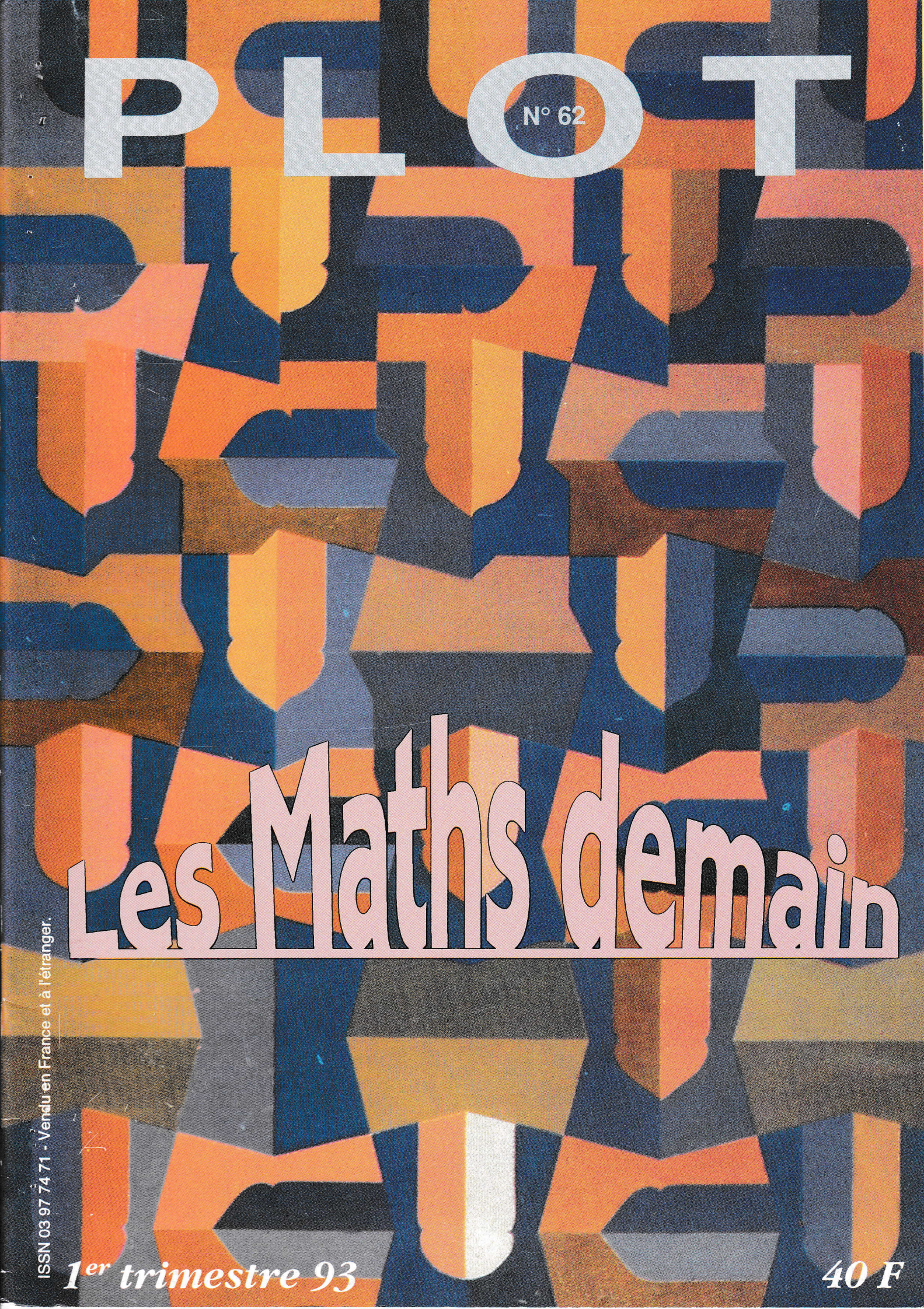




PLOT

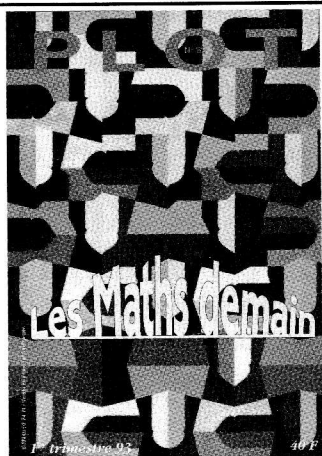
N° 62

Les Maths demain

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger.

1^{er} trimestre 93

40 F



Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction

Jacques Borowczyk,
Daniel Boutté, Gérard Chauvat,
Jacqueline Collet, Roger Crépin,
Luce Dossat, René Gauthier,
Georges le Nezet, Ginette Mison,
Serge Parpay, Raymond Torrent,
Michel Mirault, René Métregiste.

Rédaction

Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat

Madeleine Schlienger

Ventes

Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité

Pascal Monsellier

Abonnements

PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement

120 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 100 F.
Abonnement étranger : 120 F.

**Photocomposition
et maquette**

i.c.e.

Photogravure et impression

Fabrègue - Limoges

Commission paritaire

63181 - ISSN 0397-7471

Editeur

Associations régionales
de l'APMEP de Poitiers,
Limoges, Orléans-Tours,
Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse
Brest, Caen, Clermont-Ferrand et
La Réunion

Diffusion

Adecum (Association pour le
développement de l'enseignement
et de la culture mathématique).
Publié avec le concours
du Centre National des Lettres et
du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

Les maths demain

Les mathématiques dans 20 ans <i>J.F. Méla, Paris</i>	2
Fractals et dimension <i>Traduction G. Borion, Poitiers</i>	11
Les mathématiques et leurs interactions <i>Rapport CNRS</i>	14
De nouvelles surfaces minimales <i>J.P. Bourguignon, Palaiseau</i>	21
Calcul sur un ordinateur vert <i>E. Urlacher</i>	27
Simulations, Simulation <i>M. Glaymann, Lyon</i>	30
Mathematik ohne Grenzen <i>R. Jost, Strasbourg</i>	34
Le serpent hamiltonien <i>R. Domain, Chateauroux</i>	37
Le labyrinthe fabuleux <i>C. Frattini, Le Canet</i>	39
La moyenne, ça m'angoisse !.. <i>J. Lubczanski, Cachan</i>	41
Diagonales <i>revue du Centre Vaudois</i>	43
Le salon du livre ... de Maths	46

EDITORIAL

Ce numéro est ... exceptionnel!

⇒ **Exceptionnel** parce que c'est le premier numéro de l'année 93 et qu'il n'y en aura pas d'autres ... si vous ne vous réabonnez pas !!

⇒ **Exceptionnel** parce qu'il contient des articles inédits sur l'état des mathématiques aujourd'hui et ... demain !!

⇒ **Exceptionnel** parce qu'il annonce 3 autres numéros exceptionnels :

→ le prochain sera le fruit d'une longue collaboration entre l'Ouvert et Plot qui débouchera sur les comptes-rendus des journées de Strasbourg;

→ le suivant fera le tour des nouvelles approches de l'évaluation des savoirs de vos élèves;

→ celui de fin d'année fera le tour de ... l'infini !! ∞ !!

Alors, qu'en pensez-vous ?

Exceptionnel n'est-ce pas !

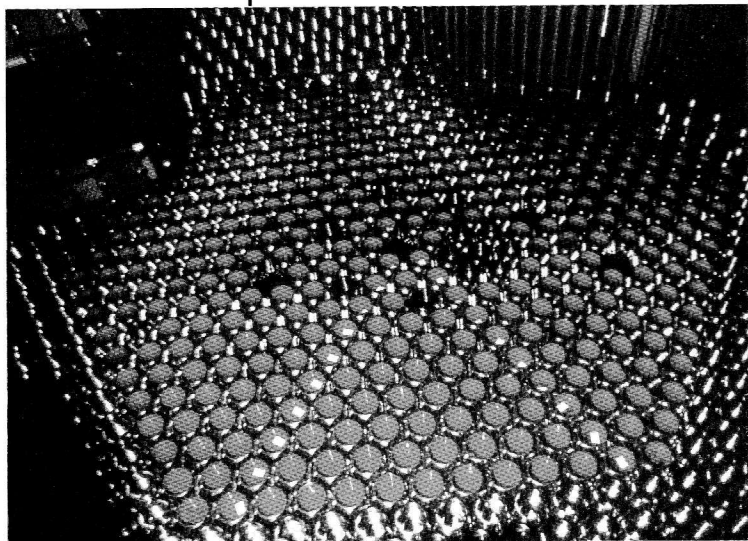
Surtout si vous pensez à vous réabonner !

Quelles mathématiques dans 20 ans ?

Jean-François MELA - Paris

Ce texte est tiré d'une conférence que Jean-François Méla, nouveau président de l'Université de Paris-Nord, a donnée à Marseille en 1992 à la demande de Marcel Benaroche, directeur du CCSTI de Provence-Côte d'Azur.

Les structures métalliques du cœur d'un réacteur à neutrons rapides sont soumises à des conditions de service particulièrement sévères.



J'avoue qu'il faut avoir un certain culot pour faire de la prospective à l'époque actuelle, même en mathématiques. C'est peut-être pour cela que j'ai accepté !

Tout le monde sait bien que la prospective a des grandes chances de se tromper. Mais c'est finalement assez rassurant parce qu'on a l'impression de s'accaparer un petit peu du futur alors qu'il peut nous réserver des surprises.

Quand on regarde cette liste, on s'aperçoit qu'il n'a pas évité l'écueil que je signalais : les choses les plus surprenantes, il ne les a pas devinées.

En particulier vers 1923 les physiciens ont inventé la **mécanique quantique**. L'outil mathématique principal de la mécanique quantique, c'est l'étude des opérateurs dans ce qu'on appelle aujourd'hui les "espaces de Hilbert". Or dans son programme, lorsqu'il parle de physique mathématique, il ne signale absolument rien sur les opérateurs, sur l'analyse fonctionnelle...

On ne peut pas lui faire grief de ne pas avoir deviné la mécanique quantique ; c'est un exemple d'écueil qu'on ne peut guère éviter.

Par ailleurs, dans la liste des grands problèmes qu'il signale, on trouve nombre de problèmes qui ont effectivement accaparé les mathématiciens tout au long du 20ème siècle. D'autre part il a bien senti par exemple une des tendances lourdes de ce siècle : essayer de faire reposer les mathématiques sur des bases solides.

Les problèmes de Hilbert

Est-ce que la prospective a de plus grandes chances de succès dans le domaine de l'histoire ou de la société ? Ce n'est pas la première fois que les gens se posent la question de dessiner les tendances du futur en sciences, et en particulier en mathématiques.

Au début de ce siècle, Hilbert, le plus grand mathématicien de son temps avec Poincaré, avait proposé, à l'occasion du colloque international des mathématiciens qui s'était tenu à Paris en 1900, une liste de quelques dizaines de problèmes qui d'après lui devraient être les problèmes majeurs des mathématiques du 20ème siècle.

Les grands problèmes

Je crois que cela garde quand même un sens de discuter aujourd'hui des grandes tendances des mathématiques et de chercher à distinguer celles qu'on peut extrapoler dans le futur. D'autant plus qu'elles ne sont peut-être pas connues de tout le monde.

Il y a d'abord des tendances qui traversent l'histoire, c'est ce qu'on appelle les "grands problèmes".

Certains ont été posés il y a très longtemps, d'autres plus récemment. Au départ ce sont des questions "naturelles" qui concernent l'arithmétique, la

géométrie élémentaire ou la physique, spécialement la mécanique.

Il y a de très vieux problèmes sur les nombres entiers, sur les nombres premiers, sur la résolution d'équations en nombres entiers, comme la fameuse conjecture que l'on appelle **le théorème de Fermat**.

Il y a des problèmes plus récents comme **le problème des "n corps"** dont je parlerai un peu plus loin. On peut se demander pourquoi ces questions plutôt que d'autres constituent les "grands problèmes".

Par exemple le problème de Fermat : la question est de savoir si, lorsque $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ peut avoir des solutions de nombres entiers non nuls x, y, z . Pourquoi est-ce un problème important. J'avoue que quelqu'un qui débarque là-dedans se dit : oui pourquoi pas ? mais pourquoi pas un autre problème ?

Et de fait on s'aperçoit que pendant tout le 19^{ème} siècle, par exemple, ce problème était classé dans les mathématiques amusantes. C'est à dire qu'il n'était pas considéré comme un problème vraiment sérieux. Il a recommencé à être un problème sérieux le jour où l'on a introduit, à son propos des outils algébriques nouveaux, révolutionnaires, comme les "idéaux" ou les "groupes attachés à une courbe algébrique".

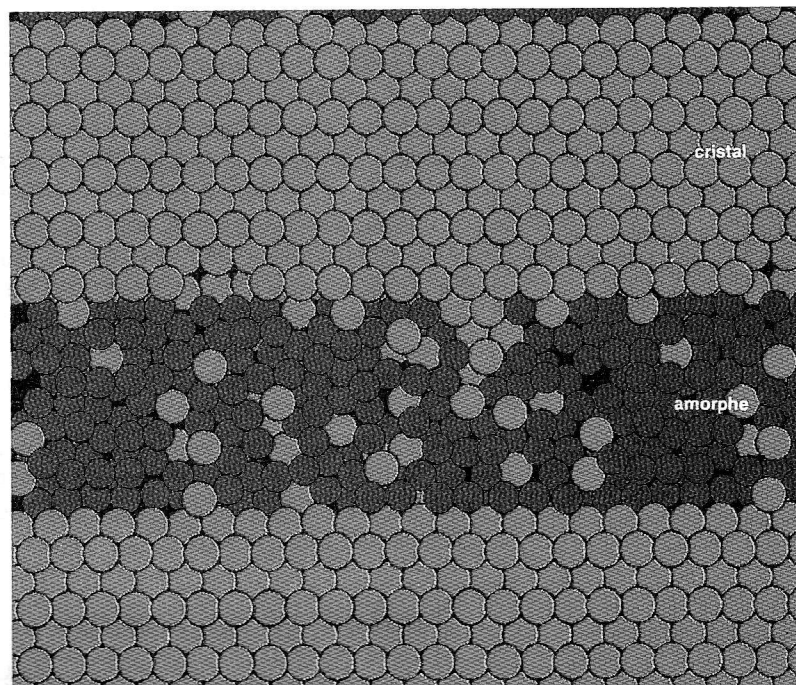
Ce problème c'est ainsi, à nouveau, retrouvé au cœur de tout un développement.

Qu'est-ce qu'un grand problème ?

Ce qui fait l'importance d'un grand problème, c'est surtout sa fécondité, c'est à dire sa capacité à susciter pour sa résolution, le développement de théories profondes qui vont aller féconder une grande partie des mathématiques.

La plupart des problèmes sont, au départ, des problèmes gratuits. Par exemple il y a un grand problème qu'on a vu ressortir périodiquement dans l'histoire : **le problème isopérimétrique**.

Il s'agit de savoir, parmi toutes les courbes fermées ayant le même périmètre,



mètre, enferme le domaine d'aire maximale.

Bien sûr, intuitivement on pense au cercle. Les Grecs devaient déjà avoir le sentiment que c'était le cercle. Du point de vue des applications, la réponse à ce problème n'apporte rien de nouveau.

Mais la question était plutôt comment le démontrer ? C'est un problème purement gratuit, trouver une démonstration d'un fait qui paraît assez intuitif.

Ce problème est réapparu dans l'histoire sous des formes diverses, on s'est aperçu que finalement c'était le même problème que le "principe de moindre action" de Maupertuis, ou que le "principe de Dirichlet",....

Bien souvent, un objet mathématique remarquable a souvent une signification physique remarquable, ici "l'énergie minimale".

L'approfondissement de ce problème isopérimétrique a conduit à ce qu'on appelle le "calcul des variations" et à d'autres développements extrêmement profonds en géométrie, qui ont permis justement d'englober dans une même théorie tout ce dont je viens de parler.

Le problème des n corps

Ces grands problèmes, il faut s'attendre à les voir continuer à traverser l'histoire, à se transmuter et à prendre des formes diverses. Beaucoup de grands problèmes ont une vie très longue. On

Empilement d'atomes simulé par ordinateur dans un matériau contenant des couches alternées de titane cristallin et d'alliage fer-titane amorphe. Le titane est représenté en plus clair que le fer. Deux états de la matière séparés par une interface sont visibles.

voit arriver de nouveaux grands problèmes, comme par exemple le "problème des n corps". C'est, par exemple, la question de savoir si le système solaire est stable. On connaît parfaitement les lois newtoniennes qui régissent les mouvements des planètes, mais on ne sait pas démontrer qu'à un instant donné très lointain, une planète ne va pas partir à l'infini ou deux planètes entrer en collision. On a aujourd'hui toutes les raisons de penser que ceci ne se produira pas dans la durée de vie du système. Mais il est tout à fait fascinant pour l'esprit humain de ne pas savoir si le système dans lequel il vit est stable.

2 corps, ça va, 3 corps ...



Aile de tangage.
Tourbillon de bord de fuite.
(Cliché A. Morand, CNRS-IMST)

Plus généralement résoudre le problème des " n corps" c'est décrire de façon qualitative le mouvement de n corps lorsque n est plus grand que 2.

On sait le faire avec précision

lorsqu'il n'y en a que deux mais, dès qu'il y en a trois, on n'est plus capable de dire ce qui va se passer.

On sait faire des calculs approchés valable dans un laps de temps limité mais on ne sait pas décrire ce qu'il va se passer d'ici à la fin des temps.

Des programmes mobilisateurs

Les grands problèmes fonctionnent comme de grands programmes mobilisateurs autour desquels se rassemblent des générations de mathématiciens parmi les plus talentueux. Au bout d'un certain temps, il n'est plus possible d'aborder ces problèmes d'un point de vue naïf.

Tous les jours il y a des gens qui essaient de démontrer le théorème de Fermat avec des moyens élémentaires ; mais ils sont un peu dans la position du forgeron de village qui entreprendrait de

construire le Concorde. En face d'eux ils ont une "industrie lourde" considérablement développée qui a déjà essayé toutes les approches de solution !

Les grandes tendances du XXème siècle

Pour décrire les mathématiques dans 20 ans, il faut d'abord s'attacher aux tendances qui ont traversé le 20ème siècle.

Il y en a une qui était déjà affirmée dans le programme de Hilbert, et qui ne s'est pas démentie, c'était l'ambition de poser les mathématiques sur des bases solides.

Il y a eu vers la fin du 19ème siècle des débats passionnés sur le statut des objets mathématiques. Et une question était de s'avoir si l'on pouvait espérer fonder les mathématiques de façon logiquement correcte.

Mais il y avait aussi l'ambition de leur donner une certaine unité et de distinguer, au travers de la multiplicité des théories, qu'elles étaient les grandes structures qui intervenaient et que l'on retrouvait partout.

Cela a donné un programme unificateur qui a beaucoup occupé les gens au milieu du siècle et auquel est associé le nom de **Bourbaki**. Mais Bourbaki est seulement un aspect de cette tentative.

Ce programme, il faut bien le dire, a été couronné de succès.

Il faut le dire parce qu'il y a un petit mal entendu à ce sujet. En effet ce programme qui aboutit à présenter les mathématiques de façon beaucoup plus formalisée qu'avant, a été surtout perçu dans le public par son avatar dans l'enseignement : "les maths modernes". Des gens bien intentionnés se sont dit, puisque ça marche si bien, il faut tout de suite le mettre en œuvre dans les programmes scolaires.

Cela a conduit à une espèce de "Bérézina pédagogique". Mais si l'on peut être extrêmement critique sur la pédagogie qui en a résulté, par contre l'ambition "bourbakiste" qui a réussi à donner aux mathématiques l'unité extraordinaire qu'elles ont aujourd'hui, est une réussite complète.

De nos jours toutes les branches des mathématiques parlent le même langage et cela donne une efficacité considérable à la discipline.

On est aujourd'hui capable de transporter des méthodes d'un domaine dans un autre qui n'a rien à voir, tout simplement parce qu'il y a un langage unique et que l'on a réussi à dégager le petit nombre de structures qui sous-tendent chaque théorie.

Cette période est aujourd'hui achevée, mais on en récolte les fruits. Cela se traduit dans beaucoup de domaines par des résultats assez surprenants et enthousiasmants.

Maintenant que ce travail est fini, les chercheurs s'intéressent de nouveau au rapport des mathématiques avec les autres sciences, qui avait été un peu l'axe central du progrès des mathématiques au 19ème siècle.

Mathématiques et physique

Si on prend le cas de la physique, il s'y passe aujourd'hui des choses extraordinaires. Il est en train de s'établir, depuis quinze-vingt ans, entre les mathématiques et la physique théorique, la plus mathématisée, une interaction tout à fait surprenante qui laisse rêveur.

On peut se demander pourquoi il a fallu attendre ces vingt dernières années pour voir s'établir une telle interaction.

La mécanique quantique a marqué de ce point de vue, une date importante.

C'était la première fois que les concepts mathématiques intervenant dans la modélisation du réel étaient aussi éloignés de l'intuition et que la théorie physique était aussi indissociable

de la théorie mathématique.

