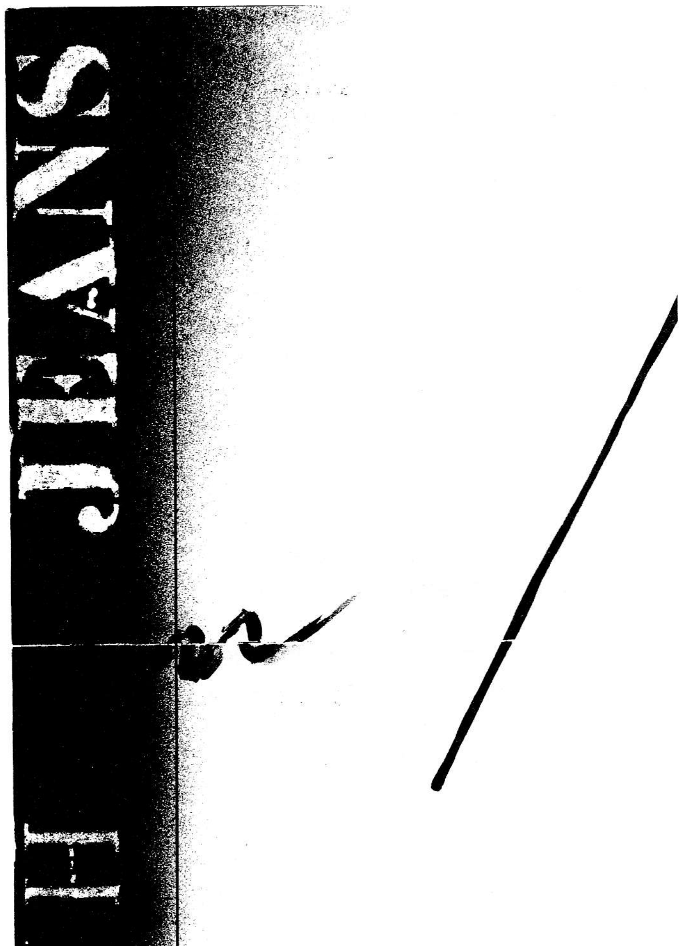
Ateliers "MATh.en.JEANS"

Pierr AUDIN, Argenteuil



L'Association "MATh.en.JEANS" (l'AMeJ) s'était mobilisée pour ces Journées, proposant un atelier somme toute assez classique aux congressistes, mais aussi une simulation de jumelage "MATh.en.JEANS" sur le Salon Futuromath, avec des chercheurs, des enseignants et des élèves en chair et en os. Voici d'abord le compte-rendu des élèves qui ont participé à cette simulation, rédigé par les élèves eux-mêmes.

Ce texte est exemplaire et atypique :
— **atypique** par une structure bourbakiste peu commune dans les écrits "MATh.en.JEANS" des élèves [se reporter aux actes déjà parus des congrès de 1991 et 1992].
— **exemplaire** puisque c'est un exemple d'écrit d'élèves ; mais exemplaire aussi parce qu'il raconte l'état mathématique du travail lors de son arrêt et met l'accent sur tout ce que les élèves perçoivent de ce qu'il reste à faire ; exemplaire encore parce qu'il ne raconte pas de façon chronologique le déroulement du travail (bien que des références à diverses opinions de différents moments soient présentes dans le texte) ; exemplaire enfin car l'importance de certaines démonstrations n'est pas perçue par les élèves [équivalence des "définitions" de rigidité par exemple : voir ci-contre 1.1.3.—] et les termes utilisés ont une définition "MATh.en.JEANS" qui ne correspond pas forcément à la définition mathématique dont les élèves n'ont pas connaissance [treillis, diagonalisable], et toute l'expérimentation [avec des barres de type MECANO] est passée sous silence. Un écrit "MATh.en.JEANS" n'est ni de forme scolaire, ni de forme recherche, les élèves étant soumis à la force de l'habitude (scolaire) et de la nouveauté en cours d'assimilation (recherche).

Et maintenant, place au texte des élèves !

"Rigidité - flexibilité".

