Le concept de valeur absolue, une étude multidimensionnelle

Athanassios GAGATSIS - Ioannis THOMAIDIS. Thessalonique

Les auteurs sont du Département des Mathématiques de l'Université Aristote de Thessalonique, ville qui vient d'accueillir une exposition de Centre-Sciences.

Résumé

De façon caractéristique, le concept de la valeur absolue croise, sur les plans scolaires et scientifiques, les différents statuts d'un concept mathématique. D'où notre proposition d'une étude multidimentionnelle de cette notion: étude historique, étude de la transposition didactique de ce concept et étude expérimentale auprès d'élèves et étudiants grecs.

Cette dernière étude met en évidence un large éventail d'erreurs commises par les élèves-étudiants; ce qui interroge: «jusqu'à quel point ces erreurs sont-elles dues aux obstacles qui sont les éléments constitutifs du savoir mathématique et, par voie de conséquence, jusqu'à quel point proviennent-elles des interventions didactiques ?»

1. ETUDE HISTORIQUE

Pour saisir la nature des problèmes à partir desquels se forma le concept de valeur absolue et se précisèrent ses fonctionnements, nous avons eu recours à un grand nombre de textes historiques, dont l'étude nous permit de jalonner quatre principales phases d'évolution (Gagatsis et Thomaïdis, à paraître).

Dans la **première** phase, la valeur absolue apparaît comme une notion implicite, strictement liée à une conception du nombre relatif en tant que nombre commun muni d'un signe. Cette conception, pour un nombre positif ou négatif, a fonctionné de manière efficace et pendant longtemps comme outil de résolution de problèmes arithmétiques et algèbriques; par exemple pour construire des tables logarithmiques (Napier) ou pour élaborer une théorie générale des équations polynomiales (Descartes, Newton). Parallèlement cette même conception a ouvert un champ théorique dans l'étude des nombres relatifs autorisant la libre transposition de modèles exo-mathématiques, comme le «gagner» et le «perdre» (Euler). Dans les textes de cette période, nous avons pu reconnaître le concept de la valeur absolue en tant que concept du «nombre sans son signe», ou de la «distance à partir de zéro sur la droite arithmétique». Mais rien ne semblait alors imposer, pour ce concept, une étude spécifique et son utilisation particulière.

Dans la **seconde** phase d'évolution, la valeur absolue assure une fonction explicative dans le contexte du calcul algébrique, et notamment au niveau de l'algèbre des inéquations. Plurielles sont ses applications dans la résolution des équations du calcul approché (calcul d'erreurs) et dans la théorie des nombres (Lagrange, Gauss). Les termes «pris positivement» ou «abstraction faite des signes» sont utilisés comme substituts du concept de la valeur absolue, pour rendre le sens exact de certaines transformations sous forme d'inéquation.

La **troisième** phase d'évolution du concept de la valeur absolue est étroitement liée au changement conceptuel fondamental relatif au concept de nombre; c'est-à-dire au passage progressif qui va de la compréhension empirique du nombre en tant que moyen pour mesurer des quantités, jusqu'au concept abstrait du nombre en tant qu'élément d'un système mathématique caractérisé par les propriétés fondamentales de ses éléments et par l'absence de contradiction. Les nombres négatifs et positifs acquièrent un sens autonome et se distinguent, en arithmétique, du nombre commun muni d'un signe. La valeur absolue commence ainsi à se donner comme un concept spécifique, défini pour chaque nombre positif et négatif tandis que, parallèlement, est affirmée sa relation avec le concept de la mesure d'un nombre complexe, introduit durant la même période (Argan, Cauchy). Il est utilisé de façon systématique dans les différentes applications de l'algèbre des inéquations, et notamment dans les techniques d'»epsilon» proposées par Cauchy en 1821 au niveau de l'analyse. Cauchy s'en servit comme d'un objet mathématique ordinaire, pouvant être soumis aux transformations analytiques; mais, dans les démonstrations des théorèmes sur la convergence de séries, il utilise d'une manière indirecte tous les concepts fondamentaux qui constitueront la théorie contemporaine de la valeur absolue. A ce stade, ne manquent encore qu'un symbolisme simple et la formalisation des propriétés du concept au moyen de ce symbolisme.