Une particule c'est une représentation de groupe, la gravité en théorie de la relativité c'est une propriété géométrique de l'espace temps... Il est normal que la physique et les mathématiques se développent un peu parallèlement, mais il faut croire que les physiciens et les mathématiciens ne se sont pas compris pendant très longtemps.

C'est assez étonnant qu'ils se comprennent beaucoup mieux, en tout cas dans une certaine frange, aujourd'hui que les mathématiques sont devenues beaucoup plus formalisées et abstraites.

Mathématiciens et physiciens se retrouvent en particulier dans ce qui s'appelle la théorie quantique des champs, qui

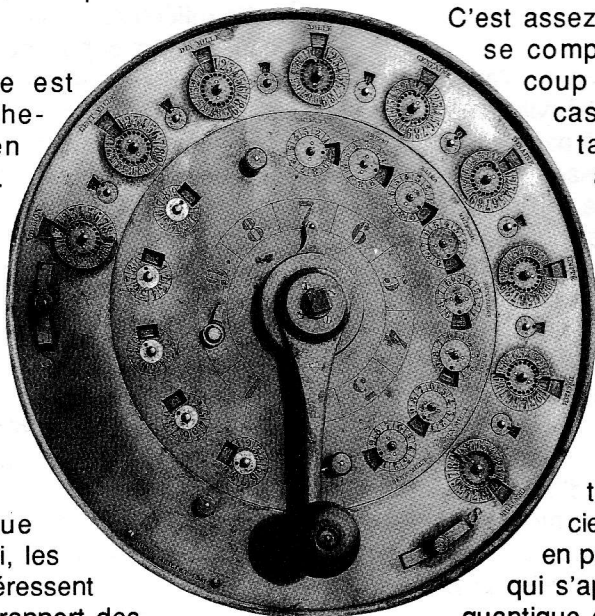
est une sorte de tentative d'unification des différentes forces qui régissent l'univers, de la mécanique quantique, de la relativité...

Cette théorie quantique des champs est à l'heure actuelle un "chaudron de sorcière" qui bouillonne et dans lequel se retrouvent l'élite de la géométrie moderne, plus un certain nombre de physiciens de haut vol.

S'y télescopent énormément de parties des mathématiques : l'analyse fonctionnelle, la géométrie, la théorie des groupes, les probabilités... Les mathématiciens qui travaillent sur ce sujet arrivent à concilier le langage "bourbakiste", un langage abstrait et formalisé, avec une intuition physique profonde.

On voit notamment une chose à laquelle on n'aurait jamais pensé auparavant : des résultats de mathématiques démontrés par le biais de la physique.

Par exemple, en regardant de près les équations de **Yang-Mills**, qui sont en relativité générale, l'analogue des équations



De tout temps, l'homme a imaginé des mécanismes pour faciliter la pratique du calcul. Ici, la machine de Roth, conçue en 1984. Boyer-Viollet

tions de Maxwell, en regardant certaines solutions de ces équations, on est arrivé à démontrer qu'il existait un espace de dimension 4 qui avait des propriétés tout à fait faramineuses, qui n'avaient rien à voir avec l'espace de dimension 3, même avec une dimension de plus.

Et il n'y a que dans un espace de dimension 4 que cela peut se produire. Cela fait l'objet d'une médaille Fields, l'équivalent d'un prix Nobel pour les mathématiques.

Récemment encore, l'année dernière, un physicien mathématicien assez génial, **Witten**, a réussi à partir de l'intuition physique, à trouver sans démonstration des propriétés tout à fait remarquables en géométrie, en topologie. Nous vivons une époque formidable, on peut avoir la médaille Fields, la plus haute distinction mathématique, sans rien démontrer, "simplement" en devinant des théorèmes (qui se formulent de façon Bourbakiste) en s'aidant de l'intuition physique.

On peut aujourd'hui avoir des mathématiques extrêmement formalisées et qui en même temps prétendent être de plein pied avec l'intuition physique.

C'est, je pense, une révolution qui va se poursuivre et qui sera quelque chose de très important. C'est une des retombées positives de l'évolution "Bourbakiste" au 20ème siècle.

La crise des fondements

Il faut dire un mot de l'ambition proprement logique du début du siècle. La question était d'essayer de formuler les mathématiques comme système formel cohérent. C'était un des problèmes de Hilbert : donner un fondement rigoureux à l'arithmétique.

D'un certain point de vue cela s'est réalisé : il s'est dégagé un système d'axiomes (avec des variantes) qu'on appelle aujourd'hui le système d'axiomes Zermelo-Frankel, dans lequel les mathématiques trouvent une cohérence logique complète.

A ceci près que dans l'esprit d'Hilbert, une fois ce travail fait, on devait pouvoir se convaincre que les mathématiques ne pouvaient pas receler de contradictions.

Or ce travail de formalisation a bien été fait, mais on a démontré par la même occasion qu'il était impossible de démontrer que les mathématiques sont non contradictoires.

Tout simplement en formalisant un petit peu le paradoxe du menteur. Si je vous dis «je suis un menteur, je dis tout le temps des mensonges», par quel raisonnement, allez-vous savoir si je mens ou si je dis la vérité ?

En réfléchissant un instant vous verrez que, si vous supposez que je suis menteur ou si vous supposez que je ne suis pas menteur, vous arrivez dans les deux cas à une contradiction.

C'est en formalisant un peu ce type d'argumentation, que Gödel, en 1920, a montré que cet espoir de démontrer la non-contradiction des mathématiques était une illusion.

Il a démontré par la même occasion qu'il existait dans le système formel qu'on venait de bâtir, des propositions indécidables, c'est à dire pour lesquelles il n'existe aucune démonstration permettant d'affirmer qu'elles sont vraies, et aucune démonstration permettant d'affirmer qu'elles sont fausses.

Ce résultat extrêmement important n'a pas révolutionné complètement la pratique mathématique. Un mathématicien ordinaire, une fois dans sa vie, met le nez dans ces choses là, et puis s'empresse un peu d'oublier les axiomes de Zermelo-Frankel.

Il est content que cela existe, content de savoir que les mathématiques sont un système formel cohérent.

Jusqu'à ces dernières années, on ne s'intéressait pas beaucoup, sauf si on était un logicien, à l'existence de ces propositions indécidables en mathématiques.

Qu'en sera-t-il à l'avenir ? Difficile de prévoir. Rien ne dit que certains grands problèmes, comme le théorème de Fermat, ne sont pas indécidables.

On sait fabriquer un problème très analogue au problème de Fermat, dont on peut montrer qu'il est indécidable. On a trouvé une équation, qui n'est pas $x^n + y^n = z^n$, mais une équation avec quinze variables, pour laquelle la question de savoir si elle a des solutions en nombres entiers, est indécidable.

C'est vrai que si ce type de phénomènes se multipliait, ça finirait par créer une certaine "perturbation" dans l'activité mathématique.

Pour l'instant, ça a surtout la vertu de rassurer philosophiquement, sur les mathématiques, de préciser un peu leur statut ; mais ça n'a pas encore le pouvoir de créer de nouvelles mathématiques.

Qu'est-ce qu'une preuve ?

En suivant le même ordre d'idée, on s'interroge sur ce qui constitue une démonstration. Ceux qui ont démontré qu'il n'existait pas de démonstration dans certaines propositions, ont été obligés de s'interroger sur ce qu'est une démonstration.

A partir de là, des logiciens ont proposé une conception légèrement plus restrictive de la démonstration que l'on a appelée **la machine de Turing**. Elle est le prototype des ordinateurs concrets. C'est essentiellement un ordinateur idéal.

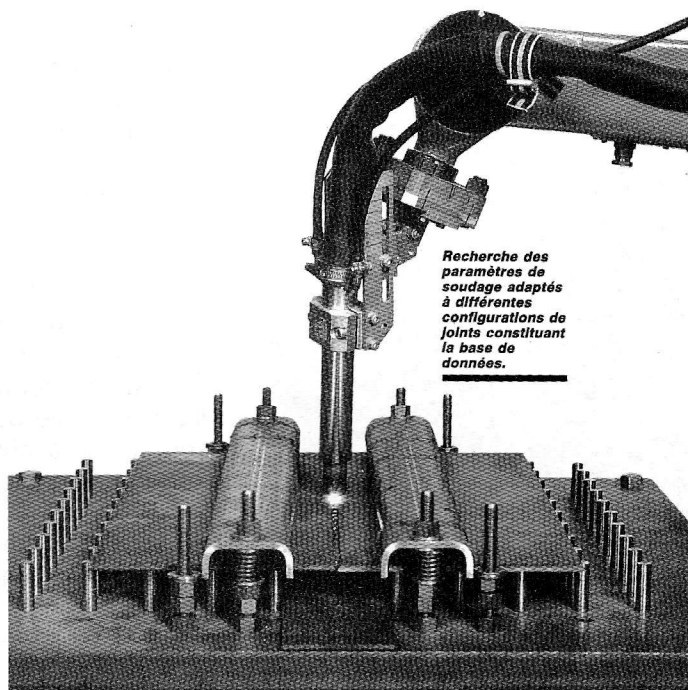
C'est à dire un ordinateur qui peut être le modèle de tous les ordinateurs existants.

C'est l'anglais Turing qui a introduit ce concept avec Von Neumann. Cela a conduit à préciser ce qu'on appelait un algorithme (classiquement, l'exécution d'une suite finie d'instructions préalablement codifiées. Il est tout à fait remarquable que ce concept soit arrivé avant l'apparition des machines réelles, il a servi de modèle dans la fabrication des premiers ordinateurs. C'est le même Von Neumann qui a conduit la réalisation pratique du premier ordinateur, utilisé pour la fabrication de la bombe atomique aux Etats-Unis.

Ce courant de pensée est beaucoup plus riche de conséquences que les discussions sur l'axiomatique, parce qu'il met à jour une problématique entièrement nouvelle qui tourne autour de la notion de machine. On se pose la question de fabriquer des objets, et non plus de démontrer leur existence, et de fabriquer des algorithmes qui les construisent.

La théorie de la complexité

Ce projet conduit à revisiter une partie



Recherche des paramètres de soudage adaptés à différentes configurations de joints constituant la base de données.

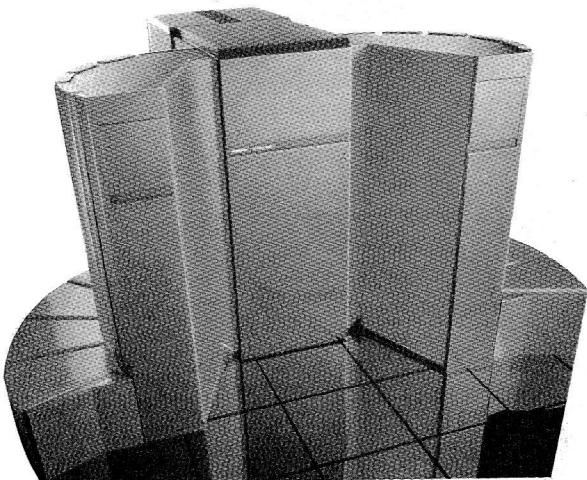
importante des mathématiques et à faire un travail un peu nouveau : c'est ce que l'on appelle faire des mathématiques effectives, dans lesquelles les objets dont on parle doivent pouvoir être construits par des algorithmes.

On est alors conduit à s'interroger sur la complexité de ces algorithmes, c'est à dire en gros la longueur des suites d'instructions qu'il faut écrire pour faire tourner un programme. La question est : est-ce que l'on peut avoir des indications a priori sur le nombre de lignes de programme pour calculer telle ou telle chose, démontrer telle ou telle propriété.

Il y a toute une théorie qui se développe, qu'on appelle la théorie de la complexité de calcul, et par ailleurs on voit que l'objet d'intérêt change. On s'intéresse maintenant non plus à des propriétés mathématiques en général, mais à des propriétés qui s'écrivent avec un nombre fini de symboles en un temps fini. On s'intéresse aux mathématiques du fini, aux mathématiques du "discret" qui intègrent évidemment toutes sortes de mathématiques pré-existantes.

Ces mathématiques sont liées aux machines à calculer, aux machines qui sont capables de traiter l'information.

Ainsi voit-on apparaître à côté de la physique, une deuxième très grande source d'inspiration pour les mathématiques d'aujourd'hui, ce sont les machines.



Sorti en mars 1988, le CRAY Y-MP est doté de 8 processeurs, sa mémoire atteint 64 millions de mots de 64 bits.

Je ne dirai pas, les sciences de l'information parce que cela ne veut pas dire grand chose ; je préfère dire, les machines à traiter l'information.

C'est une deuxième grande source de problèmes, qui évidemment est beaucoup moins abondante que la source de la physique.

Les Marseillais peuvent y être intéressés au premier chef puisque le CNRS va créer à Marseille un institut sur ce thème : "les mathématiques discrètes".

Et maintenant ...

Je viens de décrire où avait abouti l'évolution du siècle. Aujourd'hui on peut essayer de discerner quelques grandes tendances, avec un certain nombre de conséquences. Il est évident que les problèmes que l'on va se poser maintenant ne seront plus de même nature.

En particulier, je ne pense pas qu'il y ait dans les 20 prochaines années de grands débats sur les fondements des mathématiques. Mais par contre, il y a des questions nouvelles qui vont se poser et qui vont concerner la nature, la façon de faire, des mathématiques, et aussi la nature de ce que l'on cherche.

Prenons l'exemple du problème des trois corps. Cela donne à penser ! Voilà un problème où les lois physiques sont extrêmement simples, elles sont connues dès le lycée, ce sont les lois de Newton. On peut écrire des équations différentielles qui régissent le mouvement de trois planètes et ensuite on ne sait pas qu'en faire ; par exemple on n'est pas capable de dire si les planètes vont à un certain moment entrer en collision.

C'est quand même un défi considérable. On peut se demander alors ce qu'il est intéressant de chercher dans ce domaine. Si l'on n'est pas capable finalement de faire une description complète, précise, des phénomènes (ne

parlons pas de calculer les solutions...). On peut se dire après tout que c'était trop demander.

Quelles sont les bonnes questions à se poser ? C'est un peu comme cela que Poincaré a procédé, c'est ainsi qu'il en est venu à proposer la notion de **système dynamique** qui était une façon nouvelle de poser le problème.

On peut voir cela comme l'étude géométrique de la trajectoire d'évolution d'un système (mécanique, physique,...) dans l'espace de paramètres qui définissent le système - par exemple les positions et les vitesses des planètes - et on peut essayer de développer une problématique nouvelle dans ce cadre.

C'est une démarche que l'on rencontrera souvent dans les problèmes qui font "la une" aujourd'hui.

Si l'on ne peut pas résoudre le problème des 3 corps, qu'en est-il des problèmes de type météo. Dans ce cas, en principe, on est encore capable d'écrire les équations, et puis après ... Ce sont des problèmes dans lesquels des variations infinitésimales entraînent de très grandes variations (y compris qualitatives) au bout d'un certain temps.

Quels sont les instruments que l'on va bâtir pour appréhender ces systèmes ?

Il y a déjà eu la réponse construisant des modèles probabilistes. Il y a beaucoup de domaines où l'on se contente d'avoir un modèle probabiliste dans lequel on introduit du hasard ou de l'incertitude, non pas que les lois ou les conditions ne seraient pas connues avec certitude, mais tout simplement parce qu'on ne sait pas faire autrement, parce qu'on ne sait pas résoudre les équations.

Et si l'on pense aux problèmes posés par la biologie par exemple, alors là on se dit qu'il va falloir forcer notre talent... Il va falloir faire des mathématiques de façon entièrement différente (que l'on a peine à imaginer) parce qu'on a un très grand nombre de données à manipuler, une trop grande complexité des phénomènes à mettre en équation..., et même si l'on y parvient, rien ne nous garantit pas qu'on pourra faire quoi que ce soit des équations.

Il y a là une problématique, différente de celle des fondements, qui consiste à essayer de préciser ce que résoudre veut dire. C'est une problématique très moderne, qu'il s'agisse de traiter des problèmes pratiques comme le **"Global Change"**, c'est à dire les phénomènes de type météorologique, ou bien des problèmes plus théoriques comme le problème des "n corps".

Les mathématiques comme enjeu économique

Je terminerai en évoquant un autre aspect dans les mathématiques d'aujourd'hui qui va se développer énormément dans les années qui viennent et qui n'a pas grand chose à voir avec la problématique purement scientifique que je viens d'esquisser : il s'agit des mathématiques comme enjeu économique direct.

C'est un phénomène relativement récent, on peut le dater des années soixante. Il vient tout simplement de l'importance qu'a pris la modélisation mathématique avec la possibilité de faire de très gros calculs.

Aujourd'hui par exemple, dans les programmes d'aéronautique, comme le programme d'un avion de chez Dassault, disons le "Rafale", le coût des calculs est à peu près équivalent au coût des expériences en soufflerie.

Ça veut dire qu'on fait tourner de très gros programmes. Un très gros programme a, par exemple, 500 000 instructions d'un langage courant, disons, et dans ces 500 000 instructions, on trouve ce que l'on appelle "la couche scientifique" qui comprend 5 à 10 000 instructions pas plus, et qui résume la formulation scientifique du problème.

Si cette "couche scientifique" n'est pas correcte, on peut jeter le programme de 500 000 lignes. C'est là que le mathématicien intervient.

Si l'on regarde ce qui se passe dans les pro-

grammes les plus avancés, comme la navette spatiale européenne Hermès, il ne s'agit plus du tout de définir des éléments industriels déjà identifiés, du style la carlingue, les gouvernes, le nez, ... ou de faire des simulateurs de mouvement.

Il s'agit d'élaborer des modèles qui vont premièrement convaincre les gens que le projet est faisable et d'autre part qui va permettre de le mener à bien. Or ce modèle va avoir à prendre en compte des phénomènes extrêmement complexes qui dépendent de beaucoup trop de paramètres pour que l'on se contente d'extrapoler, disons à partir de quelques données expérimentales, de quelques essais au sol.

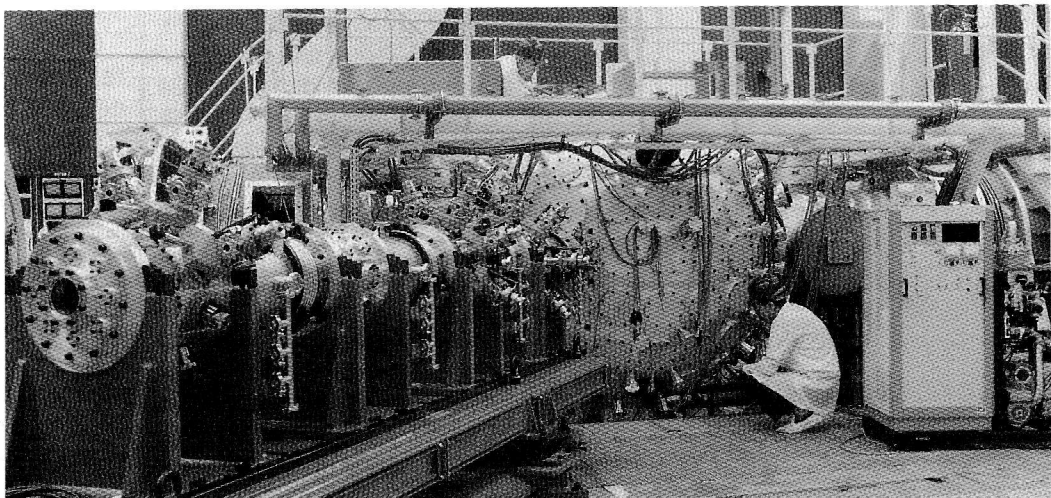
Dès qu'il y a plus de sept paramètres, les spécialistes disent que ce n'est plus possible.

Si l'on regarde, par exemple, le problème de la rentrée dans l'atmosphère, ça couvre un très large spectre de phénomènes : entre le début de la rentrée et la fin vous passez d'une situation de gaz raréfiés qui obéissent aux équations de Boltzmann, à une situation de fluides visqueux qui obéissent à l'équation de Navier-Stokes, et entre les deux, si vous rajoutez un peu de réaction chimique, de combustion, qu'est-ce qui va se passer ?

Vous ne pouvez pas aller chercher dans des bouquins des recettes toutes faites. Il va falloir modéliser de A jusqu'à Z.

Voilà un exemple de problème mathématique très important, pour lequel il faut de véritables mathématiciens. Dans l'exemple que j'ai cité, ce travail met en jeu relativement peu de monde, une quarantaine de petites équipes de deux à trois personnes, dans toute l'Europe,

De nombreuses simulations numériques sont effectuées sur le CRAY X-MP pour le laser PHEBUS. Ici, vue de la salle d'expériences.



mais c'est absolument capital.

Voilà une entreprise industrielle qu'on ne peut pas concevoir aujourd'hui sans un noyau de mathématiciens.

D'autres exemples industriels

L'exemple d'Hermès se retrouve dans d'autres secteurs. Cela a commencé dans les années 50-60 avec l'industrie nucléaire puis les compagnies pétrolières s'y sont mises avec les simulations de gisements.

Aujourd'hui les compagnies pétrolières dépensent beaucoup d'argent et de matière grise pour ce genre de travail, avec en particulier un outil nouveau : le développement en série d'ondelettes qui est mieux adapté que le développement en "série de Fourier".

Il y a évidemment en aéronautique tous les calculs de mécanique des fluides, dans l'industrie spatiale tous les problèmes de contrôle optimal (comment stabiliser une structure, comment la gérer...).