A l'occasion du congrès de l'APMEP qui s'est tenu du 22 au 24 octobre 1993, l'AMeJ a voulu montrer comment fonctionne traditionnellement un jumelage. C'est pourquoi elle a réuni à Poitiers deux de ses chercheurs (Ch. Payan et P. Duchet), deux de ses professeurs (A. Soismier et R. Veillet) et sept élèves (trois de Poitiers, n'ayant jamais participé à "MATh.en.JEANS", et quatre de Paris, qui y avaient déjà participé) de 1ère et Terminale, économique ou scientifique.

Deux groupes ont été formés et ont cherché sur le même sujet (présenté par Ch. Payan) : "Rigidité et flexibilité". Ils se sont réunis lors de 3 séminaires pour s'échanger les résultats et conjectures. Tout s'est donc passé comme dans un vrai jumelage "MATh.en.JEANS, mais en accéléré.

Voici les résultats que les élèves ont exposés devant un public très attentif. Ils ne sont le miroir que d'une journée et demie de travail.

1.— Définitions et exemples simples.

1.1. — Définitions de la rigidité.

1.1.1.— Un treillis est une figure géométrique plane constituée uniquement de segments pouvant avoir deux longueurs (proportionnelles à 1 et à 2). Les segments de longueur 2 permettent de former des triangles rectangles isocèles, ou des carrés avec leur diagonale.

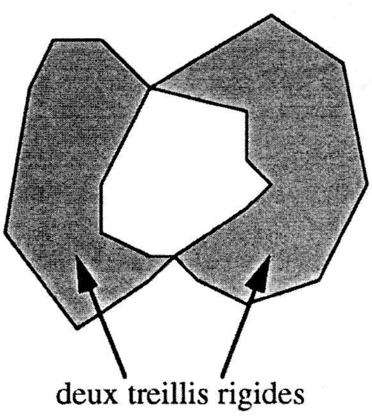
1.1.2.— Un treillis sera dit rigide si, quand on fixe l'emplacement de deux de ses points, le reste du treillis ne peut pas se déformer ni bouger.

1.1.3.— Une autre définition de la rigidité est qu'un treillis rigide est tel que ses angles soient fixes.

Dans le plan, ces deux définitions sont équivalentes.

1.1.4.— Quand on rattache deux treillis rigides entre eux, et qu'ils ont au moins deux points en commun, le treillis est rigide (cf. figure 1).

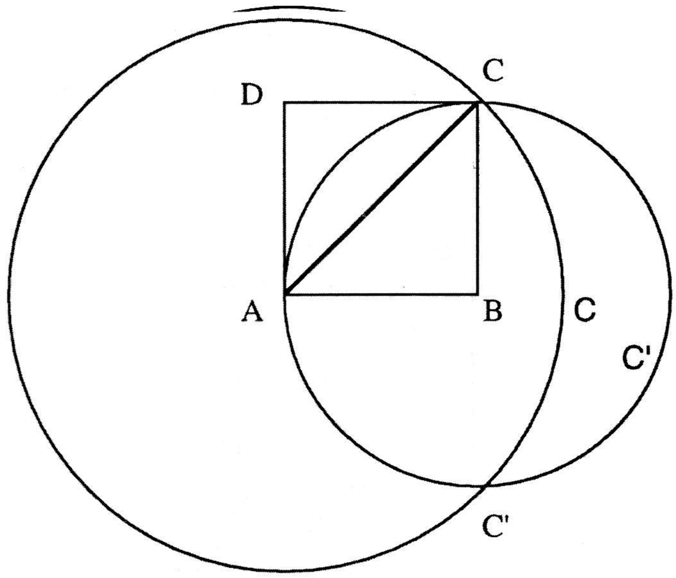
figure 1



1.2.— Structures de base rigide.

1.2.1.— Le carré muni de sa diagonale, ou carré diagonalisé, est rigide (cf. figure 2).