La **quatrième** et dernière phase d'évolution correspond très précisément à ce processus vers la formalisation, vivement nécessitée par l'évolution de l'analyse complexe. Cependant le symbole actuel, qu'a introduit Weierstrass en 1841 pour exprimer les mesures d'une variable complexe et certains concepts topologiques, ne sera communément accepté qu'à partir du dernier quart du XIX° siècle. Après 1850, il y eut au moins six différents symbolismes pour exprimer la valeur absolue, ce qui n'a pas été sans provoquer certaines difficultés de communication. La formalisation des propriétés de la valeur absolue et sa compréhension comme fonction de R dans R+ ont joué un rôle conséquent pour certaines des grandes généralisations du début du XX° siècle, comme le concept de la distance dans la théorie des espaces métriques et le concept de l'estimation dans la théorie des corps.

2. ETUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

Le concept de valeur absolue apparaît dans les manuels scolaires de l'enseignement secondaire dès la fin du XIX° siècle; mais pendant de longues décennies, son rôle se limite principalement à formuler des opérations sur les nombres positifs et négatifs. Ces derniers, dans les manuels d'alors, sont définis de façon traditionnelle, en tant que nombres communs de l'arithmétique munis d'un signe. La grande différence entre l'enseignement actuel de la valeur absolue et son enseignement au début du XX° siècle, consiste en la complète absence, alors, d'exercices sur des équations et inéquations avec valeur absolue. Pour voir apparaître de tels exercices, il faut attendre les problèmes que posèrent les journaux mathématiques et les concours mathématiques (Olympiades) du début des années 1940. Issus vraisemblablement de la géométrie analytique, où les équations et les inéquations avec valeur absolue étaient utilisées pour exprimer de façon compacte différents ensembles de points du plan, ces problèmes ont ajouté, aux exercices traditionnels de résolution des équations et inéquations, de nouvelles activités mathématiques comme la «distinction des cas» et le «contrôle de résolution». En Grèce, les exercices avec valeur absolue ont très vite été incorporés aux manuels scolaires par le biais des concours d'accès à l'université. Les concepteurs des examens visaient, avec ces exercices à la fois difficiles et originaux, à maintenir un haut niveau chez les candidats, notamment pour ceux qui préparaient l'Ecole Polytechnique. Ils créèrent ainsi une tradition qui a perduré jusqu'à la fin des années 1970.

Dans les livres d'algèbre, dès le début des années 1950 fut introduit un chapitre sur la théorie de la valeur absolue où était proposé un grand nombre d'exercices hétérogènes, convoquant différents domaines des mathématiques, élémentaires ou non. Il existait en outre force monographies portant exclusivement sur les valeurs absolues et indiquant des méthodes pour résoudre les exercices (on peut lister au moins onze ouvrages entre 1954-1978). Ainsi l'enseignement de la valeur absolue se faisait comme en vase clos: son objectif était la résolution de certains exercices spécifiques et non l'utilisation de la valeur absolue comme moyen qui aurait facilité l'approche d'autres sujets tels que la théorie des limites (elle n'a commencé à être enseignée dans les écoles grecques qu'en 1970). Ce fonctionnement a eu pour résultat la création d'un très vaste corpus d'exercices et d'une longue liste de règles méthodologiques pour les résoudre, ce qui correspond à une «théorie scolaire» parallèle à la «théorie scientifique» de la valeur absolue. L'exemple extrême de cette situation, c'est sans doute cet ouvrage d'algèbre publié en 1979, où toute cette «théorie» se trouve développée sur onze chapitres, chacun portant un titre particulier.