Plus récemment on a vu se convertir à cette activité qu'on appelle le "calcul scientifique", de nouveaux secteurs industriels plus classiques, comme l'industrie automobile, avec les essais non destructifs en ordinateur. Il y a aussi l'industrie des semi-conducteurs, les télécommunications où la théorie du signal est devenue aujourd'hui une théorie essentiellement mathématique (ce qu'on retrouve d'ailleurs dans les enseignements universitaires).

Il y a aussi le vaste secteur des statistiques. La recherche de pointe occupe une activité relativement réduite dans l'ensemble de l'activité, mais c'est une part importante dans des domaines très divers. Il y a, par exemple, un véritable engouement aujourd'hui pour les modèles stochastiques en finance. Depuis les derniers cracks il y a beaucoup de nos collègues qui ont été embauchés dans des banques !

Et puis, il y a des applications plus nouvelles. Celles de la géométrie en conception assistée par ordinateur ou en robotique. Tout ce qui tourne autour de la reconnaissance d'images ou de la recon-

naissance de formes qui utilisent soit des probabilités soit de la géométrie (y compris sous une forme assez abstraite). Tout ce qui tourne autour des codages des signaux, la cryptographie, etc...

Ainsi se constitue peu à peu tout un secteur industriel qui a besoin de mathématiciens, de vrais mathématiciens, et plus seulement d'ingénieurs de haut niveau car ce type d'activité est relativement proche de la recherche.

Pour l'instant, ça ne concerne encore que quelques centaines de personnes, mais c'est en train de devenir une affaire d'argent et même de beaucoup d'argent. Il y a des signes qui ne trompent pas. On voit des collègues créer des cabinets de "Consulting" en mathématique, ce qui est assez nouveau. On peut parier que d'ici 20 ans, c'est une activité qui aura pris beaucoup d'extension.

J'ai essayé de décrire comment je voyais les choses en tant que témoin. Mais on est toujours témoin plus ou moins indirect. On ne connaît jamais toutes les mathématiques ; on ne connaît pas toutes les applications. Il s'agit bien souvent d'informations de seconde main.

Je ne crois pas avoir réussi à broser un panorama des mathématiques dans 20 ans (l'ai-je seulement tenté ?). Mais cela vous a peut-être donné quelques idées sur les mathématiques de notre temps et sur celles à venir. C'est sans doute très différents de la vision qu'on peut en avoir quand on vient de finir ses études secondaires ou même de réussir à un concours prestigieux.

C'est un vrai problème d'arriver à rendre sensible en quoi consiste aujourd'hui l'activité mathématique. C'est d'autant plus difficile qu'il y a à la fois l'aspect "aventure historique" et l'aspect "applications industrielles" et, entre les deux, il y a tout ce qui concerne l'interaction avec les autres sciences.

Le champ des mathématiques est aujourd'hui incroyablement vivant et fécond. Le vrai grand problème sera plutôt le manque de mathématiciens que le manque de sujets.

Fractals et dimensions

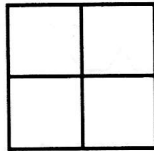
Une nouvelle dimension

La plupart des objets mathématiques que vous avez étudiés ont une dimension exprimée par un nombre entier. Par exemple des solides comme le cube et l'icosaèdre sont de dimension 3. Les carrés, les triangles, et beaucoup d'autres figures planes sont de dimension 2. Les lignes sont de dimension 1 et les points de dimension 0.

Considérons un carré de côté de longueur 1.



Réalisez plusieurs de ces carrés prédécoupés (avec les Kit-Polyèdres par exemple).



☛ Quel est le plus petit nombre de tels carrés que l'on peut mettre côté contre côté pour former un carré ?

La taille d'une figure est calculée en comptant le nombre de figures initiales nécessaires pour former cette figure.

Ici, une pièce initiale est un carré dont la mesure du côté est 1 et dont la taille est 1.

☛ Quelle est la taille du nouveau carré (fig. 2) ?

☛ Quelle est la mesure du côté du nouveau carré ?

Changements d'échelles

Des figures semblables ont la même forme, mais pas la même taille. "L'échelle" entre deux figures semblables s'obtient en calculant le rapport entre les mesures des côtés des deux figures.

$$\text{échelle} = \frac{\text{nouvelle mesure}}{\text{ancienne mesure}}$$

☛ Quelle est l'échelle entre le petit carré et le grand carré ?

☛ Trouver le rapport "nouvelle taille/ancienne taille" pour les deux carrés.

☛ Former un carré toujours plus grand,

tel que la mesure du côté soit 3. Comparer ce carré avec le petit carré. Quelle est l'échelle ? Quel est le rapport de leur taille ?

☛ Former un carré toujours plus grand, tel que la mesure du côté soit 4. Comparer ce carré avec le petit carré. Quelle est l'échelle ? Quel est le rapport de leur taille ?

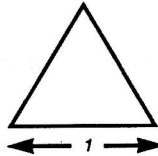
☛ Compléter le tableau pour des carrés

Echelle	2	3	4	5	6	10
Rapport de tailles						

☛ Quelle est la relation entre les deux lignes du tableau ?

Du carré au triangle

Considérons un triangle équilatéral. La mesure du côté est 1 et la taille est 1.



Triangle équilatéral

☛ Quel est le plus petit nombre de triangles équilatéraux que l'on peut mettre ensemble côté contre côté pour former un triangle semblable, mais plus grand ?

☛ Compléter le tableau pour les triangles.

Echelle	2	3	4	5	6	10
Rapport de tailles						

☛ Quelle est la relation entre les deux lignes du tableau. Comparer votre réponse avec celle du tableau des carrés.

A la recherche d'une autre dimension

Un moyen de définir la dimension d'une figure dépend de l'échelle et du rapport des tailles :

$$(\text{échelle})^d = \frac{\text{nouvelle taille}}{\text{ancienne taille}}$$

Traduit de l'anglais par Georges BORION de la régionale Apmep de Poitiers, qui a déjà publié un article sur le sujet dans le bulletin vert de décembre 1991. Nous vous renvoyons aussi aux nombreux articles parus dans le PLOT depuis 10 ans et, en particulier, au n°60 avec l'article de J. F. Colonna, au numéro 38 (1987) avec l'article de J. P. Kahane et au numéro 29 (1984) avec l'article de J.P. Delahaye.

En utilisant cette définition pour 2 carrés ou pour 2 triangles vous constatez que :

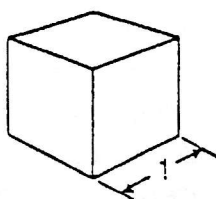
$$2^d = \frac{4}{1} \text{ d'où } 2^d = 4 \text{ donc } d = 2$$

Cette définition de la dimension confirme ce que nous savions déjà : carrés et triangles sont de dimension 2.

☞ On peut utiliser les tables pour confirmer la dimension des carrés et des triangles. En effet $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, ... $10^2 = 100$.

Du carré au cube

Considérons un cube dont l'arête a pour longueur 1.



☞ Quel est le plus petit nombre de tels cubes pour former un cube plus grand ?
☞ Quelle est l'échelle entre ces deux cubes ?

☞ Compléter le tableau pour les cubes

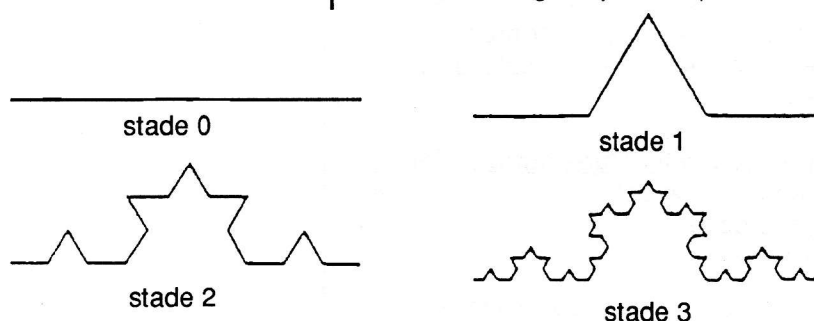
Echelle	2	3	4	5	6	10
Rapport de tailles						

☞ Quelle est la relation entre les deux lignes du tableau ?

☞ En utilisant la définition, on constate que : $2^d = 8/1$ donc $d = 3$ ce qui confirme que le cube est de dimension 3.

La dimension fractionnaire

Nous avons étudié des échelles et des tailles associées à des figures de dimension 2 ou 3. Est-il possible pour des objets mathématiques d'avoir une dimension fractionnaire ? Considérons la série de figures suivantes obtenues en remplaçant le tiers central de chaque segment par un V renversé (formé par 2 côtés d'un triangle équilatéral).

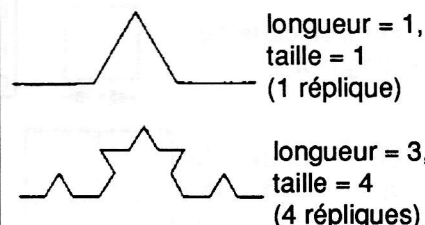


A la recherche de l'échelle

Trouver l'échelle de cette séquence de figures est difficile car la longueur totale de la figure reste la même alors que le nombre de pièces augmente. Pour simplifier la procédure, suivons ces différentes étapes :

Partir de n'importe quel stade (exemple stade 1).

Dessiner le stade suivant (stade 2) de la suite et en agrandissant de sorte qu'il contienne une copie exacte du stade précédent (ici stade 1). Notez que ce stade 2 contient exactement 4 copies (ou répliques) du stade 1 et qu'il est trois fois plus long qu'au stade 1.



☞ L'échelle est le rapport entre la nouvelle longueur et l'ancienne longueur entre deux stades consécutifs. L'échelle entre le stade 1 et le stade 2 est $3/1$.

☞ La taille peut être déterminée en comptant le nombre de répliques du stade 1 trouvées au stade 2.

ancienne taille = 1 nouvelle taille = 4
On utilise la définition de la dimension pour calculer la dimension, d , la figure formée par ce processus

$$3d = 4/1 \text{ donc } 3d = 4$$

$$\text{or } 3^1 = 3 \text{ et } 3^2 = 9.$$

Par suite la dimension de cette figure est plus grande que 1 et plus petite que 2 ; d est compris entre 1 et 2

☞ Utiliser votre calculatrice pour estimer d . Utiliser les logarithmes pour obtenir une valeur exacte.

Les fractals de Mandelbrot

La figure originelle est un segment de dimension 1. Par additions successives de segments, un objet de dimension supérieure à 1 et inférieure à 2 a été construit. Ce type d'objet de dimension fractionnaire est connu sous le nom de "fractal".

Les fractals sont des objets infiniment auto-semblables obtenus par une répétition d'additions (ou de soustractions).

L'objet atteint comme limite de ce processus répété est le FRACTAL.

Tapis-éponge de Sierpinski

Considérons maintenant un objet de dimension 2 où l'on enlève des parties de façon itérative. A chaque étape du développement du fractal, on enlève un triangle au centre de chaque triangle existant.



stade 0 stade 1 stade 2 stade 3

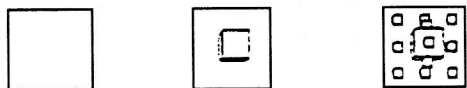
En utilisant le procédé des questions précédentes, répondre aux questions suivantes

- ☞ Quelle est l'échelle de ce fractal ?
- ☞ Quelle est sa taille ?
- ☞ Entre quels entiers se trouve la dimension du fractal ?
- ☞ Utilisez la calculatrice pour trouver une valeur approchée de la dimension de ce fractal.

Répétez l'opération avec un carré auquel on enlève le carré central

Pyramide fractale

- ☞ Trouver la dimension du fractal obtenu par addition d'un cube au centre de chaque partie carrée.



stade 0 stade 1 stade 2

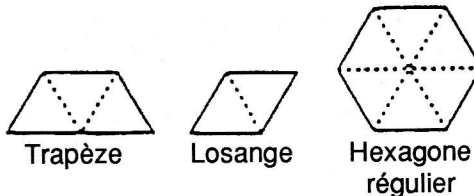
Un fractal dont la dimension est comprise entre 1 et 2 peut être formé par addition à partir d'une ligne de dimension 1 ou par soustraction à partir d'une figure de dimension 2.

- ☞ Comment peut-on former un objet de dimension comprise entre 2 et 3 ?
- ☞ Comment peut-on former un objet de dimension inférieure à 1 ?

Hyperfractals ?

Pouvez-vous...

- Déterminer le plus petit nombre d'hypercubes (la figure analogue au cube mais de dimension 4) nécessaire pour obtenir un hypercube plus grand ?
- Utiliser chacun des échantillons pour construire une réplique plus grande ?



Trapeze

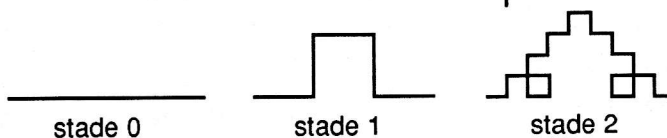
Losange

Hexagone régulier

- ☞ Développer une théorie selon laquelle toute figure de dimension 2 peut être utilisée pour construire une réplique plus grande ?

- ☞ Définir un fractal de dimension 1 et demi ?

- ☞ Trouver l'aire intérieure du fractal formé par l'addition de trois côtés d'un carré au tiers central de chaque segment unitaire (voir figure). Comparer cette aire, à l'aire du triangle circonscrit au fractal. (aide : trouver d'abord la hauteur du triangle).



stade 0

stade 1

stade 2

- ☞ Trouver le volume intérieur du fractal décrit en question 26. Comparer ce volume à celui de la pyramide à base carrée circonscrite au fractal. (aide : trouver d'abord la hauteur de cette pyramide).

Savez-vous que ...

- Avec ses montagnes, vallées et ses océans, la surface de la Terre est un fractal de dimension approximative 2,2 ?

- Benoît Mandelbrot inventa le mot "fractal" en 1975 pour désigner les formes "auto-semblables" ayant une dimension fractionnaire ?

- W. Bolyai montra, en 1832, que si deux polygones ont une même aire, l'un d'eux pouvait être décomposé en un ensemble fini de polygones qui permettent de reconstituer l'autre ?

- M. Dane démontra en 1900 que la réponse au 3e problème d'Hilbert "si deux polyèdres ont le même volume, chacun d'eux peut être décomposé en un nombre fini de polyèdres qui permettent de reconstituer l'autre" est non ? (en fait, il faut un nombre infini de tétraèdres pour faire cette reconstitution).

Les mathématiques et leurs interactions

Rapport 1992 du CNRS.

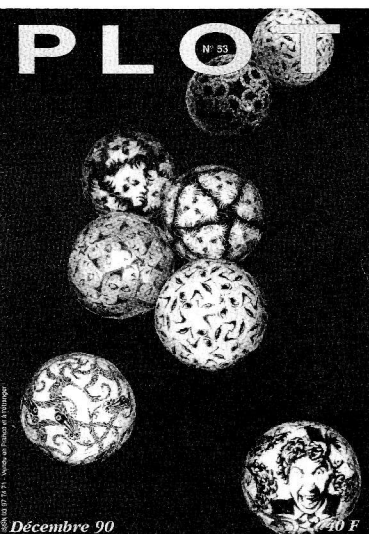


Tous les 4 ans, le CNRS publie un rapport de conjoncture sur l'état des recherches scientifiques en France.

Dans le Plot n° 53 de décembre 1990, nous avons publié quelques extraits du précédent rapport concernant les mathématiques.

Voici aujourd'hui quelques extraits de celui qui vient de paraître et dont le mensuel "La Recherche" de février 93 a fait une synthèse générale dans un dossier spécial.

14



Les mathématiques sont tout à la fois une science poursuivant pour elle-même ses propres développements, et un outil universel pour toutes les autres sciences. L'équilibre entre ces deux axes est complexe, et la façon que l'on peut avoir de l'appréhender conditionne à l'évidence l'orientation d'une politique scientifique en mathématiques.

Le rapport entre le "noyau dur" et les applications a fortement évolué depuis quelques décennies. Divers facteurs, tant sociaux que scientifiques, ont depuis poussé les mathématiques à s'ouvrir davantage sur le monde qui les entoure, que ce soit le monde universitaire des autres disciplines ou le monde industriel.

Aujourd'hui, sans que l'importance des applications des mathématiques soit le moins du monde minimisée, un certain besoin de recentrage est perçu par la communauté mathématique, dont l'ampleur peut être mesurée par la nuance entre le titre du chapitre la concernant dans le Rapport de conjoncture 1989 : "Interactions des mathématiques" et celui d'aujourd'hui "Les mathématiques et leurs interactions".

Les enjeux

Les résultats mathématiques se caractérisent essentiellement par leur généralité et par leur permanence. Ces deux caractéristiques, que nous allons développer, sont à l'origine des spécificités des relations entre les mathématiques, les autres sciences et les applications.

On reproche souvent aux mathématiques une constante de temps considérable : la résolution d'un problème peut

survenir plusieurs années — voire plusieurs décennies — après qu'il ait été posé, et ne plus intéresser l'auteur. Sans parler des exemples fameux où la solution s'est fait attendre plusieurs siècles ou millénaires : quadrature du cercle, trisection de l'angle, nombres parfaits, théorème de Fermat, hypothèse de Riemann... Bien que ce soit souvent un stimulant très puissant pour les mathématiciens, cet état de fait est un handicap certain pour les interactions des mathématiques. C'est aussi une manifestation de la durabilité des concepts mathématiques, qui en fait un enjeu culturel de première grandeur. La spécificité de ces concepts n'est pas l'abstraction, mais la généralité. Leur valeur est donc interdisciplinaire par essence : qu'ils proviennent d'une discipline, et l'on découvrira, grâce à l'approche mathématique, que la même structure gouverne un phénomène dans un tout autre domaine. C'est une des fonctions des mathématiques que d'établir des relations entre des notions abstraites et de permettre d'identifier des modèles ayant la même structure.

Généralité et permanence

A cette généralité s'ajoute donc la permanence de la validité des résultats et des théories mathématiques : on ne peut comparer, de ce point de vue, la "crise des fondements" qui a affecté les mathématiques dans la période 1890-1935 et les révolutions qui ont touché la physique à peu près à la même époque. Une théorie physique n'est valable que dans certaines limites : de distance, de vitesse, de temps ou de masse par exemple (on s'en aperçoit le plus souvent après coup, au moment de l'établissement d'une nouvelle théorie). Par contraste, un théorème sera toujours vrai et certains seront toujours utiles.

Ces deux propriétés de permanence et de généralité permettent, à la longue,

l'assimilation des idées utiles par le plus grand nombre d'individus. Les mathématiques font donc pleinement partie du patrimoine culturel de l'Humanité. Il n'est pas besoin de dire à quel point cette diffusion des connaissances mathématiques est utile au progrès de toutes les sciences.

Culture et développement

Les mathématiques participent donc simultanément :

☛ **au développement de la culture humaine**, et les mathématiciens tiennent à être reconnus comme détenteurs d'une part de cette culture,

☛ **au mouvement général des sciences** : leur langage sert à la fois de support à bien des développements, que ce soit en physique, en biologie ou en sciences de l'homme, et de moyen de communication entre ces sciences.

☛ **au développement du monde moderne** : les mathématiques élaborées ont un impact technologique croissant et contribuent à l'augmentation de la production dans tous les domaines, à celui de la circulation d'information et des capacités d'organisation.

Au-delà de cette évolution qualitative, on peut schématiquement dire que le lien entre mathématiques et interactions a essentiellement été marqué depuis quatre ans par deux phénomènes :

Calculs et modèles

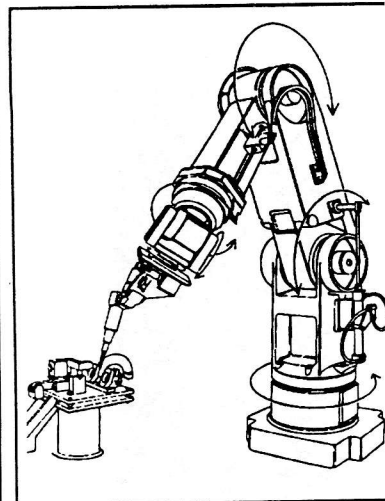
D'une part, l'accroissement phénoménal des puissances de calcul des ordinateurs s'est poursuivi, au point qu'aujourd'hui des entreprises de taille moyenne peuvent avoir facilement accès à la simulation numérique dans des conditions réalistes. Ceci accroît considérablement les enjeux industriels des mathématiques, comme d'ailleurs leurs enjeux dans des domaines aux ambitions avant tout cognitives (biologie ou sciences sociales par exemple). Le rôle du CNRS sur ce point est — et doit demeurer — important : beaucoup d'industries utilisent en effet les compétences des laboratoires du CNRS pour résoudre leurs problèmes de modélisation numérique.

Physique et environnement

D'autre part, les interactions des mathématiques avec les autres sciences sont marquées par l'utilisation de plus en plus répandue de modèles. La plupart de ces modèles s'expriment dans le langage mathématique, et leur traitement fait usage de résultats mathématiques parfois très sophistiqués ou suscitent des recherches dont certaines sont de nature fondamentale. Soulignons l'importance souvent ignorée de ce que l'on pourrait appeler la "modélisation fondamentale", dans laquelle une théorie abstraite en soi bénéficie de l'apport du mathématicien. Un exemple typique réside dans l'essor en physique théorique de l'usage de la géométrie non commutative.