figure 2

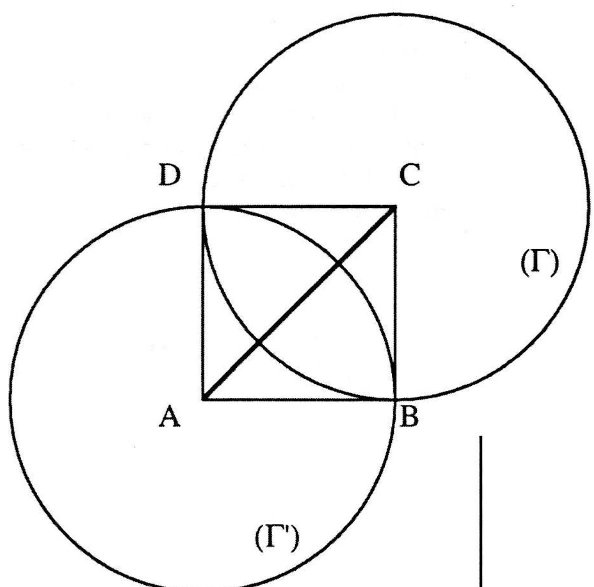


En effet, considérons comme fixes les points A et B. Le point C est alors tel que AC = 2 et BC = 1 ; il est à l'intersection des cercles C et C'. Ces cercles se coupent en deux points, C et C'. Comme un glissement continu n'est pas possible de l'un à l'autre, le point C est fixé.

De même, D est tel que CD = 1 et AD = 1.

D est donc à l'intersection de (G) et de (G') (cf. figure 3).

figure 3

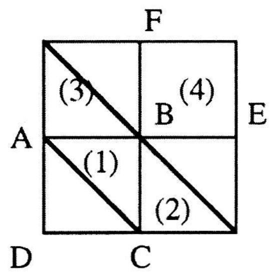


D est donc, de même que C, fixé. Le carré diagonalisé est donc rigide. On remarque que cela reste vrai quelque soit le sens de la diagonale (AC ou BD).

1.2.2.— Le carré dont deux côtés sont fixés est rigide. En effet, si A, B, C sont fixés (que la diagonale AC soit présente ou non), D l'est aussi (cf. ci-dessus et figure 3).

1.2.3.— La structure appelée carré de base, représentée figure 4, est rigide.

figure 4 (changement d'échelle)



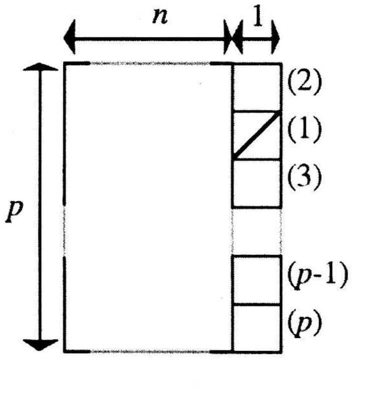
En effet, les carrés diagonalisés (1), (2) et (3) sont rigides ; comme ils ont à chaque fois un segment en commun ([AB] entre (1) et (3), [BC] entre (1) et (2)), l'ensemble (1)-(2)-(3) est rigide. Le carré (4) a deux côtés BE et BF fixés : il est rigide. Le carré de base

(1)-(2)-(3)-(4) est donc rigide.

2.— Procédé pour construire un treillis rigide rectangulaire.

2.1.— Raisonnons par récurrence. Supposons que nous ayons obtenu un treillis rigide, rectangulaire, de n par p cases (n 1, p 1). Pour p = n = 1, on part du carré diagonalisé. Pour augmenter n de un, il suffit d'ajoindre un rectangle de 1 sur p au rectangle n sur p (cf. figure 5), tel que parmi les p carrés qu'il comporte, l'un au moins soit diagonalisé.

figure 5



En effet, le carré diagonalisé ajouté formera un ensemble rigide avec le rectangle n ¥ p. Notons (1) ce carré diagonalisé.

Les carrés adjacents, (2) et (3), auront deux côtés fixes (l'un commun avec (1), l'autre avec le rectangle). (2) et (3) seront donc rigides, et ainsi de suite : (4), (5) ... , (p-1) et (p) sont rigides ; le rectangle (n + 1) ¥ p est rigide.

2.2.— Nous avons donc déterminé un moyen de construction. Il utilise une diagonale par ligne ou colonne ajoutée. En partant du carré diagonalisé (1 ¥ 1), on ajoute (n-1) diagonales pour obtenir le rectangle 1 ¥ n, et (p-1) autres pour obtenir le rectangle (n ¥ p). Un nombre suffisant de diagonales pour obtenir un rectangle rigide n ¥ p, est donc :

$1 + (n-1) + (p-1) = n + p - 1.$

3.— Méthodes pour tester si un treillis est rigide.

3.1.— Méthode “du carré de base”.

3.1.1.— Principe : soit un treillis comportant un carré de base (cf. figures 4 et 6). Le carré de base (1)-(2)-(3)-(4) de la figure 6 est rigide ; le carré diagonalisé (5) aussi, donc leur réunion aussi.