Ce que nous venons de mentionner, et qui pendant plusieurs années concernait principalement la préparation des candidats à l'université, a été incoporé dans le programme officiel, et donc le manuel d'algèbre contint un large chapitre sur les valeurs absolues, ce qui a entraîné la publication de nombreux nouveaux ouvrages sur la question. Et, outre le concours d'accès à l'Ecole Polytechnique, un grand nombre d'examens et concours ont utilisé des exercices avec valeur absolue. Cette situation s'est poursuivie jusqu'en 1980, année où apparut un nouveau programme scolaire, ainsi que des modifications dans le système des examens; l'importance du concept de valeur absolue s'en est trouvé considérablement réduite en tant qu'objet de l'enseignement secondaire.

Cependant les enseignants actuels de Mathématiques, influencés probablement par la période où eux-mêmes étaient élèves ou candidats à l'université, continuent, aujourd'hui encore, à insister fortement sur les valeurs absolues et les exercices qui y ont trait. C'est ce que montre clairement d'une part les publications récentes et l'étude des sujets d'examen de l'enseignement secondaire, et d'autre part le recueil et l'analyse des conceptions des enseignants sur ce sujet. Insistons enfin sur le fait que cette évolution ne décrit que la situation en Grèce; il s'agit d'un cas singulier en comparaison à d'autres pays.

3. INTERPRETATION DES ERREURS

Les recherches publiées à propos des erreurs commises par les élèves sur des exercices portant sur la valeur absolue insistent sur les obstacles épistémologiques et en particulier sur les obstacles cognitifs au niveau de la compréhension de ce concept. Elles examinent non seulement la compréhension de la définition formelle de la valeur absolue, mais aussi son mode d'utilisation dans des situations telles que la résolution d'équations avec valeur absolue. Par exemple, Duroux (Duroux, 1983) propose d'interpréter ces erreurs sur la base de l'hypothèse qu'elles sont dues aux conceptions-obstacles par rapport à un nombre relatif. Chiarugi et al. (Chiarugi, 1990) affirment que ces fautes proviennent d'obstacles provoqués par des représentations erronées et des malentendus quant aux concepts algébriques fondamentaux, comme la variable et la fonction.

Notre propre recherche a mis en évidence des erreurs comparables, et ce dans les trois niveaux de l'éducation scolaire grecque : dans l'enseignement secondaire, dans l'enseignement supérieur non mathématique et dans l'enseignement supérieur en mathématiques. Sur la base de l'étude historique et didactique présentée dans les paragraphes précédents, nous proposons d'interpréter les fautes des élèves en terme d'obstacles.

Le **premier obstacle**, qui est lié à l'existence même de la valeur absolue, concerne la conception du nombre comme moyen pour mesurer des quantités. Cette conception constitue un obstacle pour la notion du nombre relatif en général, et plus particulièrement pour l'ordre des nombres sur la droite réelle. L'étude historique nous a clairement montré que cette conception rend caduque une notion particulière de la valeur absolue puisque la fonction de cette dernière s'exerce de manière implicite mais effective par le nombre arithmétique qui produit un nombre positif ou négatif (Napier, Descartes, Newton). Comme dans l'histoire, cet obstacle se manifeste avec les erreurs qui concernent la manipulation de variables algébriques dans les inéquations; par exemple dans l'inéquation $x^2 > 9$ les élèves donnent comme réponses: $x > 3$ ou $x > \pm 3$.

Le dépassement de la conception quantitative du nombre est lié à l'apparition d'une notion primitive de la valeur absolue qui, historiquement, a été exprimée par «abstraction faite du signe». Mais en même temps cette attention portée au signe constitue un **deuxième obstacle**, lié d'une part à la reconnaissance de la valeur absolue comme notion indépendante et d'autre part au besoin de sa représentation. Comme l'étude de la transposition didactique l'a mis en évidence, la définition et le symbolisme dans ce stade primitif servent à une nécessité interne de l'enseignement, en particulier l'architecture en spirale du programme, et non aux situations dans lesquelles l'utilisation de la valeur absolue est nécessaire. La conception selon laquelle la valeur absolue est «le nombre sans son signe» apparaît souvent plus tard dans les textes des étudiants et se manifeste par des erreurs du type $|-x| = x$ ou avec la suppression du symbole de la valeur absolue.