Les enjeux économiques et sociaux du développement de modèles mathématiques efficaces ne cessent de croître : la régulation et le pilotage des grands réseaux techniques (réseaux nationaux et internationaux de télécommunication, d'énergie, de transports...), la gestion de systèmes socio-économiques (les entreprises, les grandes administrations) d'une complexité croissante, la maîtrise des interactions entre nos sociétés et le milieu naturel (les problèmes d'environnement), le besoin d'une connaissance plus fine des phénomènes naturels eux-mêmes (qui se traduit, par exemple, par la nécessité de disposer de prévisions météorologiques de plus en plus précises et fiables) sont autant de champs d'application en plein développement et d'interactions pour les mathématiques.

On verra que les mathématiques ont une part cruciale dans beaucoup de développements technologiques récents. On évoquera également le rôle qu'elles jouent dans la formulation et la modélisation des sciences, notamment (mais pas uniquement) de la physique. On a aussi mentionné l'utilité des concepts et de la démarche mathématique. Pour conclure, il nous semble important de rappeler que les mathématiques sont aussi une science de la nature, et de souligner leur aspect esthétique : après tout, la recherche de la vérité et de la beauté sont des buts tout à fait valables en soi.



EVOLUTION ET TENDANCES

Depuis environ une vingtaine d'années, il y a eu chez les mathématiciens un changement assez net d'orientation que l'on peut baptiser de "retour au concret". Ceci par contraste et quelque peu en réaction contre la période précédente, qui a commencé juste après l'après-guerre, et qui a été en grande partie dominée par la construction et l'utilisation de "grosses machines" théoriques, l'exemple le plus spectaculaire étant celui de la géométrie algébrique.

Cette tendance, symbolisée pour le meilleur et pour le pire par le groupe Bourbaki, était spécialement marquée en France ; il faut d'ailleurs noter qu'elle a coïncidé avec une place particulièrement brillante de notre pays dans la recherche mathématique mondiale. Bien que les dangers de stérilisation aient été fort exagérés, il n'en est pas moins vrai que les contacts avec les autres disciplines scientifiques étaient devenus plus difficiles.

1 - Intégration des mathématiques

La recherche mathématique est aujourd'hui tellement foisonnante qu'il serait fort présomptueux de prétendre donner un panorama des progrès réalisés récemment. Nous allons nous contenter de décrire quelques domaines qui paraissent les plus caractéristiques de son évolution.

Une caractéristique de la période actuelle semble être l'intégration toujours plus grande des mathématiques, au sens où il est de plus en plus fréquent qu'un concept né dans un domaine soit appliqué avec fruit dans un autre parfois très éloigné. Cela est aussi vrai, et c'est en grande partie nouveau, de concepts nés en dehors des mathématiques, notamment en physique, informatique et biologie. Ce transfert de concepts produit parfois des résultats inattendus et spectaculaires. Parmi les exemples les plus marquants, citons :

— l'utilisation des théories de jauge, issues de la physique des particules, dans la topologie des variétés de dimen-

sion quatre,

— l'application des algèbres d'opérateurs à la théorie des nœuds,

— les rapports mystérieux entre le chaos quantique et l'hypothèse de Riemann,

— la multiplicité des techniques qui interviennent dans les mathématiques de la vision : ondelettes, physique statistique, réseaux de neurones, géométrie algébrique,

— les théories de la complexité,

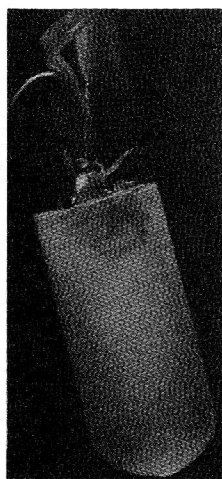
— enfin, l'exemple sans doute le plus fascinant est relatif à l'utilisation de concepts de théorie quantique des champs dans divers domaines topologiques et géométriques, ainsi qu'en analyse sur les variétés : théorie de Morse, topologie algébrique (cohomologie elliptique), théorie de l'indice, variétés de petite dimension...

Tâchons néanmoins de dégager les principales problématiques actuelles — ou pour le moins un échantillon de celles-ci — et de cerner les thèmes en émergence, tout en soulignant, autant que faire se peut, les interactions, soit internes à la discipline, soit surtout avec les disciplines voisines.

2 - Physique et topologie

On rencontre d'abord ces interactions dans l'étude topologique des variétés de petite dimension. Cette étude est cruciale, en particulier par ses évidentes relations avec la physique où l'on ne cesse de traiter de variétés de dimension deux (surfaces), trois (localement analogues à notre espace), ou plus généralement n , pour n petit.

Les problèmes de classification des variétés étant essentiellement résolus depuis vingt ans en dimension supérieure à cinq, l'attention s'est portée sur les dimensions trois et quatre : il est peut-être assez remarquable que ces dimensions, qui sont celles de l'espace et de l'espace-temps "ordinaire", soient de loin les plus riches. Il y a cependant, pour le mathématicien, une différence notable : en dimension trois, on dispose d'une description conjecturale assez complète qui constitue une vaste généralisation de la conjecture de Poincaré, et dans



laquelle la géométrie hyperbolique joue un rôle crucial. En revanche, en dimension quatre, notre compréhension a été complètement bouleversée dans les dix dernières années, avec notamment la découverte d'une différence radicale entre variétés topologiques et différentielles, phénomène spécifique à cette dimension.

Il y a eu d'abord la preuve de la conjecture de Poincaré topologique en dimension quatre, véritable tour de force qui a rajeuni de façon inattendue une vieille école de topologie générale. Plus généralement, une classification complète des variétés topologiques de dimension quatre à groupe fondamental pas trop compliqué a été obtenue.

Equations de Yang-Mills

Mais le véritable début de la période actuelle est constitué par l'utilisation des théories de jauge des solutions des équations de Yang-Mills, issues de la physique des particules des années 50, pour étudier les variétés différentielles de dimension quatre. Le résultat le plus stupéfiant, obtenu en combinant ces travaux avec les résultats sur les variétés topologiques, fut l'existence d'une structure différentielle exotique sur l'espace euclidien : c'est la seule dimension où une telle structure existe. Par la suite, on a même montré qu'il y a une infinité continue de telles structures exotiques, ce qui semble apparenter les variétés de dimension quatre plus aux variétés complexes (par exemple les surfaces de Riemann) qu'aux variétés réelles des autres dimensions. Un fait très curieux est que la théorie utilisée pour démontrer ces résultats a pour origine certaines équations de la relativité, mais dans lesquelles on considérerait le temps comme imaginaire pur, passant de l'espace de Minkowski à l'espace euclidien. Tout récemment cette théorie a été utilisée pour étudier les plongements lisses de surfaces réelles dans les surfaces complexes. La version locale de ces résultats permet de répondre à de vieilles questions de théorie des nœuds.

La conjecture de Poincaré

Un développement ultérieur combine cette théorie avec l'interprétation supersymétrique de la théorie de Morse pour

définir une homologie d'instantons pour les sphères d'homologie entière de dimension trois. Celle-ci raffine un précédent invariant qui s'était montré pertinent pour l'étude de la conjecture de Poincaré en dimension trois. Ce dernier illustre le fait que les méthodes "classiques" ont encore beaucoup à donner à condition d'être utilisées de manière inventive. C'est aussi ce que montre la preuve récente du fait qu'un nœud classique est déterminé par son complément, complémentaire dans l'espace ambiant.

La théorie des nœuds

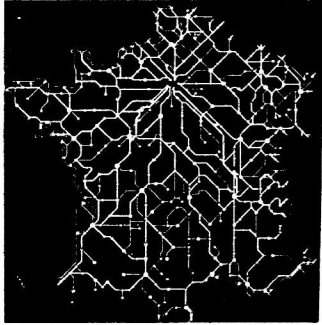
Un développement spectaculaire fut l'application de la théorie des algèbres d'opérateurs à la théorie des nœuds, domaines a priori bien éloignés : invariants polynomiaux pour les nœuds et les entrelacs. Maintenant on comprend mieux ce qu'une telle relation a de naturel, comme l'est la relation entre les représentations du groupe de tresses et l'origine de l'équation de la R-matrice.

Mais l'événement de ces cinq dernières années a — paradoxalement peut-être — davantage consisté en une influence de la physique théorique sur les mathématiques fondamentales, par la spectaculaire intervention de la théorie quantique des champs en topologie et géométrie, et notamment pour les variétés de dimension trois et quatre (annonce d'une théorie quantique topologique des champs, nouveaux invariants).

La supersymétrie

Elle a donné naissance à toute une industrie de travaux à la frontière de la physique théorique, de la topologie de petites dimensions, de l'analyse non linéaire, des représentations de groupes, des algèbres d'opérateurs, des groupes quantiques... L'histoire avait commencé il y a une dizaine d'années, avec l'introduction en topologie et géométrie différentielle de méthodes de la théorie quantique des champs (supersymétrie). Ces idées ont même été utilisées dans des domaines assez éloignés, comme la transformation de Fourier géométrique ou l'analyse complexe.

De façon plus globale, les liens entre



les mathématiques — et en particulier la géométrie — et la physique sont innombrables, de la théorie conforme des champs aux intégrales de **Feynman** en passant par la quantification géométrique ou la théorie quantique générale des champs. Les motivations des physiciens ont poussé à de remarquables innovations concernant les groupes quantiques et les algèbres d'opérateurs, la méthode de scattering inverse se révélant, par exemple, une motivation pressante pour la construction et l'étude des systèmes intégrables quantiques.

De même, dans le domaine extrêmement vaste de la mécanique statistique, les problèmes de **transitions de phase**, par exemple, ont tout à la fois bénéficié de l'étude des algèbres de Lie et motivé celles-ci, tandis que le développement en physique théorique de la théorie des cordes a suscité toute une problématique en topologie algébrique (analyse des genres elliptiques).

On pourrait multiplier à l'infini les exemples de ce développement parallèle de la physique théorique ou de la physique mathématique et de théories mathématiques relevant de diverses branches : fonctions thêta non commutatives et équations de solitons (équations KP), thermodynamique des nombres (caractérisation en termes d'algèbres d'opérateurs de la "transition d'Hagedorn"), modèles conformes et algèbre de Virasoro, systèmes intégrables et géométrie algébrique.

Le chaos

L'étude de phénomènes chaotiques, de la turbulence (au sein d'un gaz, par exemple, avec des applications directes en météorologie) fait aujourd'hui intervenir directement la décomposition en ondelettes, domaine auquel l'école française a apporté une contribution décisive. Les probabilités elles-mêmes interviennent sans cesse davantage en physique, par exemple au travers des spectres d'hamiltoniens aléatoires ou des probabilités quantiques.

3 - Equations aux dérivées partielles et modélisation

L'étude des équations aux dérivées

partielles, qui relève en l'occurrence de l'analyse non linéaire, a, de tout temps, été fondamentale pour un très grand nombre de problèmes "appliqués". Notons, à titre de curiosité, que l'une des méthodes les plus employées, tant par les mathématiciens que par les utilisateurs, la méthode des éléments finis a été créée par des non-mathématiciens, et que la théorie a souvent bénéficié de ses applications, un exemple étant donné par le principe de taxation présent en économie en théorie des incitations, qui a fourni la solution d'une équation aux dérivées partielles qu'on ne savait pas résoudre.

Mais, alors que pour les équations de Yang-Mills vues dans le paragraphe précédent, l'intérêt de l'équation résidait en grande partie dans le modèle physique qu'elle portait, l'accent ici est différent, et l'on s'intéresse plus aux solutions des équations pour elles-mêmes. C'est le cas pour les équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, par exemple dans le problème de Yamabe, et l'on a vu la preuve de diverses conjectures : conjecture de Calabi, conjecture de la masse positive en relativité générale. On a aussi constaté des phénomènes étonnants, comme l'apparition de "bulles" dans les équations aux dérivées partielles elliptiques ayant une non-linéarité critique, avec un retour aux équations de Yang-Mills, dans le cas des courbes holomorphes.

Les applications en physique

Elles sont souvent relativement directes : découverte d'un type nouveau de solutions pour la turbulence en mécanique des fluides, la question demeurant posée du lien avec des solutions de viscosité, méthode de compacité par concentration. Les retombées, en biologie par exemple, de l'étude de la variété inertielle ou de la dimension fractale des attracteurs, en particulier pour les équations d'évolution décrivant des systèmes dynamiques de dimension infinie, sont encore aujourd'hui de dimension infinie, sont encore aujourd'hui loin d'être claires.

Pareillement, toute une branche d'analyse extrêmement fine se fait sur un arrière-plan d'interaction directe en physique : l'analyse microlocale, qui étu-

die entre autres la propagation des singularités des solutions des équations aux dérivées partielles en particulier hyperboliques). Et l'on peut prévoir un important développement de méthodes, considérant les propriétés qualitatives de ces équations et de leurs solutions, y compris de méthodes topologiques.

Les surfaces minimales

Toute une classe des équations aux dérivées partielles peut être qualifiée d'équations géométriques : l'étude des surfaces minimales plongées dans l'espace euclidien de dimension trois, par exemple, est l'un des plus anciens problèmes de la géométrie différentielle, il a fait l'objet de nombreux travaux mathématiques suscités notamment par les problèmes posés par les physiciens (problème de Plateau sur l'existence d'un film de savon à contour donné, par exemple). Ces dernières années, son intérêt s'est affirmé dans des domaines extrêmement variés de la physique, de la chimie et de la biologie.

L'observation de phases cubiques "exotiques" dans un grand nombre de systèmes a renouvelé l'intérêt pour les surfaces minimales (ou à courbure moyenne constante) périodiques. Deux de ces surfaces avaient été étudiées déjà à la fin du siècle dernier par **Schwarz**, mais ces observations nouvelles ont entraîné un renouveau d'études mathématiques aboutissant, entre autres, à la découverte de la surface minimale périodique cubique la plus fréquemment observée expérimentalement.

Des travaux sur ordinateur ont permis de visualiser un grand nombre de ces surfaces minimales ou à courbure moyenne constante dont on ne possède pas de représentation analytique. Les comparaisons de ces images avec celles obtenues, par exemple, en microscopie électronique sont assez frappantes. Les discussions interdisciplinaires ont permis d'enrichir les interprétations des expériences, les modélisations des systèmes, et de poser ou de relancer des problèmes mathématiques intéressants.

De plus, ceci a aidé à trouver de nouvelles surfaces minimales plongées, et a contribué à renouveler ce domaine. Par

ailleurs, les surfaces minimales dans des variétés de dimension trois autres que l'espace euclidien ont joué un rôle important en topologie de petite dimension. Tout ce domaine est aujourd'hui fort actif.

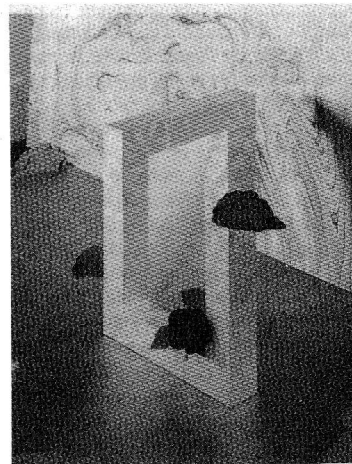
Les équations stochastiques

Il en est de même des développements des équations aux dérivées partielles stochastiques. L'école française s'est montrée dans les tout premiers rangs mondiaux pour l'étude des équations différentielles stochastiques (en particulier des diffusions), s'appuyant pour cela sur une excellente école probabiliste : elle se doit donc d'occuper une place mondiale dans le domaine des équations aux dérivées partielles stochastiques, à la frontière entre les courants stochastiques et l'analyse numérique ou le calcul scientifique. Le rôle des retombées — et donc des modélisations — sera de toute première importance, que ce soit en physique, en biologie (dynamique de population, modélisation d'influx nerveux, ...) ou encore dans le domaine des mathématiques financières.

Enfin, plus peut-être que dans d'autres branches des mathématiques, l'ordinateur joue et jouera un rôle croissant dans le domaine des équations aux dérivées partielles, soit pour des résolutions numériques, soit même, dans le cadre stochastique, pour des simulations numériques.

4-Interactions avec les mathématiques appliquées

Les phénomènes physiques quantitatifs sont généralement décrits par des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires dans des limites singulières variées. Par exemple, dans l'équation de **Navier-Stokes** en mécanique des fluides, on fait tendre la viscosité (mesurée par l'inverse du nombre de Reynolds) vers zéro. A la limite, on obtient l'équation d'Euler. Si la viscosité est très petite mais non nulle, on a les phénomènes de turbulence. Le développement récent des moyens de calcul et de la sophistication des algorithmes a permis de découvrir par simulation numérique des phénomènes inattendus



qu'on ne peut pas toujours reproduire expérimentalement. Mathématiquement, le comportement limite d'une suite de solutions fait intervenir le phénomène de concentration de l'énergie et d'oscillations décrites par une mesure de Young, grâce à laquelle on peut calculer toutes les limites faibles de fonctions non linéaires de la suite de gradients.

Tout récemment, cette théorie mathématique a été utilisée pour expliquer certaines transitions de phase dans les solides (alliages notamment) en fonction de la température. De tels phénomènes sont modélisés mathématiquement dans le cadre de l'élasticité non linéaire, gouvernée par une énergie non convexe. De nombreuses recherches mathématiques s'efforcent actuellement de comprendre la nature des supports possibles des mesures de Young pour analyser l'orientation des phases et les phénomènes de maillage martensitiques.

La compréhension de ces phénomènes est un modèle pour une interaction interdisciplinaire mettant en jeu des idées d'analyse non linéaire, de calcul numérique, et des méthodes asymptotiques sophistiquées.

Dans la théorie des cristaux liquides, si l'on veut prescrire les défauts, on est amené à considérer un certain type d'applications harmoniques. Là encore, l'énergie n'atteint pas son infimum, et il y a concentration dans les gradients de déformation.

5 - Mécanique des solides

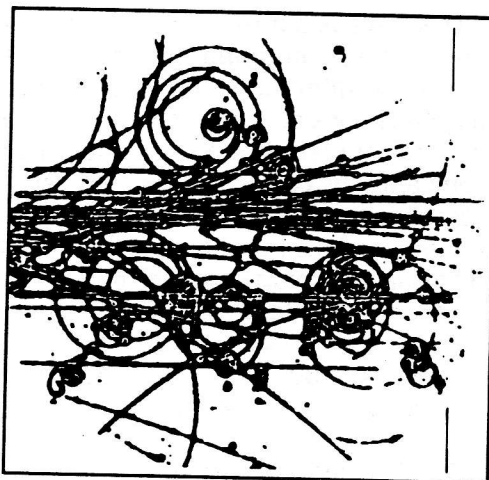
Le phénomène de "localisation des déformations" est couramment observé avant la rupture d'une pièce sollicitée mécaniquement. Sur le plan mathématique, cette localisation correspond à la perte d'ellipticité (faible) de l'opérateur tangent gouvernant l'évolution du champ de déformation (ou la perte de la convexité de rang un de l'énergie minimisée par ce champ). Cet opérateur comprenant une partie locale et des conditions aux limites, l'examen de son ellipticité permet tout aussi bien de prévoir l'apparition des bandes de localisation au cœur du matériau que leur naissance au bord de la pièce.

Cette transition d'un régime elliptique à un régime hyperbolique des équations aux dérivées partielles qui gouverne le phénomène est connue de longue date dans l'analyse des chocs en mécanique des fluides. Mais il a fallu attendre la fin des années 70 pour en percevoir la portée en mécanique des solides, en raison de la diversité et de la complexité plus grande des lois de comportement des matériaux. Tout récemment, ces travaux ont été formalisés, puis généralisés au cours des trois dernières années, notamment en France, et l'on est maintenant en mesure de prévoir l'apparition et l'orientation de ces bandes de localisation pour une gamme très large de matériaux.

Ces travaux ont des prolongements numériques importants, et ils sont également appelés à jouer un rôle important dans une nouvelle formulation des lois de comportement.

Les autres chapitres de ce rapport traitent des interactions entre :

- géométrie et algèbre
- algèbre, géométrie algébrique et théorie des nombres,
- informatique et mathématique
- les sciences cognitives
- probabilités et statistiques
- mathématique et biologie



Mouvement d'une particule de haute énergie

De nouveaux exemples de surfaces minimales

Jean-Pierre BOURGUIGNON, Palaiseau

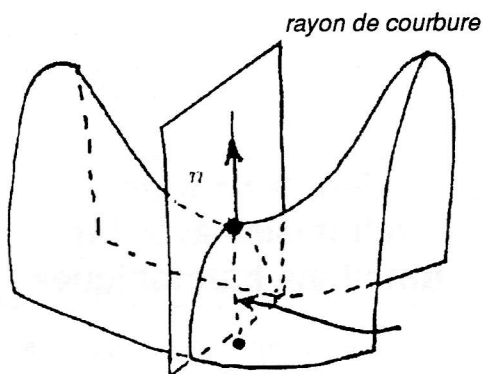
Les surfaces minimales sont les idéalizations des films de savons, et à ce titre elles ont, depuis plus d'un siècle, une place particulière dans la panoplie du mathématicien vulgarisateur. Je vais présenter un certain nombre de résultats les concernant (dont certains sont récents) avec pour but d'illustrer le passage du local au global en Géométrie.