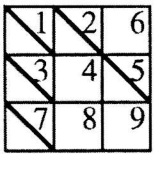


figure 6

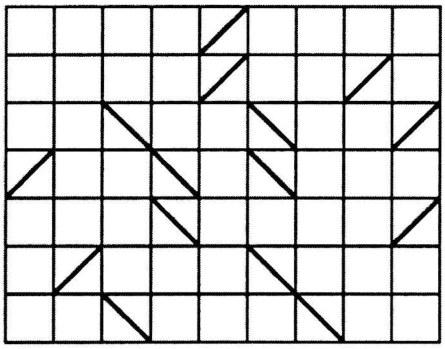
Le carré (6) a deux côtés fixés (un en commun avec (2), l'autre avec (5) : il est rigide.

D'autre part, le carré (7) est rigide (il est diagonalisé et a un côté commun avec le treillis rigide (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6)) ; le (8) aussi (il a un côté commun avec (7) et un avec (4), (7) et (4) étant rigides). De même, (9), qui a deux côtés fixes (ceux qu'il partage avec (5) et avec (8), est rigide : le carré 3 ¥ 3 entier est rigide.

3.1.2.— Limites de cette méthode.

3.1.2.1.— Cette méthode n'est pas universelle : contrairement à ce que nous avions d'abord conjecturé, il existe des treillis rigides dépourvus de carré de base (c'est le cas de la figure 7).

figure 7



3.1.2.2.— Dans certains cas, le treillis comporte un carré de base, mais la méthode ci-dessus ne permet pas de conclure, bien que ces treillis soient rigides.

3.1.2.3.— Cette méthode est quand même intéressante car elle permet, dans certains cas, de démontrer qu'une structure est rigide (c'est le cas de la figure 6).

3.2.— "Conjecture du L".

3.2.1.— Enoncé : si on peut former un L en translatant une seule fois, horizontalement ou verticalement, les diagonales d'un treillis, alors celui-ci est rigide.

3.2.2.— Exemple : en partant du treillis de la figure 7, déplaçons les diagonales comme indiqué figure 8. On obtient le L dessiné figure 9. Selon notre conjecture, le treillis de la figure 7 est donc rigide.

figure 8

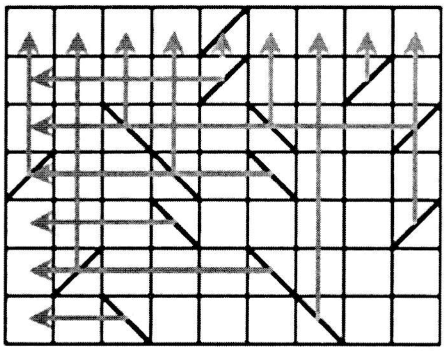
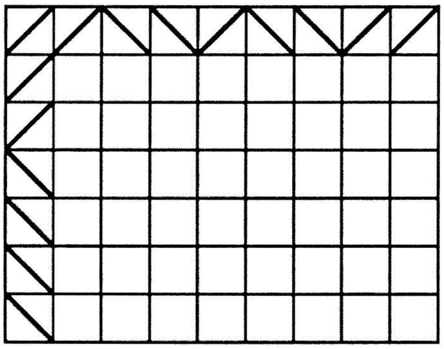


figure 9



Si nous n'avions pas réussi à former un L, nous aurions conclu que le treillis n'est pas rigide. [C'est une autre conjecture.]

3.2.3.— Contre-exemple : le treillis de la figure 10 infirme notre conjecture. En effet, il est flexible (il peut se déformer pour donner la figure 11) mais peut se ramener à un L (figures 12 et 13).

figure 10

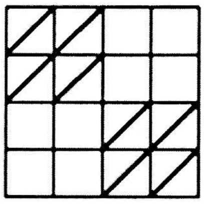


figure 11

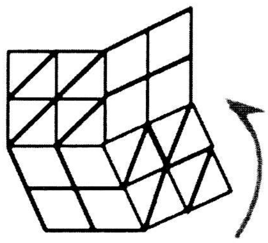


figure 12

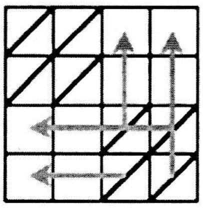
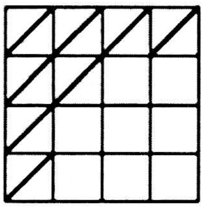