Le dépassement de la conception de «abstraction faite de signes» correspond aux premières tentatives pour l'expression analytique de ce concept et l'intervention d'un symbolisme particulier. Ici apparaît un **troisième obstacle** qui concerne la notion de fonction et plus particulièrement l'identification de cette dernière à un type algébrique. Cet obstacle de «type algébrique», ou plus généralement «procedural rule», semble être à l'origine de certains malentendus concernant le concept de fonction, comme plusieurs recherches récentes l'ont montré. «Les étudiants initialement voient les fonctions comme des procédures, comme si elles disaient ce qu'on devait faire avec x» (Dreyfus et al., 1990, in Gagatsis A., Thomaïdis I., 1991). Dans le cas de la définition formelle de la valeur absolue comme fonction, cet obstacle se manifeste par des erreurs du type $|x| = \pm x$. Dépasser cet obstacle devient donc nécessaire pour acquérir la définition formelle de valeur absolue.

Le **quatrième obstacle** est lié à cette conception que la valeur absolue est un symbole «qui doit être supprimé». En effet, comme l'étude de transposition didactique l'a montré, il n'y a pas de liaison entre le traitement de ce concept et les conceptions qui, historiquement, ont justifié sa construction et son utilisation. A leur place apparaissent des exercices et des problèmes créés sur des critères didactiques, comme les équations et inéquations avec valeur absolue. Une caractéristique fondamentale de ces exercices est que leur résolution est a priori liée à la suppression du symbole de valeur absolue. L'enseignement est ainsi conduit à une contradiction évidente: en essayant d'enseigner un concept mathématique à un niveau d'abstraction élevé, il introduit des situations-problèmes où ce concept non seulement va ne pas être utilisé, mais constitue un obstacle à supprimer pour parvenir à une solution. Cette contradiction devient l'un des traits permanents de l'enseignement quand les enseignants - et c'est la situation en Grèce - accordent une grande importance à la valeur absolue et au traitement algorithmique des exercices. Ce traitement algorithmique caractérise les étudiants en mathématiques qui, appliquant impeccablement la procédure de suppression du symbole de la valeur absolue par une équation, parviennent à des solutions arithmétiques calculées mais ne satisfaisant pas toujours aux conditions initiales posées par la suppression du symbole de la valeur absolue. Leur tendance à aborder de manière algorithmique ces exercices a pour conséquence que 29 % d'entre eux seulement déclarent rationnellement que l'équation $||x-2|-7| = -3$ est impossible.

Le comportement donc des étudiants (et des élèves) grecs face aux exercices avec valeur absolue possède tous les traits d'une obéissance mécanique aux règles d'un contrat didactique (qui, ici, reflète cette injonction: «dehors le symbole de valeur absolue !»), notion introduite par Guy Brousseau (Brousseau, 1984). La seule issue, à terme, paraît être la rupture de ce contrat, c'est-à-dire la création de nouvelles situations didactiques où la valeur absolue va acquérir son sens réel et sa fonction propre.

Références

BROUSSEAU G. (1984), «Le Rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques», 3ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Orléans.

CHIARUGI I., Fracassina, G., FURINGHETTI F. (1990), «Learning difficulties behind the notion of absolute value», in G. Booker, P. Cobb and T.N. De Mendicutti (eds), Proccedings of the P.M.E., 14, 3, Oaxtepec, Mexico.

DUROUX A. (1983), «La valeur absolue». Difficultés majeures pour une notion mineure». Petit x, n° 3, pp. 43-67.

GAGATSIS A., THOMAIDIS I. (1991) Erreurs faites par de futurs enseignants en Mathématiques sur des exercices scolaires sur la valeur absolue, Educational Revue, 14/15, pp. 87-106 (en grec).

GAGATSIS A., THOMAIDIS I., A study on the historical evolution and didactical transposition of the concept of absolute value (soumis à publication).