Cette évolution est une des grandes tendances de la Géométrie depuis près de deux siècles. Il y a d'abord eu une analyse fine de la nature locale des objets géométriques, mais le tournant s'est produit avec la dissertation de Bernhard Riemann en 1854 "*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen*" (publiée seulement en 1867, après sa mort).

Les propriétés fondamentales des surfaces minimales

Les surfaces minimales sont aussi solutions d'un problème du Calcul des Variations : celui de l'aire. On s'intéresse en effet à toutes les surfaces qui s'appuient sur un contour donné (ce seront nos conditions aux limites), et on cherche la surface dont l'aire est la plus petite. Énoncé sous cette forme, le problème porte le nom du physicien belge Plateau qui s'est particulièrement intéressé aux films de savon. L'équation d'Euler de la fonctionnelle d'aire (analogue à la condition d'harmonicité pour une fonction qui est une extrémale de l'énergie) est la nullité de la courbure moyenne H en tout point de la surface Σ .

Rappelons qu'en chaque point de la surface, cette courbure s'obtient comme suit : les rayons de courbure (mesurés algébriquement) des courbes intersections de la surface avec les plans pivotant autour de la normale orientée



varient entre deux valeurs extrêmes R_{max} et R_{min} , appelées encore rayons de courbure principaux ; alors $H = (1/R_{max}) + (1/R_{min})$. En fait les plans pour lesquels ses extrémums sont atteints sont perpendiculaires entre eux comme l'a montré Meusnier. Demander la nullité de la courbure moyenne revient donc à demander que les rayons de courbure extrémaux soient opposés l'un de l'autre, autrement dit que la surface ait en chaque point une forme de selle symétrique. Il est bien entendu possible de donner une description analytique de cette condition par exemple si nous avons décrit la surface sous forme paramétrique. On verrait alors clairement que cette condition est une équation aux dérivées partielles du second ordre non-linéaire dans ses termes de plus haut degré.

L'expérience du fil de fer trempé dans un récipient rempli d'eau savonneuse suggère qu'il existe beaucoup de surfaces minimales. C'est effectivement le cas comme nous allons le montrer maintenant.

Commençons par donner les exemples les plus fameux de surfaces minimales. Bien sûr l'exemple le plus simple est le plan : l'expérience du fil de fer formant un contour plan ou le calcul des rayons de courbure le prouvent ! Un des premiers exemples, introduit par Meusnier en 1776, est l'hélicoïde qui est la surface réglée décrite par une droite en rotation et translation uniformes autour d'un axe perpendiculaire (la véri-

Extrait avec l'autorisation de l'auteur des Actes de l'Université d'été-d'automne 91, organisée à Tours par l'Apmp.

fication est laissée au lecteur). Un autre exemple fondamental est dû à Euler. Il s'agit de la *caténoïde* qui est la seule surface minimale (non plane) qui soit de révolution. Cette surface peut être obtenue en faisant tourner une chaînette bien choisie (d'où le nom de la surface) autour d'une droite perpendiculaire à son axe. Il y a bien d'autres exemples comme la *surface de Scherk*, la *surface d'Enneper*, la *surface de Schwarz*, ...

Lien des surfaces minimales avec les fonctions harmoniques

Le lien est fourni par la propriété suivante : *toute fonction coordonnée sur une surface minimale est harmonique*. Bien sûr, il y a au moins une imprécision dans l'énoncé précédent. Pour parler de fonction harmonique, il faut disposer d'un laplacien. Ici, je dois prendre le laplacien Δ_Σ qui est défini sur la surface Σ , notion qui mérite d'être précisée un peu. Une façon particulièrement agréable de formuler cette propriété est la suivante :

pour tout circuit γ tracé sur Σ ,

$$\int_\gamma \cos(\vec{n}(t), \vec{v}) \, dt = 0$$

et ceci pour toute direction $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$.

Il est décisif pour toute la théorie de donner une interprétation complexe de cette propriété. En effet on peut assimiler tout point de Σ qu'on repère par deux nombres précis réels x et y au nombre complexe $z = x + iy$ en rappelant qu'il est commode d'identifier l'opération de multiplication par i à la rotation de $+\pi/2$ dans le plan tangent à Σ . Pour parler de rotation, il suffit d'utiliser le produit scalaire induit sur le plan tangent à la surface. Pour parler du signe, il est nécessaire d'*orienter* la surface ce qui est une propriété *globale* : en effet il n'est pas toujours possible de choisir de façon cohérente des sens de rotations locaux, comme sur le ruban de Möbius, le plan projectif réel ou la bouteille de Klein.

Etablir qu'il est possible de donner un paramétrage complexe défini sur toute la surface est un théorème assez difficile (c'est une partie du *théorème d'uniformisation* qui décrit en plus tous les modèles possibles simplement connexes, i.e. sans trous). Dans toute la suite, *nous supposons que les surfaces que nous considérerons sont orientées*.

Nous admettrons alors le fait fondamental suivant :

PROPOSITION : *Si la surface Σ est bien paramétrée, alors la condition d'harmonicité d'une fonction f (i.e. l'équation $\Delta_\Sigma f = 0$) s'écrit*
 $(\partial^2 f / \partial x^2) + (\partial^2 f / \partial y^2) = 0$
où x et y désignent les deux paramètres locaux de la surface.

Il faut bien entendu définir ce qu'est un "bon" paramétrage, et établir que ces paramétrages existent au voisinage de chaque point. On demande que l'expression de la métrique dans ces coordonnées soit conforme à la métrique habituelle dans $\mathbb{R}^2$, autrement dit que l'application de paramétrage préserve les angles.

Il est traditionnel d'introduire les deux opérateurs de dérivations complexes

$\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ en posant

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

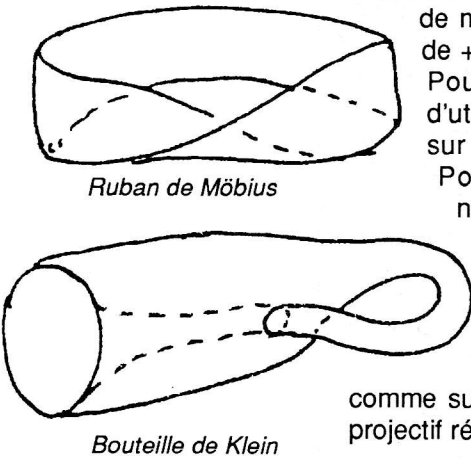
Il est alors facile de voir que

$$\Delta_\Sigma = 2 \, \partial/\partial z \, \partial/\partial \bar{z}$$

Ceci ouvre la porte au *calcul holomorphe à une variable* : en effet une fonction f est dite *holomorphe* (ou dérivable au sens complexe) si

$$\partial f / \partial \bar{z} = 0$$

et *antiholomorphe* si $\partial f / \partial z = 0$. Avec cette terminologie, une fonction f est *harmonique* si et seulement si $\partial f / \partial \bar{z}$ est *holomorphe*. Un dernier point de terminologie : une fonction f est dite *méromorphe* si et seulement si f est *localement holomorphe* lorsqu'elle prend ses valeurs dans $S^2 (= \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$, et les points où f prend la valeur ∞ s'appellent ses *pôles*.



Ruban de Möbius

Bouteille de Klein

Les résultats fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe établissent que *toute fonction holomorphe (ou antiholomorphe) est en fait analytique (au sens complexe) et réciproquement*. Il en résulte notamment que toute fonction qui est une fois dérivable au sens complexe l'est en fait indéfiniment. De même on démontre le résultat fondamental suivant : *toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe ou antiholomorphe*.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème fondamental de la théorie des surfaces minimales.

THÉOREME D'ENNEPER-WEIERSTRASS :

Soient $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe telles que f aient des zéros d'ordre au moins $2m$ aux points où g a un pôle d'ordre m . On pose $\phi_1 = \frac{1}{2} f (1 - g^2)$, $\phi_2 = \frac{1}{2} i f (1 + g^2)$, $\phi_3 = f g$.

Alors la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ dont es coordonnées x^1, x^2, x^3 sont définies en fonction du paramètre z par

$$x^i(z) = \operatorname{Re} \left(\int_0^z \phi_i(\zeta) d\zeta \right), i = 1, 2, 3$$

est une surface minimale.

Réciproquement, toute surface minimale définie sur un domaine simplement connexe a une telle représentation.

Comme les conditions mises sur le couple (f, g) sont concentrées en certains points, on a ainsi beaucoup de possibilités pour construire des surfaces minimales.

Le problème de Bernshtein

Le théorème précédent résout en quelque sorte le problème local, mais sur cette représentation il est par exemple extrêmement difficile de décider si la surface obtenue se recoupe elle-même (comme la bouteille de Klein). Une telle propriété ressort des propriétés globales de la surface et nous

allons nous intéresser dans la suite plus particulièrement aux surfaces qui ne se recoupent pas elles-mêmes (on dit qu'elles sont *plongées*).

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux surfaces qui *se projettent bien sur un plan entier*. c'est un exemple typique de propriété globale que l'on peut imposer à une surface. Le problème de la détermination de ces surfaces est fameux, et a été résolu par Sergei N. Bernshtein en 1916 qui a établi le résultat suivant.

THÉOREME DE BERNSTEIN :

Toute surface minimale de $\mathbb{R}^3$ dont la projection sur un plan parallèlement à une direction de droites est biunivoque est plane.

Une autre façon d'exprimer la condition géométrique imposée à la surface dans le théorème précédent est de dire que la surface considérée est un graphe pour un choix approprié de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. La preuve de Bernshtein est difficile et s'appuie uniquement sur des considérations analytiques. On dispose aujourd'hui de preuves beaucoup plus simples et plus géométriques (notamment par Robert Osserman).

Il est naturel de se poser la question analogue pour les hypersurfaces de $\mathbb{R}^n$, question qui a été appelée la *conjecture de Bernshtein*. Cela a conduit à une surprise, montrant une nouvelle fois que dans des dimensions différentes se produisent des phénomènes différents.

LE POINT SUR LE PROBLÈME DE BERNSTEIN

Le théorème de Bernshtein se généralise jusqu'en dimension 7 mais, dans $\mathbb{R}^8$, il existe des hypersurfaces non planes qui se projettent biunivoquement sur un plan : par exemple, le cône d'équation cartésienne

$$(x^1)^2 + \dots + (x^4)^2 - (x^5)^2 - \dots - (x^8)^2 = 0.$$

Ces résultats ont été obtenus par une série de travaux difficiles mêlant des considérations analytiques et géométriques. Ce problème a été une puissante motivation pour étudier l'équation aux dérivées partielles non-linéaire traduisant ce problème.

Les surfaces minimales de courbure totale finie : de nouveaux exemples

Pour cette section, il est nécessaire d'introduire un invariant géométrique fondamental des surfaces : la *courbure de Gauss* K qui n'est rien d'autre que le produit des courbures principales, i.e. $K = (1/R_{\max})(1/R_{\min})$. Une des grandes découvertes de Gauss est le caractère *intrinsèque* de cette quantité, ce qui signifie que K peut être calculée en faisant uniquement appel aux données géométriques sur la surface (et non à sa position dans l'espace ambiant). C'est le fameux "therema agregium" de Gauss. Cette propriété différencie fortement la courbure des Gauss K de la courbure moyenne H qui, par opposition, est qualifiée de quantité *extrinsèque*. Rappelons que pour une surface minimale les rayons de courbure principaux sont opposés, ce qui implique que la courbure de Gauss d'une surface minimale est partout négative ou nulle (et nulle seulement aux points plats).

Si la surface est compacte, la courbure de Gauss est reliée au nombre de trous t de la surface par une formule fameuse :

FORMULE DE GAUSS-BONNET - L'intégrale de la courbure de Gauss K sur une surface Σ est reliée à son nombre de trous τ par la formule :

$$\int_{\Sigma} K(x) dx = 2\pi(2 - 2\tau)$$

Ainsi sur la sphère S^2 qui n'a pas de trou,

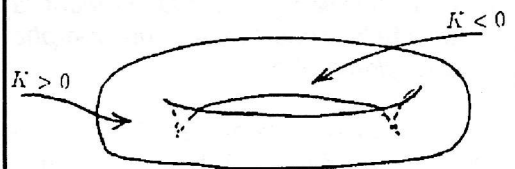
$$\int_{S^2} K(x) dx = 4\pi$$

et cette formule est vraie quelle que soit la métrique servant à calculer la quantité locale qu'est la courbure de Gauss (par exemple une métrique induite par un prolongement). Ceci a pour conséquence d'interdire sur la sphère S^2 l'existence de métriques qui soit partout à courbure de Gauss négative.

Sur le tore T^2 , produit de deux cercles (donc la surface orientée ayant un seul trou), nous avons

$$\int_{T^2} K(x) dx = 0$$

d'où l'impossibilité d'avoir sur le tore T^2 une métrique qui soit partout à courbure de Gauss positive ou partout à courbure de Gauss négative. Ceci montre que la présence de zones à courbure de Gauss positive et de zones à courbure de Gauss négative que nous pouvons constater sur un tore de révolution (une chambre à air, quoi !) est en fait un phénomène général.



Par contre sur toutes les autres surfaces compactes Σ (comme le tore à deux trous souvent appelé *bretzel*),

$$\int_{\Sigma} K(x) dx < 0$$

ce qui autorise l'existence de métriques à courbure de Gauss partout négative. Pourtant aucune de ces métriques ne sera induite par un prolongement minimal dans $\mathbb{R}^3$. Il n'existe en effet aucune surface compacte à courbure négative dans $\mathbb{R}^3$ car, si une telle surface existait, il serait possible en partant de l'infini d'avoir un premier point de contact entre la surface et une direction de plan bien définie. En ce point, la surface serait tangente au plan ayant cette direction et tout entière du même côté de son plan tangent. Ceci n'est pas possible puisque nous savons que les courbures principales doivent avoir des signes opposés. Le seul cas délicat serait la présence de points plats, circonstance qu'on peut contourner, soit en variant la direction de plan, soit en utilisant une propriété analytique importante des fonctions harmoniques, le *principe du maximum*.

Nous allons nous intéresser maintenant à des surfaces Σ non compactes, mais nous allons tout de même exiger une propriété de finitude, à savoir demander que la courbure totale

$$\int_{\Sigma} K(x) dx$$

soit finie. Ceci exige donc que la courbure décroisse suffisamment vite à l'infini pour que l'intégrale soit finie, donc géométriquement que la surface s'applatisse suffisamment à l'infini. Ceci est une condition globale sur la surface dont les conséquences sont très importantes. En

effet nous avons le théorème suivant :

THÉOREME D'OSSERMAN : *Les surfaces orientables de courbure totale finie qui se plongent minimalement dans $\mathbb{R}^3$ sont toutes obtenues à partir d'une surface compacte en envoyant un nombre fini de points à l'infini.*

Ce théorème contient donc le fait que ces surfaces sont presque compactes ce qui n'est pas trop surprenant au vu du théorème de Gauss-Bonnet qui affirme que, pour les surfaces compactes, la courbure totale contrôle le seul invariant topologique, à savoir le nombre de trous. Les seuls exemples de ces surfaces dont on a disposé jusqu'en 1986 étaient *le plan et la caténoïde*, au point de faire naître la tentation de prouver qu'ils étaient les seuls possibles. Depuis lors, grâce aux travaux de David Hoffman et Willians Meeks (et avec l'aide de l'informaticien Jim Hoffman), de très nombreux nouveaux exemples ont pu être découverts, et ceci avec un complice nouveau : *l'ordinateur*.

Le point de départ a été l'étude de la *surface de Costa* (du nom du mathématicien brésilien qui l'a étudiée le premier). Comme on le voit sur le dessin ci-dessous, cette surface a trois branches infinies, deux qui ressemblent à des branches de caténoïdes dont le normale tend vers la même direction, disons verticale pour fixer les idées, et une branche, asymptotique à un plan horizontal les séparant.

Pour cette surface, dont le type topologique est celui d'un tore privé de deux points, on disposait de sa représentation d'Enneper-Weierstrass (qui fait appel à des fonctions elliptiques), mais un des points fondamentaux a été la découverte, en la dessinant à la machine, de droites qui se trouvaient tout entières sur la surface. Ces droites étaient la trace visible de symétries discrètes dans le plongement, qui étaient très difficiles à voir sur la représentation analytique. La première réaction

d'Hoffman devant ces droites apparaissant à l'écran a été de croire à une illusion liée au processus d'approximation,... il n'en était rien, et les symétries étaient bien réelles.

L'étude des branches infinies était assez facile par une approche mathématique directe. L'ordinateur a été un outil privilégié pour comprendre ce qui se passait à distance finie en permettant notamment de tester des surfaces barrières pour s'assurer que la surface ne se recoupe pas elle-même.

La conséquence de cette première découverte a été de rendre possible la construction d'un très grand nombre d'exemples nouveaux de surfaces minimales plongées de courbure totale finie. La diversité des exemples trouvés est telle qu'il est maintenant possible de compliquer des surfaces élémentaires, et de faire des sortes de chirurgies géométriques tout en préservant la propriété de minimalité.

Un bilan

Dans cette partie, j'ai voulu souligner le rôle décisif de l'ordinateur

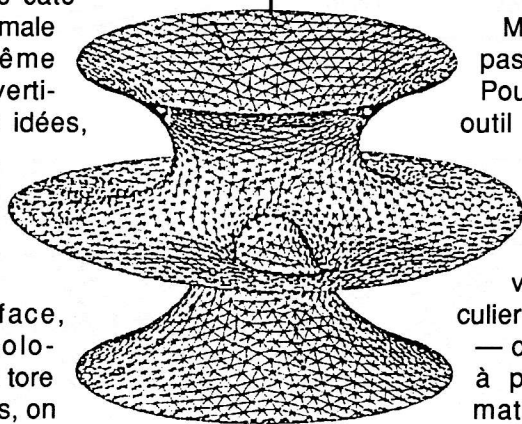
- pour *voir* ce qui se passe,
- pour *tester* des estimations.

Mais l'ordinateur n'est pas une donnée brute. Pour avoir vraiment un outil performant, il a été nécessaire de mettre au point des logiciels adaptés à ce qu'on voulait faire, en particulier :

- capables de dessiner à partir de données mathématiques (page suivante la représentation d'Enneper-Weierstrass).

- incluant des algorithmes d'approximation qui se révèlent utiles à la preuve mathématique (comme des maillages adaptatifs).

Grâce à cette nouvelle approche, on dispose aujourd'hui d'une multitude d'exemples alors qu'hier encore l'opi-

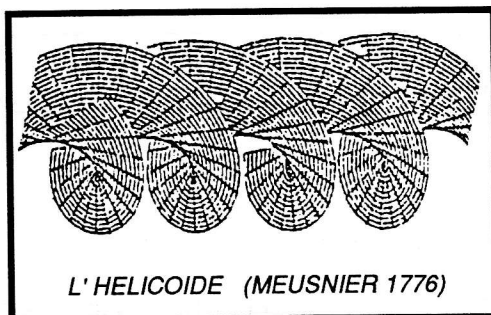


nion généralement admise était que la situation était rigide, i.e. que le petit nombre d'exemples connus épuisait la liste des situations possibles.

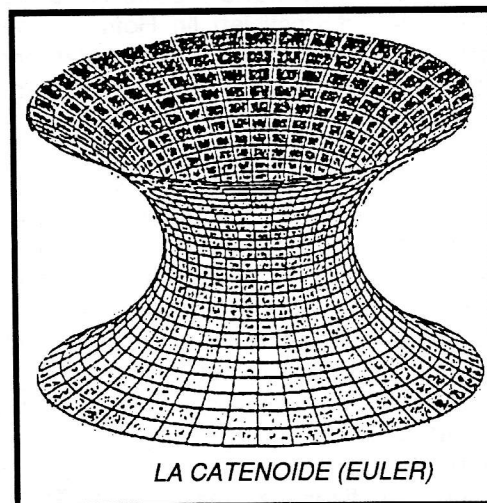
Cela a aussi pour conséquence de changer les rapports avec les collègues travaillant dans d'autres spécialités scientifiques car nous disposons maintenant d'une panoplie d'exemples qui peuvent servir de modèles pour des disciplines extrêmement diverses. Ces rapprochements se sont passés depuis quelques années seulement et ont pris très vite de l'ampleur.