figure 13



Après une journée et demie de travail, nous avons abouti à une définition assez précise de la rigidité, à des démonstrations (comme le nombre suffisant de diagonales pour rigidifier un rectangle), à des conjectures (vérifiées ou infirmées), à des méthodes pour tester la rigidité d'un treillis. Mais nous n'avons pas, et de très loin, épuisé la question. Nous nous sommes demandé en particulier, sous quelles conditions on peut déplacer une diagonale sans changer la rigidité du trillis. De plus, le problème se complique encore plus si on travaille dans l'espace.

(texte des élèves synthétisé par Stéphane Fischler.)

Une belle brochette!

Sept élèves, quatre enseignants et deux chercheurs étaient à Poitiers pour présenter "MATh.en.JEANS". L'atelier (classique ; classique ?) était animé par Pierre Audin, enseignant, Pierre Duchet, chercheur, Stéphane Fischler, élève, Alain Huet, enseignant ; Pierre Duchet, chercheur, Charles Payan, chercheur, Annie Soismier, enseignante, René Veillet, enseignant, s'occupaient des recherches des élèves du salon Futuromath ; Marie-Claude Cellier s'occupait des visiteurs quand tout le monde était occupé ailleurs ; quand c'était possible, Pierre Audin et Alain Huet l'aidaient.

Reste à remercier ...

... Dominique Gaud d'avoir fait participer trois de ses élèves aux recherches qui devaient se tenir sur Futuromath ;

... et tous les organisateurs de l'APMEP de Poitiers d'avoir subi nos desiderata, notre improvisation avec tant de gentillesse.

Pourquoi tout ça ?

De faire "MATh.en.JEANS" nous a fait remettre en cause la plupart de nos pratiques pédagogiques. De pédagogique à démagogique, on pourrait croire qu'il n'y a qu'un pas, ce n'est pas le cas, même si de premier abord, dire ou écrire que nous apprenons beaucoup de nos élèves peut sembler de la plus pure démagogie, directement sortie de la cuisse de mai-juin 68. D'ailleurs "MATh.en.JEANS" a de fortes résonnances baba-cool ... On parle de nous, on prend même parfois position (pour ou contre) sans savoir précisément de quoi il s'agit. C'est juste pour ça que nous sommes venus, donner la possibilité à tous ceux qui le souhaitaient de savoir ce qu'est réellement "MATh.en.JEANS" : Méthode d'Apprentissage des THéories mathématiques en Jumelant des Etablissements pour une Approche Nouvelle du Savoir !

Quelle méthode ?

Si nous avons choisi "MATh.en.JEANS" comme sigle, c'est bien sûr parce que nous souhaitons dédramatiser l'enseignement des mathématiques. Mais notre uniforme n'est pas le jean, ce sont les maths.

Alors quelle méthode ? Nous transformons les élèves en chercheurs, de façon à mener une activité mathématique la plus complète possible, et qui ressemble le plus possible à ce que sont les mathématiques pour les mathématiciens actuels.

Oui, mais pour quels élèves ? Tous ceux qui veulent. Il ne suffit pas de mettre un violon dans les mains d'un enfant pour en faire un Yehudi Menuhin. Mais une certaine culture musicale en passe certainement par l'apprentissage d'un instrument. Nous ne voulons pas faire de nos élèves des médaillés Fields. Nous leur mettons les maths dans les mains. Et pour trouver du plaisir à apprendre la musique, il suffit peut-être de choisir les morceaux adaptés, et de ne faire de solfège qu'au fur et à mesure que les besoins s'en font sentir. Ce qui compte avant tout, c'est la formation de l'oreille.

Alors quelle méthode pour les maths ? et pour quels élèves ? Lisez la suite. Et dites-vous bien que les premiers partisans des classes de neige ne cherchaient pas à révéler des champions de ski, qui se révèlent de toutes façons. Nous pouvons fixer un objectif raisonnable, même s'il est ambitieux : que tous les élèves aient une formation à / par le recherche à un moment ou à un autre de leur scolarité obligatoire.

Afin de former des citoyens plutôt que des médaillés Fields. Afin que quand on leur soumette un problème (même plus tard, dans leur vie de citoyen) ils n'aient pas la réaction des collègues qui participaient à l'atelier, à qui nous avons soumis le même problème que celui sur lequel les élèves planchaient à Futuromath :

"les consignes ne sont pas claires !"

