le vœux de confier aux IUFM la préparation à l'agrégation a été exprimé.

Les stagiaires de 2ème année, issus d'une 1ère année d'IUFM, semblent plus à l'aise.

En conclusion, il semble que les IUFM trouvent leur rythme de croisière. Après les turbulences de l'été 93 qui ont concerné principalement les modalités du concours et de sa préparation, et qui ont provoqué des réactions et interprétations très contrastées par les présidents des concours des diverses disciplines, des regrets ont été fréquemment exprimés.

Un véritable bilan de l'action des IUFM a été réclamé. □