Ainsi, des physiciens des milieux désordonnés, des cristallographes, des chimistes des macromolécules et des biologistes se montrent extrêmement intéressés à dialoguer avec les géomètres informaticiens pour tester des modèles du genre présenté précédemment. Cette direction de coopération

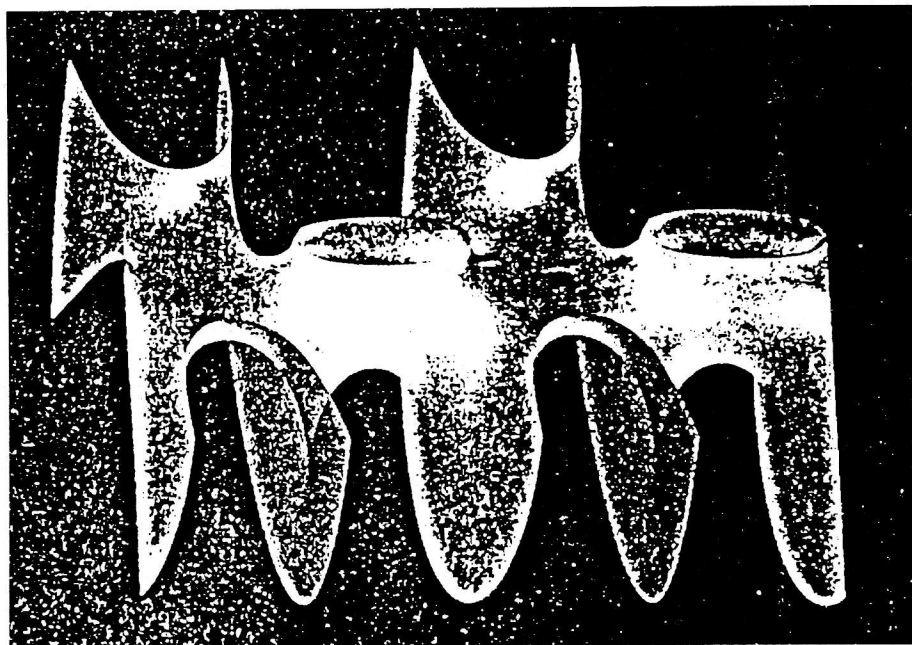
multidisciplinaire est bien entendu un peu inhabituelle : c'est un exemple de situation où *les Mathématiques sont appelées à la rescousse* comme *Science des Formes*. A côté de la modélisation numérique, dont l'impact dans le domaine industriel est de plus en plus visible, est en train de se *développer une modélisation géométrique* dont le succès dépendra en grande partie de notre capacité à former des chercheurs et des ingénieurs qui, par leur compétence polyvalente (dans laquelle les Mathématiques ont une place importante comme j'espère vous l'avoir montré), pourront intégrer dans un tout cohérent la problématique des utilisateurs, les possibilités techniques des machines et l'exigence de rigueur des Mathématiques. C'est à ce titre aussi que j'ai pensé que cet exemple pouvait intéresser les formateurs que vous êtes.



L'HELICOIDE (MEUSNIER 1776)



LA CATENOIDE (EULER)



Calcul numérique sur un ordinateur vert

Emile URLACHER, Lyon.

*Cet article fait partie des compte-rendus des journées nationales de Lyon
(cf PLOT n° 60 & 61)*

Des extraits de codes de fonctions

Les trois tableaux de nombres à un chiffre ci-dessous représentent des extraits de codes respectivement des trois fonctions indiquées en titre.

$$f_1(x) = \frac{7}{9}x$$

[illegible]

$$f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

```

000010000100001000001000001000001
0000100001000010000100001000001000010
00010001000010001000001000100000
1000100001000010001000001000100
010000100010000100010001000010
001000100001000100010001000010
001000100010001000010001000100
010001000100010001000100010001
000100010001000100010001000100
010001000100010001000100010001
000100010001000100010001000100
010001000100010001000100010001
000100010001000100010001000100
010001000100010001000100010001
0001000100010001000100010001001
0001000100100010001000100010001

```

```
010001000100100010010001001000
100100010010001001000100100010
010010001001000100100100010010
010001001001000100100100010010
010001001001001000100100100100
010010010010001001001001001001
001001001001001001001001001001
001001001001001001001001001001
00100100100100
```

$$f_3(x) = \exp x$$

[illegible]

Le calcul de codes de fonctions

L'Analyse Non Standard (ANS) permet de considérer de manière à la fois simple et rigoureuse des échelles d'ordres de grandeur différents. En fixant pour unité un entier w infiniment grand, on peut élaborer une théorie du continu sur $\mathbb{Z}^*$.

Les algorithmes conçus dans le cadre de cette théorie ne font évidemment appel qu'aux nombres entiers.

Ainsi pour une fonction réelle f on note F_k la partie entière

$$\left[\omega \cdot f\left(\frac{k}{\omega}\right) \right]$$

Afin de tabuler f sur $[0,1]$ on construit des algorithmes permettant de calculer une suite d'entiers $Y_0, \dots, Y_w$ "approximations" des entiers $F_0, \dots, F_w$, les "erreurs" étant standard.

Les réels $y_i = Y_i/w$ sont alors des valeurs approchées des réels $f(i/w)$ avec des erreurs de l'ordre de $1/w$, c'est-à-dire majorées par un réel du type n/w avec n standard.

La suite des nombres $C_k = Y_{k+1} - Y_k$ est appelée un code de la fonction f . Il est évident que la donnée d'un code de f et, par exemple, de F_0 déterminent une suite Y_k .

Dans le cas où la fonction f est de classe C^2 on peut obtenir un algorithme permettant de déterminer un de ses codes à partir d'un code de la dérivée de la manière suivante.

A la suite $(F_k)_{0 \leq k \leq w}$, on associe la suite $(RF_k)_{0 \leq k \leq w}$ où

$$RF_k = \left[\omega \left(\omega \cdot f\left(\frac{k}{\omega}\right) - F_k \right) \right]$$

De même pour la dérivée f' de f on définit deux suites $(DF_k)_{0 \leq k \leq w}$ et $(RDF_k)_{0 \leq k \leq w}$.

De la formule de Taylor on déduit alors que

$$F_{k+1} + \frac{RF_{k+1}}{\omega} = F_k + \frac{RF_k}{\omega} + \frac{DF_k + \frac{RDF_k}{\omega}}{\omega} + \partial$$

où ∂ est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$

D'où il résulte qu'une suite d'entiers Y_k satisfaisant à

$$Y_{k+1} + \frac{R_{k+1}}{\omega} = Y_k + \frac{R_k}{\omega} + \frac{RDF_k}{\omega}$$

avec $0 \leq R_k < w$ pour $0 \leq k \leq w$ et $Y_0 = F_0$ est une suite "d'approximations" du type recherché.

Ainsi le code associé à cette suite est obtenu à partir de l'algorithme suivant :

$R = RF_0$; $DF = RDF_0$;

Pour $i = 0$ à $w - 1$ **faire**

$C[i] = (DF + R) \text{ div } w$;

$R = (DF + R) \text{ mod } w$;

$DF = DF + DC[i]$;

L'algorithme obtenu est purement formel au sens où il dépend d'un paramètre unité infiniment grand. Ceci pourrait amener à penser qu'il n'est d'aucun intérêt pratique.

Pourtant cet algorithme constitue un schéma de calculs parfaitement programmable et exécutable sur un micro-ordinateur à condition de donner à l'unité w une valeur entière disponible dans le langage utilisé. Cette manière de procéder est motivée par un des outils clés de l'ANS : le principe de permanence dont il découle que certaines propriétés vérifiées lorsque l'unité est infiniment grande ont des conséquences résiduelles lorsque cette unité est assez grande mais non nécessairement infiniment grande.

Les termes des tableaux précédents, les lignes étant portées bout à bout, sont des extraits des codes, respectivement des fonctions f_1 , f_2 et f_3 , obtenus pour $w = 10000$ et $1000 \leq k \leq 1480$.

Il est à remarquer que :

- les calculs sont exacts et les erreurs sont gérées lors de la conception de l'algorithme,
- les termes du code peuvent être choisis du type "entier court" vu que les termes du code formel sont standard donc "petits".
- le calcul du code de f_3 correspond à l'intégration numérique d'une équation différentielle.

Intérêt des codes de fonction

• Le calcul numérique.

La donnée d'un code et d'une valeur d'une fonction détermine une tabulation de cette fonction. Ainsi, avec les codes des fonctions f_1 , f_2 et f_3 mentionnés plus haut et les valeurs de ces fonctions en 0, on obtient respectivement $Yw = 2777$, $Yw = 9999$ et $Yw = 27180$. L'unité pouvant être choisie en fonction de la précision exigée, ces algorithmes sont particulièrement adaptés pour les représentations graphiques sur écran de micro-ordinateur avec, par exemple, $w = 640$.

• Etude des structures des codes.

On observe facilement sur les extraits donnés plus haut que les codes des fonctions ont des structures bien déterminées. L'étude de ces structures a donné des résultats très intéressants pour la géométrie discrète dans le cas des droites et semble être prometteuse

Figure 1 : MAQUETTE F4 TYPE AIRBUS

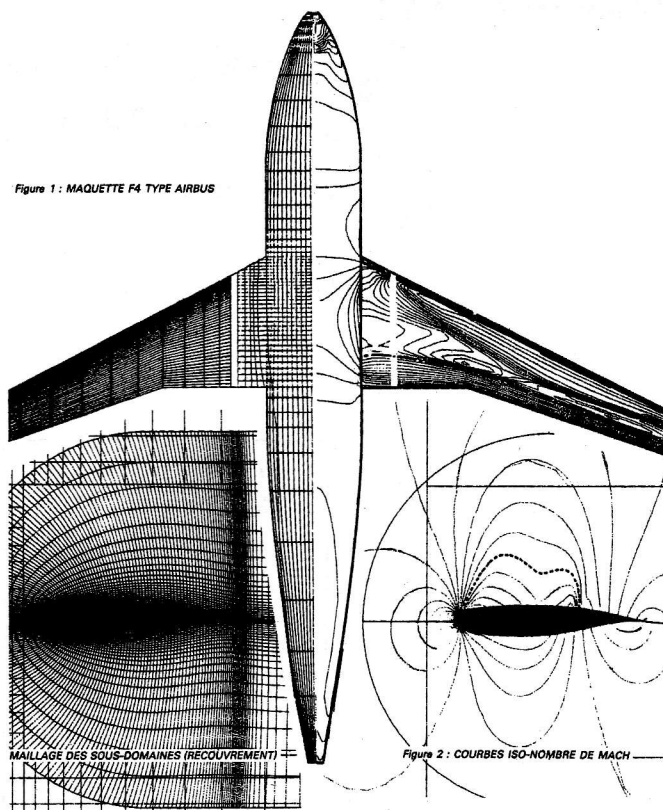


Figure 2 : COURBES ISO-NOMBRE DE MACH

Airbus - Centre de calcul
vectoriel de Palaiseau

dans le cas général (*).

• Etude numérique de propriétés qualitatives de fonctions.

Par l'intermédiaire de la théorie du continu élaborée sur $\mathbb{Z}$ on peut aborder des propriétés telle que la dérivabilité. Pour s'en faire une idée on pourra remarquer que les codes de f_2 et f_3 ont "localement" une structure similaire à celui de f_1 , c'est-à-dire une structure de code de droite.

(*) J.P. REVEILLES - *Droites discrètes et fractions continues*. ULP Département d'informatique (1990) R90/01.

A. TROESCH - *Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide et reconnaissance de segments*. IRMA Strasbourg, (1990) 426/P-239.

Simulations

Maurice GLAYMANN - Lyon

1

Table de nombres aléatoires

Un **générateur aléatoire** est un objet qui possède plusieurs états et, chaque fois qu'on le fait fonctionner, on obtient, au "hasard", un de ses états.

Voici un exemple :
Une urne contient 10 boules identiques numérotées de 0 à 9. On extrait une boule, on note le point marqué et on la remet dans l'urne. On procède à un nouveau tirage, etc.
La table suivante a été obtenue par ce procédé.

0 7 0 9	2 5 2 3	9 2 2 4	6 2 7 1	2 6 0 7
4 3 3 1	0 0 1 0	8 1 4 4	8 6 3 8	0 3 0 7
6 1 5 7	0 0 6 3	6 0 0 6	1 7 3 6	3 7 7 5
3 1 3 5	2 8 3 7	9 9 1 0	7 7 9 1	8 9 4 1
5 7 0 4	8 8 6 5	2 6 2 7	7 9 5 9	3 6 8 2
9 4 0 3	6 8 5 9	7 8 0 2	3 1 8 0	4 4 9 9
4 7 4 6	0 6 0 4	7 9 5 6	2 3 0 4	8 4 1 7
4 7 8 5	6 5 6 0	8 8 5 1	9 9 2 8	2 4 3 9
5 7 6 1	6 3 4 6	5 3 9 2	2 9 8 6	2 0 1 8
0 8 3 0	0 9 2 7	0 4 6 6	7 5 2 6	6 6 1 0
8 9 2 2	1 0 2 3	6 2 6 5	7 8 7 7	4 7 3 3
0 4 0 0	5 9 9 8	1 8 6 3	9 1 8 2	9 0 3 2
9 8 5 4	6 3 8 0	6 6 5 0	8 5 6 7	5 0 4 5
4 1 7 1	9 8 4 4	0 1 5 9	2 2 6 0	1 3 1 4
2 8 7 3	3 7 2 4	8 9 0 0	7 8 5 2	5 8 4 3
6 6 7 5	7 9 8 9	5 5 9 2	3 7 5 9	3 4 3 1
1 1 2 6	6 3 4 5	4 5 7 6	5 0 5 9	7 7 4 6
1 7 8 7	2 3 9 1	4 2 4 5	5 6 1 8	0 1 4 6
6 2 5 6	1 3 0 3	6 5 0 3	4 0 8 1	4 7 5 4
6 2 7 9	6 3 0 7	7 9 3 5	4 9 7 7	0 5 0 1
5 5 9 0	2 4 5 5	3 9 6 3	6 4 6 3	1 6 0 9
0 2 4 7	0 5 8 3	7 6 7 9	7 9 4 2	2 4 8 2
1 8 6 3	0 5 3 2	6 3 1 3	3 1 9 9	7 6 1 9
8 9 6 7	3 3 8 2	3 0 1 6	0 6 3 9	2 0 0 7
6 2 9 8	6 6 7 3	6 4 0 6	5 9 5 1	7 4 2 7
2 4 3 6	2 4 0 8	4 4 7 7	5 7 0 7	5 4 4 1
5 5 1 9	9 7 2 0	0 1 1 1	4 7 4 5	7 9 7 9
0 2 2 8	5 4 6 0	2 8 3 5	3 2 9 4	3 6 7 4
9 0 5 0	1 3 7 8	2 2 2 0	3 7 5 6	9 7 9 5
3 3 7 1	3 2 4 3	2 9 5 8	4 7 3 8	3 9 9 6

Table 1

→ Imaginez différents **tests** pour étudier le caractère **aléatoire** de cette table.

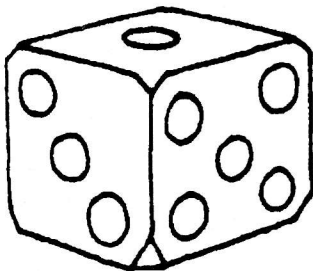
→ Trouvez d'autres générateurs aléatoires qui vous permettront d'engendrer des tables de nombres aléatoires.

2 Etude des familles de 4 enfants.

A l'aide de la table 1, étudiez les familles formées de 4 enfants et, en particulier, étudiez la statistique correspondant au caractère 0 fille, 1 fille, 2 filles, 3 filles et 4 filles par famille. Faites une étude théorique de cette situation et comparez les résultats à ceux de la statistique précédente.



3 Un dé bien équilibré



Sur trois des faces est marqué le chiffre 0 et sur les trois autres le chiffre 1.
On lance ce dé un grand nombre de fois et, à chaque jet, on note le point marqué.
La table 2 est obtenue en lançant 600 fois le dé. On donne les résultats par tranches de 4 chiffres.
Utilisez cette table pour étudier les familles de 4 enfants et comparez aux résultats précédents.

0011	0011	0001	1100	1100
1011	1101	0001	1001	0001
0110	0111	0111	0110	0111
1111	1100	0000	1000	0111
1010	1101	0011	0011	0010
0101	0101	1101	0110	1110
1111	0011	0101	1100	0100
0000	0111	1011	0011	0000
1011	1101	1100	1001	0110
1110	0111	0110	0000	0011
1101	0100	1110	0011	1011
1001	0001	0101	0011	0010
0000	1000	1111	0100	1101
1010	1100	1001	1000	1111
0001	1011	1101	1010	0011
0100	0110	0101	0010	1001
1000	0001	1100	1001	1110
1111	1001	0000	0111	1000
1111	0001	1101	0101	1110
1010	1001	1100	1111	1110
1111	1000	0101	0000	0010
0000	1101	0001	1111	1000
1101	1101	1010	0100	1111
1110	1100	0010	0101	1111
0000	1101	0100	0001	1100
0010	0100	1010	0101	1110
0010	1001	0011	1001	0011
1101	1010	0011	1001	1010
0111	1111	1011	1011	1010
0111	0001	0111	0010	1101

Table 2

4 Promenade au hasard

Un ivrogne, pour rentrer chez lui, suit un chemin bordé d'arbres distants les uns des autres d'un mètre. Il se déplace





d'un arbre à l'autre. Mais à chaque déplacement il oublie d'où il est venu et repart au **hasard** dans un sens ou dans l'autre, comme si à chaque étape, il lançait une pièce de monnaie pour savoir quelle direction prendre.

A quelle distance de l'arbre de départ est-il au bout de six étapes ?

Imaginez que l'ivrogne fasse toutes les nuits une telle promenade, mais qu'au bout de six déplacements, il tombe de sommeil et s'endort au pied d'un arbre.

Quelle est la distance moyenne entre l'arbre de départ et celui où il s'endort ? Essayez de généraliser cette étude.

Pourquoi cette nouvelle table est-elle **aléatoire** ?

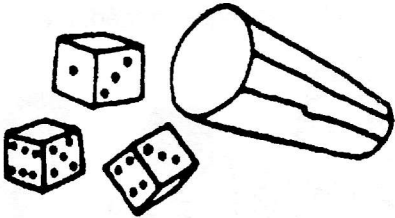
En déduire qu'elle simule des jets successifs d'un dé bien équilibré.

A l'aide de cette table, simulez la situation suivante :

On lance **deux** dés bien équilibrés et, à chaque jet, on retire le dé qui marque le plus grand point. On note le point restant. On relance les deux dés, etc...

Faites une statistique des résultats obtenus. Etudiez cette situation d'un point de vue théorique et comparez ces résultats théoriques à la statistique obtenue.

Reprendre cette situation en lançant **trois** dés et en retirant le dé qui marque le plus grand point, et on note la **somme** des points marqués restant.



5 Simulation d'un jet de dé

En supprimant les chiffres 0, 7, 8 et 9 de la table 1 on obtient la table suivante :

252	322	462	126
446	336	156	366
135	231	141	546
624	365	231	444
234	414	565	651
163	465	322	621
266	612	212	362
516	312	325	463
454	114	415	226
324	525	436	655
311	126	634	545
231	424	556	114
336	534	145	462
155	245	536	364
536	422	421	635
316	163	323	166
364	655	142	243
544	155	121	114
623	532	436	451
653	313	243	254

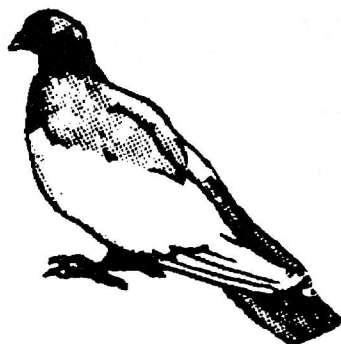
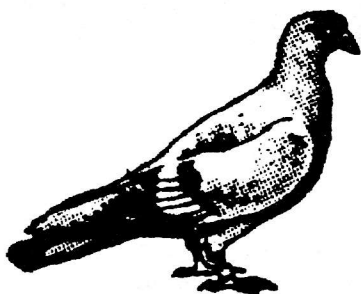
6 5 jetons

On se donne **cinq** jetons identiques : une face est marquée 0 et l'autre 1. On lance simultanément les cinq jetons. Notez la **somme** des points marqués. Analysez cette situation.

Est-elle analogue à celle qui consiste à lancer un grand nombre de fois un dé dont les faces sont marquées 0, 1, 2, 3, 4 et 5 ?

433	111
136	353
526	253
466	456
224	356
324	665
654	334
665	565
131	423
523	534
655	461
662	561
633	545
631	624
326	313
326	266
624	445
452	254
322	235
336	655

Table 3

**7**

Une histoire de pigeons

Deux chasseurs fort habiles font mouche à chaque tir.

On lâche ensemble six pigeons ; chaque chasseur tire un coup.

Combien y a-t-il en moyenne de pigeons qui restent vivants ?

Généralisez cette étude.

8

Problème des bouteilles

Avec 100 kg de verre liquide, on fabrique 100 bouteilles.

Dans la masse de verre liquide se trouvent 100 impuretés réparties de manière aléatoire.

Combien obtiendra-t-on de bouteilles

a) contenant **aucune** impureté,

b) contenant **une** impureté,
c) contenant **deux** impuretés,
d) contenant **trois ou plus** d'impuretés ?