Quand vous allez voter, les consignes de vote ne concernent pas le fond du problème, seulement sa forme. Et si cela concerne le vote lui-même, alors ce n'est plus un vote mais un simulacre. Il ne peut pas y avoir de consignes, ni pour un mathématicien ni pour un citoyen.

Quels apprentissages ?

Des concepts, des méthodes, des savoirs, un savoir ... avec des sous-produits utiles ou nécessaires : tout ce qui concerne la communication moderne, mais avec du sens.

Quelles mathématiques ?

Des mathématiques actuelles. Dans le problème soumis à l'atelier (aux élèves comme aux collègues), où se trouve l'équation à résoudre ? quand utilise-t-on le théorème de Thalès, celui de Pythagore ? où apparaissent les vecteurs, les cercles circonscrits, l'intégration par parties, la loi binomiale ? y a-t-il des outils scolaires à utiliser ? oui, bien sûr, mais lesquels ? et suffisent-ils ?

Question 1 : qu'y a-t-il qui vienne du XX° siècle dans les programmes scolaires de la maternelle à la Terminale ?
Question 2 : que se passera-t-il en l'an 2001 ?
Question 3 : est-ce qu'un mathématicien peut se contenter d'un papier et d'un crayon à l'heure actuelle ?
Question 4 : est-ce qu'un mathématicien peut actuellement se permettre de travailler dans sa tour d'ivoire, à la lumière d'une chandelle, muni d'un parchemin et d'une plume d'oie ?

Réponses :

question 1 : vous savez, vous ? Il y a eu la théorie des ensembles, à la charnière des deux siècles, mais il n'y a plus ...
question 2 : on commence le 3ème millénaire le 1er janvier ... avec ou sans rien du XX° siècle ?
questions 3 et 4 : c'est la même réponse, on peut en trouver, mais comme les "bons indiens" du Général Sheridan, la plupart d'entre eux sont morts à l'heure actuelle.

Quels jumelages ?

Jumelage à trois :
— entre deux établissements et un chercheur (peu importe d'ailleurs qu'il soit estampillé mathématicien ou informaticien, chercheur ou enseignant-chercheur, combinatoricien ou géomètre, etc, etc).
— entre élèves, enseignants et chercheurs.
— entre travail personnel, travail en groupe ou en séminaire.
— entre documentation, conjecture et démonstration.
— entre hypothèse, affirmation et théorème.
— entre opinion, argument et preuve.
— etc, etc, etc.

Quels établissements ?

Deux établissements scolaires de même niveau. Jusqu'à présent, seuls des collèges et des lycées — du public — ont participé ; rien n'empêche a priori que les choses se fassent en lycée professionnel, en classes préparatoires, en université ; rien n'empêche que des établissements scolaires du secteur privé se lancent dans l'opération à leur tour. (**La seule condition** est d'avoir la même approche que nous : **aucune participation financière n'est demandée aux élèves)** ; la raison en a été depuis les débuts de "MATh.en.JEANS" que **l'enseignement est ... gratuit.** (?)]

Quel savoir ?

Voilà la vraie bonne question. Qu'est-ce que nous voulons enseigner à nos (?) élèves ? Et qu'est-ce qu'enseigner ?

Les temps changent. Il y eut les années '60. Il y eut l'euphorie des maths modernes. Il y eut l'examen d'entrée en sixième, le déclin du certificat d'étude, le prestige du baccalauréat. Il y eut la crise du pétrole ... il y a la crise depuis ... depuis quand déjà ? Il y a déjà presque 80% d'une classe d'age au niveau du baccalauréat (soyons clairs : en classe de Terminale). Il y a trois millions de chômeurs (ne seraient-ils pas six millions avec la définition années '60 de chômeur ?).

On peut choisir de prendre le point de vue deuxième millénaire et fin de civilisation et se lamenter sur le bon vieux temps. On peut préférer se tourner vers le troisième millénaire en de demandant de quoi aura besoin la nouvelle civilisation ?

On a commencé par avoir peur des ordinateurs (comme on avait eu peur du chemin de fer, de la TSF ou de la télé). Puis on a essayé de faire contre mauvaise fortune bon cœur. Il y a même des établissements où les profs de maths ont réussi à acheter une calculatrice ! Puis on a trouvé l'informatique magique et les profs de maths ont pu s'acheter des MO5 à pédales, pour les aider à faire des calculs (mais approchés) plus vite. On va bientôt se rendre compte que l'ordinateur et le mathématicien sont complémentaires, grace aux ordinateurs double disquette (le must !) que les profs de maths vont sauver des poubelles du secrétariat de l'établissement (qui travaille en réseau avec le Rectorat, et ne peut pas, lui, se contenter de matériel déjà vétuste.

Mais si l'ordinateur change évidemment la façon dont le mathématicien fait des mathématiques, c'est toujours le mathématicien qui fait des mathématiques. Et les coups publicitaires des Japonais sur la 153ème génération d'ordinateurs n'ont pas l'air d'y changer grand chose.

L'ordinateur ne fait pas de mathématiques tout seul. De même qu'un logiciel d'EAO ne peut pas remplacer un prof de maths. [Ne vous inquiétez pas, si c'était possible, vous le sauriez, vous seriez comme les autres en train de chercher du travail ... car les hommes qui nous gouvernent savent bien que la paye des enseignants comblerait facilement le trou de la sécu.]

Et Alors ?

La question "Démontrez que ..." est la question type pour un ordinateur. Le problème avec l'ordinateur, c'est que la seule question qu'il se pose vraiment c'est "quelle question pourrais-je bien me poser", et il répond en clignotant, le petit doigt sur la couture du pantalon. L'ordinateur n'est qu'un bœuf qui nous creuse très bien les sillons, mais il a encore besoin de nous pour les creuser. Quant au tracteur ... c'est pas demain la veille !

On ne peut pas tout changer d'un coup. On essaya avec les maths modernes, avec de l'argent, avec la naissance d'IREM qui avaient des moyens, avec des heures de décharges pour les profs de maths. Il ne s'agissait que de changer les contenus des programmes. Et ça a fait tchouffa.

Maintenant, il faut nous préparer à changer de métier, tout en restant des profs. Sans moyens supplémentaires. En asphyxiant chaque année un peu plus les IREM. En demandant sans cesse plus de travail et d'heures supp aux profs de maths.

Alors ? Alors ?

A l'impossible, nul n'est tenu. Mais on fait ce qu'on peut, comme on peut.

Nous, on apprend aux élèves à se servir de documents, à expérimenter — oui, oui, en mathématiques aussi — avec des ordinateurs, des barres de mécano, des balles de golf, des bouées, etc, etc. On leur apprend à travailler en équipe, à mettre en commun leurs réussites, leurs échecs, leurs questions, leurs envies, leurs délires. On leur apprend à communiquer entre eux, ou avec d'autres élèves, ou avec des adultes, enseignants ou chercheurs.

Ils découvrent que les mathématiques sont une forêt qu'un arbre leur cachait. Que la démonstration n'est qu'une étape, et qu'elle n'est pas un but mais un moyen. Qu'il n'y a pas de réponses, mais de nouvelles questions.

Alors ?

Si vous avez lu jusqu'ici, c'est sans doute que vous êtes plutôt d'accord avec moi. Si ce n'est pas le cas, ce n'est pas bien grave, cela prouve la diversité des mathématiques et surtout des profs de maths. Mais si c'est le cas, reconnaissez qu'il est bien difficile d'expliquer en long en large et en travers ce qu'on fait en même temps qu'on le fait. Alors : venez nous voir, lors de notre école d'été, lors d'un de nos congrès, lors d'un des stages que nous proposons dans les MAFPEN, lors d'un séminaire ou même d'une séance hebdomadaire. Contactez-nous, voire même rejoignez-nous : quand la situation est grave, ceux à qui on peut reprocher le plus, ce n'est pas tant à ceux qui font et se trompent peut-être, qu'à ceux qui font semblant de ne pas se rendre compte que la situation est grave. Et comme "MATh.en.JEANS" est de toutes façons un peu une auberge espagnole ... chacun en fait un peu ce qu'il veut. Il suffit d'en avoir envie. ❑

A bientôt ?

Association "MATh.en.JEANS"
Lycée Jean Jaurès
25 rue Charles Lecoq
95104 Argenteuil Cédex

Prix de la Démarche Scientifique (PERIF 90)
Prix d'Alembert 1992