9

Un quadrillage 5 x 5

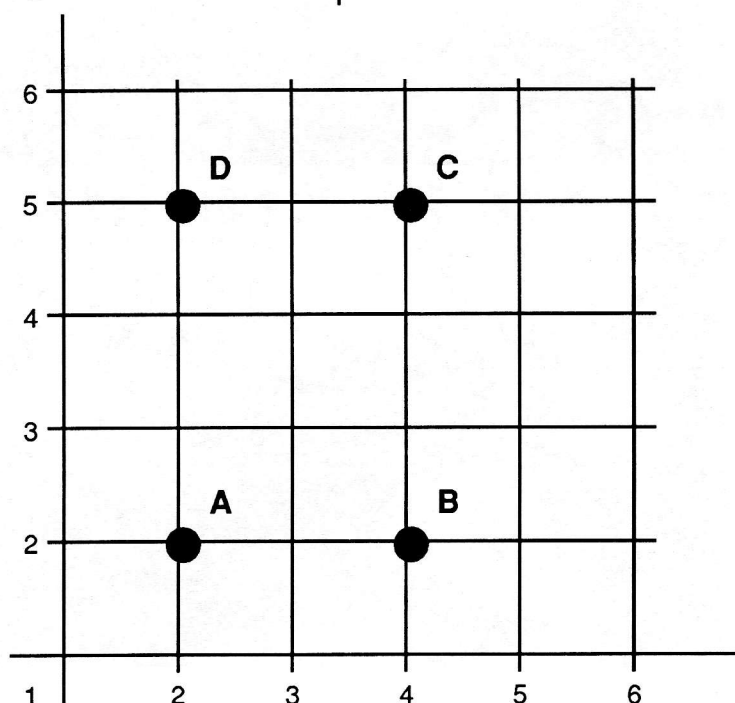
On repère les nœuds du quadrillage à l'aide d'un couple (x,y) où x et y sont des entiers naturels compris entre 1 et 6.

Une urne contient six boules identiques numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On effectue quatre tirages avec remise.

Les deux premiers tirages donnent les coordonnées d'un point A ; les deux autres celles d'un point C. On construit le rectangle ABCD.

Déterminez la probabilité pour que ABCD soit un **carré**.

Quelle est la **moyenne** des périmètres des rectangles ? Celle des aires de ces rectangles ?



Rémy JOST - Strasbourg

Une compétition interclasses et transfrontalière

- Des classes entières de 3ème et 2nde ou de niveau équivalent dans des pays étrangers concourent entre elles : elles ont à résoudre, en deux heures, 12 ou 15 exercices, l'un d'entre eux étant à rédiger en langue étrangère.
- Une épreuve d'entraînement a lieu en décembre, le concours a lieu en mars, et la distribution des prix en mai. Dans chaque secteur, deux palmarès sont établis : l'un pour les classes de troisième, l'autre pour les classes de seconde. Les classes entières sont primées grâce au parrainage d'entreprises privées et des collectivités locales.
- La compétition a déjà été organisée dans 9 secteurs européens, 3 secteurs en Alsace, 3 en Allemagne, 2 en Suisse,

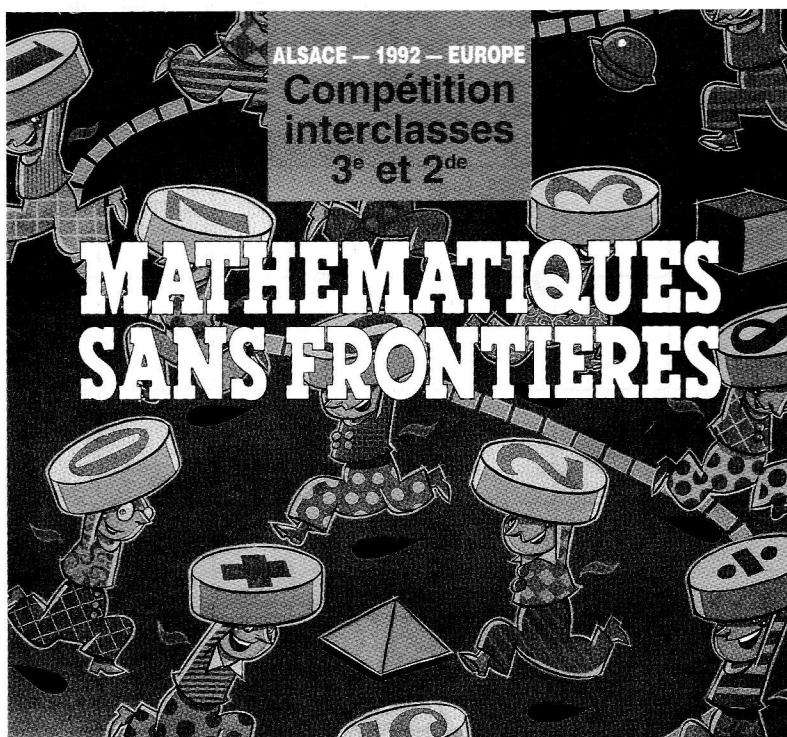
En 91-92, elle a touché près de 15 000 élèves de 573 classes et compte encore s'étendre dans l'avenir à d'autres régions d'Europe et d'ailleurs.

Ils sont de genres divers et de difficulté variée (comme le montrent les exemples ci-après. Ils cherchent à favoriser le travail en équipe et s'adressent à tous les élèves.

Pour l'équipe d'organisation, la création de deux grilles de 15 exercices par an est un travail très enrichissant qui se fait en lien avec les différents partenaires européens.

Pour plus de renseignements ou l'inscription de classes lointaines

Mathématiques sans Frontières
Lycée Fustel de Coulanges
1, place du Château
67081 STRASBOURG CEDEX



1

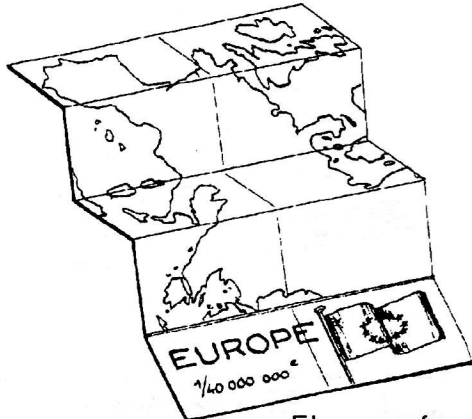
L'Europe
à vol d'oiseau

Rédiger en allemand, espagnol ou anglais la solution de cet exercice.

Professor Doktor Triangulix, Experte auf dem Gebiete des Geometrie interessiert sich für di Städte in Europa. Er kennt einige Entfernungen aus der Vogelschau, das heißt in gerader Linie :

Von Straßburg nach Konstanz (Deutschland)	151 km
von Konstanz nach Padova (Italien)	320 km
von Padova nach Brüssel (Belgien)	813 km
von Brüssel nach Luxemburg	196 km
von Luxemburg nach Saarbrücken (Deutschland)	53 km
von Saarbrücken nach Straßburg	93 km

Er behauptet als Einsiger im Stande zu sein die Entfernung, aus der Vogelschau, zwischen Straßburg und Luxemburg ausrechnen zu können ohne Benutzen der Landkarte. Könnten Sie dieses Problem lösen ? Erklären Sie ihre Antwort.



El profesor Triangulix, experto en geometria, se interesa por las ciudades de Europa. Conoce algunas distancias a vuelo de pájaro, es decir en linea recta :

de Estrasburgo a Constanza (Alemania)	151 km
de Constanza a Padua (Italia)	320 km
de Padua a Bruselas (Bélgica)	813 km
de Bruselas a Luxemburgo	196 km
de Luxemburgo a Sarrebruck (Alemania)	53 km
de Sarrebruck a Estrasburgo	93 km

Pretende ser el único que pueda calcular la distancia a vuelo de pájaro de Estrasburgo a Luxemburgo, sin utilizar mapa.

¿ Sabrian ustedes también resolver el problema ? Expliquen su respuesta.

Professor Triangulix, a top-notch surveyor, is interested in European cities. He knows a few direct distances bet-

ween cities, as le crow flies.

from Strasbourg to Constance (Germany)	151 kms
from Constance to Padua (Italy)	320 kms
from Padua to Brussels (Belgium)	813 kms
from Brussels to Luxembourg	196 kms
from Luxembourg to Sarrebrücken (Germany)	53 kms
from Sarrebrücken to Strasbourg	93 kms

He claims to be the only one who is able to calculate the direct course from Strasbourg to Luxembourg without using a map.

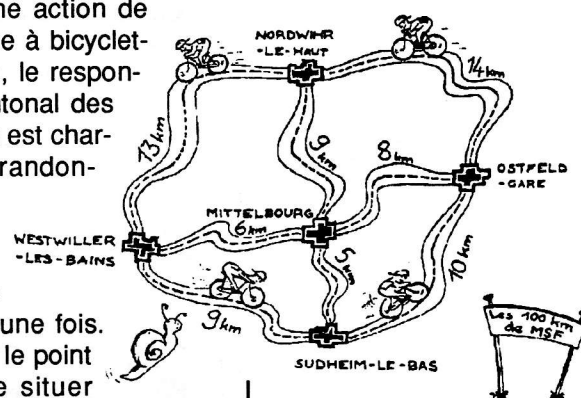
Could you solve the problem ? Explain your answer.

2

A bicyclette

Dans le cadre d'une action de promotion du tourisme à bicyclette à travers la région, le responsable de l'Office Cantonal des Sports de Mittelbourg est chargé d'organiser une randonnée cycliste.

Chaque route figurant sur la carte ci-contre doit être parcourue au moins une fois. Le point de départ et le point d'arrivée doivent se situer dans le même village et la longueur totale du circuit doit être de 100 km exactement. Décrire un itinéraire possible.



3

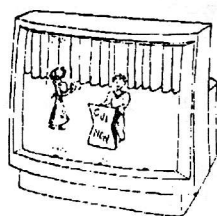
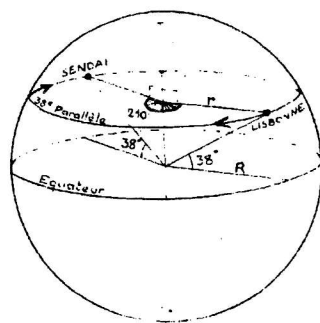
C'est loin
Cipango ?

En présentant au roi du Portugal son projet de voyage d'Europe aux "Indes" par l'Ouest, Christophe Colomb minimise le rayon de la Terre et exagère l'étendue du continent asiatique afin d'obtenir un soutien financier pour sa grande aventure.

Il estime ainsi à 4 500 km environ la distance entre les côtes portugaises et Cipango, l'actuel Japon, en suivant un parallèle terrestre. (D'après Stephen Marlowe).

Heureusement, Christophe Colomb, en 1492, a découvert l'Amérique !

Quelle distance doit-on parcourir en suivant vers l'Ouest le 38e parallèle Nord pour atteindre les côtes japonaises à partir de Lisbonne ?



Justifier la réponse en utilisant les données suivantes :

Latitude et longitude de Lisbonne (Portugal) : 38° Nord, 9° Ouest.

Latitude et longitude de Sendai (Japon) : 38° Nord, 141° Est.

Ces deux villes sont situées sur le même parallèle, l'écart des longitudes par l'Ouest étant de 210 degrés.

La longueur de l'équateur terrestre est de 40 000 km.

4 Au petit bonheur

A un jeu télévisé, l'animateur pose trois questions auxquelles il suffit de répondre par oui ou par non. Le candidat est éliminé s'il fait plus d'une erreur. François, participant au jeu, mais ignorant toutes les réponses, décide de répondre au hasard à chacune des questions.

"J'ai deux chances sur trois d'être éliminé", se dit-il.

A-t-il raison ? Justifiez votre réponse.

5 Un exercice bidon

Sur l'épave d'un bateau, Robinson a récupéré une plaque de tôle de largeur 2 et de longueur $2 + 2\pi$, exactement ! (les dimensions sont exprimées en pieds).

Dans cette plaque il peut découper un disque et un rectangle constituant le fond et la surface latérale d'un seau cylindrique (figure a).

Il peut, d'autre part, fabriquer un bidon à fond rectangulaire et sans couvercle en utilisant toute la tôle (figure b).

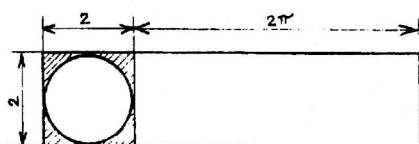


figure a

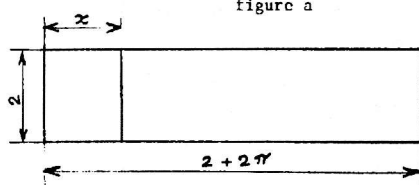
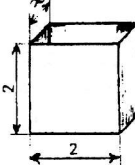
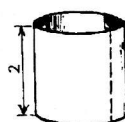


figure b



Quel récipient lui conseillez-vous pour pouvoir stocker le plus d'eau possible ? Justifiez votre réponse.

On admettra que Robinson dispose du matériel nécessaire pour rendre les boîtes étanches.

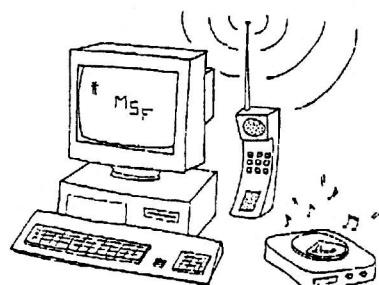
6

Les temps modernes

Un sondage auprès de 1 000 personnes a donné les résultats suivants :

70 % possèdent un lecteur de disques compacts, 85 % ont le téléphone et 45,2 % utilisent un ordinateur pour leur travail.

Peut-on affirmer que, parmi les personnes interrogées, l'une au moins possède un lecteur de disques compacts, a le téléphone et utilise un ordinateur ? Justifier la réponse.



7

Mystérieuse division

Au cours de leurs investigations, deux explorateurs, Poinrond et Maline, ont découvert le fragment de parchemin ci-contre.

Poinrond dit : "Tiens, une division !"

Maline ajoute : "Oui, mais elle est fausse."

Etes-vous de son avis ? Expliquez votre réponse.



Le serpent Hamiltonien

Robert DOMAIN, Chateauroux

*P*our une question "ancienne" posée par l'exposition "Horizons Mathématiques" depuis 1980 : Quels sont les "Serpents Hamiltoniens" de 27 cubes avec le **minimum** de cubes traversés en ligne droite par l'élastique ?

Il semble que ce minimum soit ... 2, à moins que quelque faille se soit glissée dans les arguments qui suivent.

Notons :

A - le cube central du cube $3 \times 3 \times 3$ constitué

B - les cubes adjacents (les milieux des 6 faces)

C - les cubes adjacents aux cubes B (les milieux des 12 arêtes)

D - les cubes adjacents aux cubes C (les 8 sommets)

(adjacent est donc pris au sens "adjacent par une face").

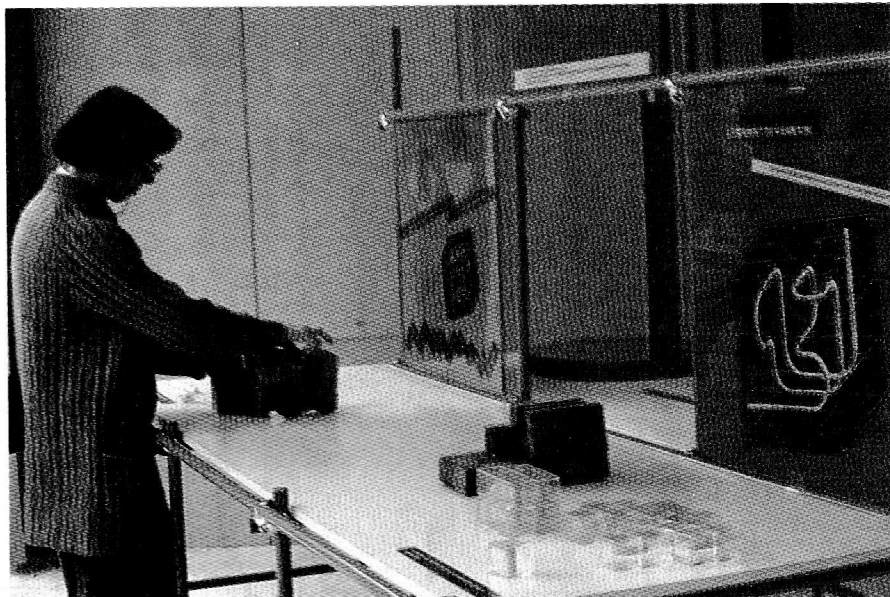
1. Un chemin dans ce cube $3 \times 3 \times 3$ doit avoir ses extrémités B ou D (par une raison classique de coloriage en 2 couleurs alternées).

2. a) Si un chemin n'a aucune "ligne droite" alors un cube C ne peut être entre deux cubes D mais obligatoirement entre un cube D et un cube B. Ou entre deux cubes B.

Chaque cube D doit donc être en contact avec :

1 cube C s'il est extrémité

2 cubes C sinon, ces cubes C n'étant pas "en contact" avec d'autres cubes D



(on "relie" à d'autres cubes D).

Pour les 8 cubes D, il "faut" donc :

16 cubes C si aucun D n'est extrémité

15 cubes C si 1 D est extrémité

14 cubes C si les 2 D sont extrémités.

Cela n'est pas possible.

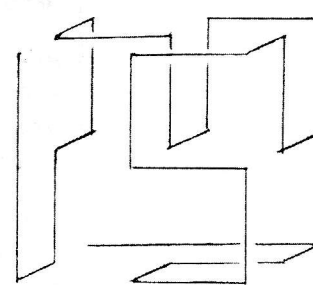
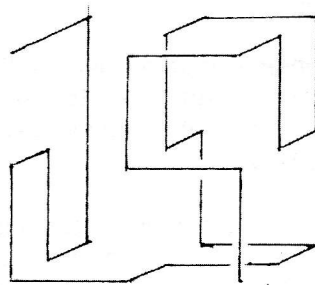
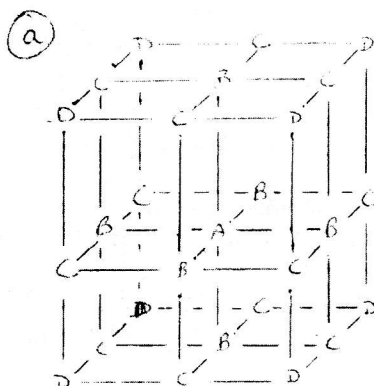
b) Si un chemin a une "ligne droite" du type D-C-D; cela économise 1 cube par rapport au cas précédent. Il faut donc 15, 14 ou 13 cubes C.

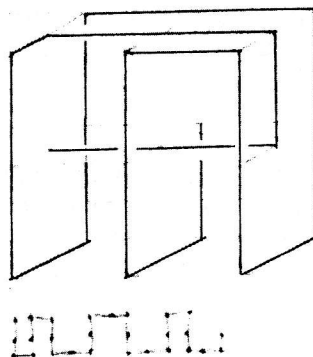
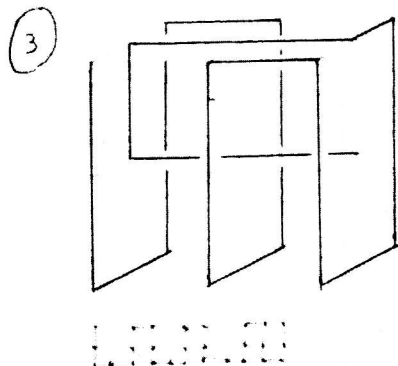
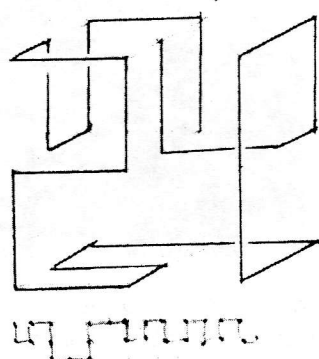
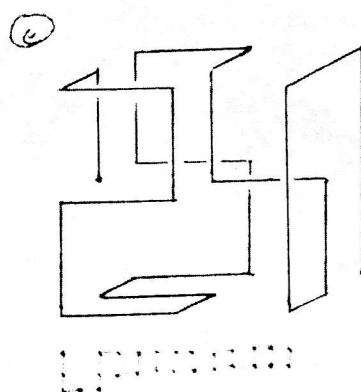
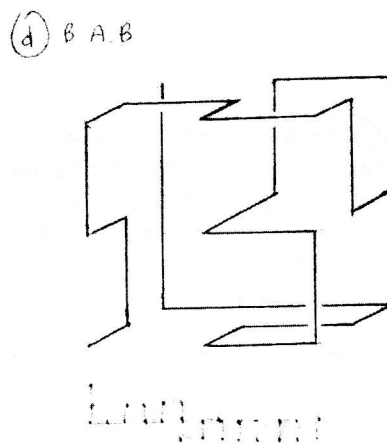
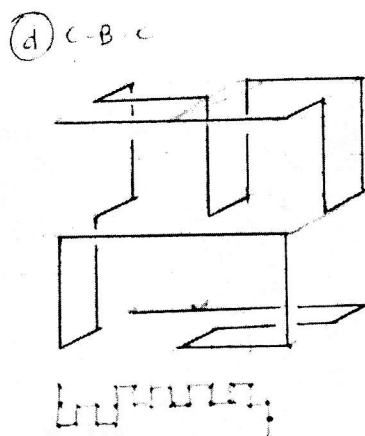
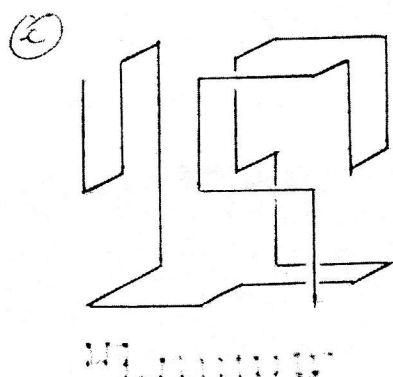
Cela n'est toujours pas possible.

c) Si un chemin a deux lignes droites du type D-C-D ; ceci économise 2 cubes C (un pour chacune de ces lignes droites) par rapport au cas a) ce qui fait que le chemin nécessite :

14 cubes C si aucun D n'est extrémité

Exposition
«Horizons Mathématiques»

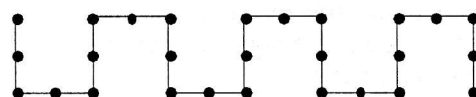




Si on exige que les deux extrémités soient en B, cela oblige à un 3e et un 4e alignements D-C-D d'après le même raisonnement qu'au a).

3. Ces chaînes, tortueuses au maximum, sont également très désagréables à remonter en cube $3 \times 3 \times 3$! Après expérience des élèves, la question à se poser est alors :

Quel est le **maximum** d'alignements possibles ?



Il semble que la chaîne :
ayant 13 alignements (2 cubes extrémités - 12 cubes coudés - 13 cubes droits)
soit la meilleure possible. Mais cela n'est que théorique car une telle chaîne ne peut couvrir les emplacements A et B car elle ne décrit commodément que les arêtes du cube $3 \times 3 \times 3$.

Or les cubes B peuvent être répartis sur deux "chaînes" carrées dans des plans perpendiculaires ce qui oblige à 2 coudes (cubes coudés) supplémentaires :

l'un pour accéder à l'un de ces carrés, le deuxième pour accéder à l'autre. Dans ces conditions il n'y a plus que 11 cubes "droits" possibles et 11 alignements.

Cette argumentation manque de rigueur. Toujours est-il que j'ai obtenu des chaînes de ce type et que je n'en ai aucune de 12 ou 13 alignements !

Problème à ... suivre !

13 cubes C si 1 cube D est extrémité.
12 cubes C si les 2 cubes D sont extrémités.
Puisqu'il y a exactement 12 cubes C, cela est techniquement possible. Pratiquement aussi. On peut mettre les alignements D-C-D à diverses places dans la chaîne.

d) Si on veut intercaler un alignement C-B-C ou un alignement B-A-B, cela n'empêche pas qu'il faut obligatoirement 2 alignements D-C-D.

e) Si on exige que le chemin se termine au centre d'une face (en un cube B) pour une extrémité et en D pour l'autre, cela oblige à un 3e alignement D-C-D.

Labyrinthes

Christian FRATTINI - Le Cannet

Autre sujet qui fait suite à la présentation d'**Horizons mathématiques** :

La façon de donner vaut mieux que ce que l'on donne.

"Labyrinthe fabuleux" passionne les élèves dès la sixième. Présenté dans tous les livres de classe, sous forme classique, il n'est jamais trouvé par mes élèves et n'en intéresse que fort peu. En voici une présentation non livresque faite par un élève.

Le labyrinthe fabuleux

Le joueur entre en A et doit ressortir en Z après avoir parcouru tout le labyrinthe.

Au milieu de chaque couloir, il y a une porte et en Z se trouve un portail.

Au début de la partie toutes les portes sont ouvertes ; le portail est fermé.

Attention :

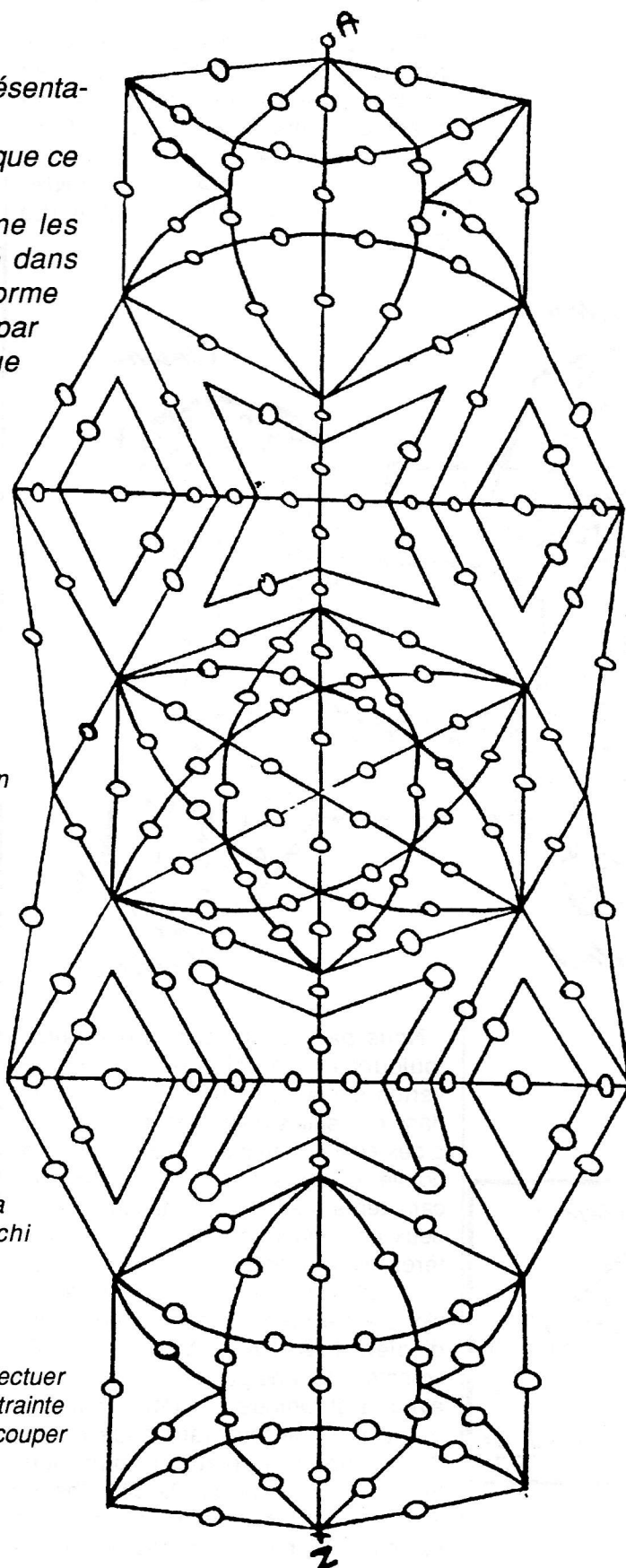
1) Dès qu'on franchit une porte elle se referme et devient infranchissable : on ne peut donc pas passer deux fois par le même couloir.

2) Le portail Z ne peut s'ouvrir que si toutes les portes sont fermées (tous les couloirs parcourus) : le joueur ne pourra donc sortir en Z qu'après avoir franchi toutes les portes du labyrinthe.

Bonne route...

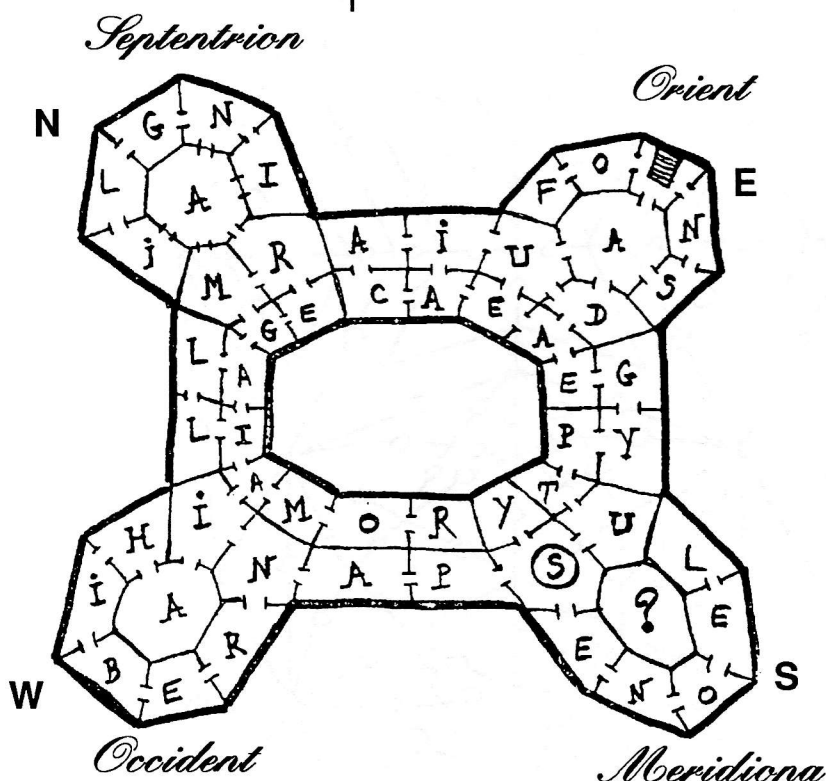
En cas de réussite le retour est à effectuer dans les mêmes conditions, avec la contrainte supplémentaire : le chemin ne peut se couper lui-même (interdit ; permis...)

Bon retour...



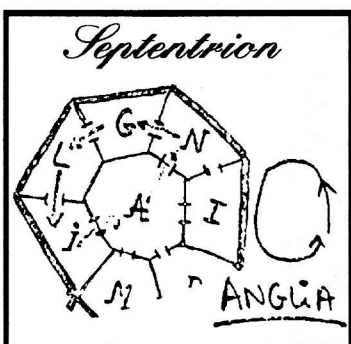
Le labyrinthe de la Bibliothèque "Le nom de la rose"

Pour se repérer dans la bibliothèque, comportant plus de 50 salles, les moines utilisaient des mots latins évoquant certains pays : AEGYPTUS, IUDAEA, ANGLIA, GERMANI, GALLIA, HIBERNIA, ROMA, YSPANIA, LEONES, FONS ADAE ACAIA (La Grèce...)



tention nous trouvâmes ANGLIA et GERMANI, qui le long du mur occidental se rattachaient à GALLIA, pour ensuite engendrer à l'extrême occident HIBERNIA et vers le mur méridional ROMA (paradis de classiques latins !) et YSPANIA. Puis venaient au midi les LEONES, l'AEGYPTUS qui vers l'orient devenaient IUDAEA et FONS ADAE. Entre orient et septentrion, le long du mur, ACAIA, une bonne synecdoque, selon l'expression de Guillaume, pour indiquer la Grèce, et de fait dans ces quatre pièces il y avait une grande abondance de poètes et philosophes de l'antiquité païenne.

Le mode de lecture était bizarre, tantôt on procédait dans une seule direction, tantôt on allait à rebours, tantôt circulait, souvent, comme je l'ai dit, une lettre servait à composer deux mots différents (et dans ces cas-là, la pièce avait une armoire réservée à un sujet et une à un autre). Mais il ne fallait évidemment pas chercher une règle de trois dans cette disposition. Il s'agissait d'un pur artifice mnémotechnique pour permettre au bibliothécaire de retrouver un ouvrage. Dire d'un livre qu'il se trouvait en *quarta Acaiae* signifiait qu'il était dans la quatrième pièce à compter de celle où apparaissait le A initial, et quant à la façon de la repérer, on supposait que le bibliothécaire savait par cœur le parcours, soit droit soit circulaire, qu'il devait faire. Par exemple ACAIA était distribué sur quatre pièces disposées en carré, ce qui veut dire que le premier A était aussi le dernier, chose que d'ailleurs nous aussi nous avons apprise en peu de temps. De même que nous avons aussitôt appris le jeu des barrages. Par exemple, en venant d'orient, aucune des pièces de ACAIA ne desservait les pièces suivantes : à ce point le labyrinthe prenait fin, et pour rejoindre la tour septentrionale il fallait passer par les trois autres. Mais naturellement les bibliothécaires savaient bien, en entrant par le FONS, que pour aller, admettons, en ANGLIA, ils devraient traverser AEGYPTUS, YSPANIA, GALLIA et GERMANI.



Nous parcourûmes d'autres salles, toujours en enregistrant nos découvertes sur mon plan. Nous passâmes dans des salles uniquement consacrées à des écrits de mathématique et d'astronomie, d'autres avec des ouvrages en caractères araméens qu'aucun de nous deux ne connaissait, d'autres en caractères plus inconnus encore, peut-être des textes de l'Inde. Nous nous déplaçions entre deux suites imbriquées qui disaient IUDAEA et AEGYPTUS. En sommes, pour ne pas ennuyer le lecteur avec la chronique de notre déchiffrement, lorsque plus tard nous mîmes définitivement le plan au point, nous fûmes convaincus que la bibliothèque était vraiment constituée et distribuée selon l'image de l'orbe terraque. Au sep-

Le nom de La Rose
Umberto ECO
(Grasset 1982).

Les trésors de Tonton Lulu

Jacques LUBCZANSKI - Paris

Une façon de vous rappeler que l'Apmp et Tangente viennent d'éditer "Le trésor de Tonton Lulu". 96 pages 21x29,7 cm en 2 couleurs qui abordent 28 problèmes (statue de la Liberté, fuseaux horaires, épaisseur du papier hygiénique, acuité visuelle...) comme sait les construire J. L. et que vous avez déjà pu rencontrer dans le Plot et ailleurs. Vous pouvez vous procurer cette brochure pour 90 F auprès de Tangente ou de l'Apmp.



La moyenne : quelle angoisse !...

Objectif : apprendre à raisonner avec des lettres.

C'est la fin du trimestre.

Bientôt le conseil de classe...

Sally a eu 11, 16 et 12 aux trois contrôles, tandis que le pauvre Charlie n'a eu que 3, 8 et 10.

Ils aimeraient bien connaître leur moyenne, mais leur prof. ne leur a pas encore dit avec quels coefficients (voir encadré) il allait la calculer...

Alors, ils font des suppositions...

1. — Si les coefficients a , b et c sont tous égaux à 1, combien vaut la moyenne z de Charlie et celle, y , de Sally ?
— Et si a , b et c sont tous égaux à 3 ? et à 9328 ?

2. — Calculer les valeurs des moyennes x et y en supposant que a , b et c valent...

2, 3 et 5	5, 3 et 2	1, 1 et 2
1, 2 et 1	2, 3 et 0	2, 0 et 3
1, 1 et -1	1, -1 et 1	1, -1 et -1
2, -1 et -1		

— Commentez les résultats obtenus

3. — Dans un repère orthonormé (une unité = 1 cm), construire les points A (3;11), B (8;16) et C (10;12).

— Pour chacun des calculs de moyenne précédents, construire le point de coordonnées $(x;y)$. Lesquels sont à l'intérieur du triangle ABC ?

... et puis, ils rêvent...

4. — Charlie aimerait bien avoir 8 de moyenne ; Sally, elle, serait heureuse avec 14.

Pouvez-vous trouver des coefficients avec lesquels c'est possible ? (indication : chercher à exprimer b et c en fonction de a , puis donner une valeur convenable à a).

5. — Le rêve de Charlie, ça serait 9. Montrer que si c'est le cas, la moyenne de Sally est alors inférieure à 14.

— Le rêve de Sally, ça serait 15. Montrer qu'alors la moyenne de Charlie est comprise entre 7 et 8,5.

6. — Quelle est la plus forte moyenne que peut espérer Charlie ? Avec quels coefficients cela arrive-t-il ? Quelle est alors la moyenne de Sally ?

— Quelle est la plus basse moyenne que peut craindre Sally ? Avec quels coefficients ? Quelle est alors celle de Charlie ?

Les coefficients

C'est une façon de donner plus d'importance à certaines notes, et moins à d'autres, pour calculer la moyenne.

Si on a trois notes N , P et Q , affectées des coefficients a , b et c , la moyenne m sera donnée par :

$$m = \frac{a.N + b.P + c.Q}{a + b + c}$$

... et même, ils délirent !

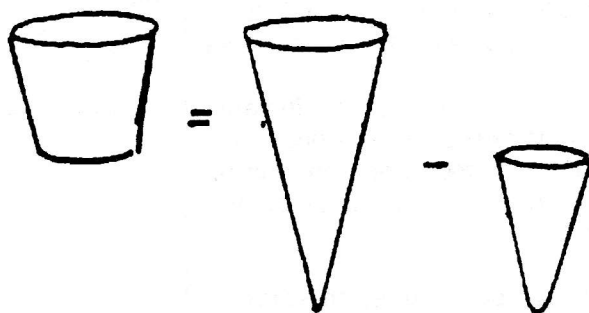
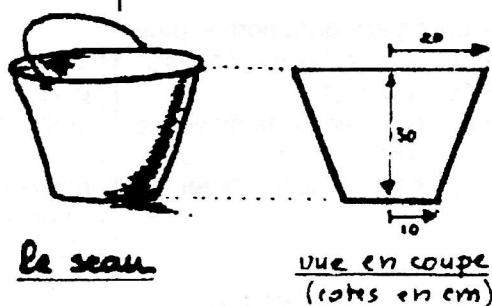
7. — 12 de moyenne pour Charlie et 18 pour Sally ?

Montrer que c'est possible avec $a = 2$; combien doivent valoir alors b et c ? Quel est alors l'effet d'une bonne note aux deux derniers contrôles ? Qu'en pensez-vous ?

8. — Ajouter au repère du (3) les points $(x; y)$ correspondant aux moyennes calculées depuis cette question.

9. — Pouvez-vous trouver un lien entre la position des points par rapport au triangle ABC et le signe des coefficients correspondants ?

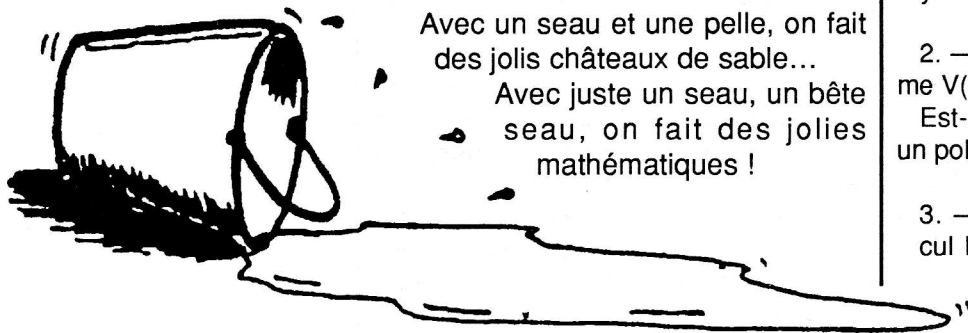
Le problème du seau...



Objectif : tracer et étudier une courbe de remplissage

Avec un seau et une pelle, on fait des jolis châteaux de sable...

Avec juste un seau, un bête seau, on fait des jolies mathématiques !



A - Capacité du seau

1. — Pour calculer sa capacité, on considère le seau comme un cône tronqué, c'est-à-dire un grand cône dans lequel on a découpé un petit cône. Calculer la hauteur et le rayon (de la base) du grand cône, ainsi que du petit cône.

2. — Un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R a un volume égal à $\frac{1}{3} \pi R^2 h$. Calculer les volumes du grand et du petit cône. En déduire la capacité, en litres, du seau.

B - Calcul des volumes

1. — A mi-hauteur : en appliquant les idées du (A), calculer le volume V d'eau contenu dans le seau lorsque celui-ci est rempli à mi-hauteur.

2. — A d'autres niveaux : reprendre la question précédente pour des hauteurs d'eau de 5, 10, 20 et 25 cm.

3. — Réunir tous les résultats obtenus jusque là en un tableau de valeurs du volume V en fonction de la hauteur d'eau h .

— Tracer par points la coupe représentative de la fonction $h \rightarrow V$ (échelle conseillée : 1 cm pour 2 cm de hauteur sur l'axe des x et 1 cm pour 2 litres sur l'axe des y).

— Lire sur le graphique la hauteur pour laquelle le seau est à moitié rempli.

C - Expression du volume

On suppose le seau rempli jusqu'à une hauteur h .

1. — Calculer en fonction de h le rayon $r(h)$ de la "surface de l'eau".

2. — Calculer en fonction de h le volume $V(h)$ contenu dans le seau.

Est-ce que la fonction $h \rightarrow V(h)$ est un polynôme ? Si oui, de quel degré ?

3. — Sauriez-vous trouver par le calcul la hauteur x pour laquelle le seau est à moitié rempli ?

Anaglyphes

André Scheibler - DIAGONALES - Canton de Vaux



Nous avons déjà, dans le PLOT n° 60, publié un article de ce nouveau bulletin de nos collègues Vaudois. Nous avons oublié de vous indiquer l'adresse qui vous permettra de commander les autres numéros. Celui dont est extrait cet article traite principalement de l'utilisation des images dans les classes de mathématiques.

Adresse : **DIAGONALES**
 André Scheibler
 Rue Samuel Cornut 7
 1860 Aigle — SUISSE

Qu'est-ce qu'un anaglyphe ?

Vous avez probablement déjà rencontré une de ces images bizarres, dans une bande dessinée, en publicité ou même dans une salle de cinéma, dédoublée et en deux couleurs, mais qui, regardée avec une paire de lunettes spéciales, apparaît comme un objet dans l'espace, une image en relief. Ce procédé s'appelle anaglyphe. Voyons un peu sa structure.

relais, comme la mémoire visuelle culturelle, les lignes de fuite formant un faisceau de droites, etc. Mais nous ne tiendrons compte ici que de la vision binoculaire.

Soit F une figure de l'espace, prenons un exemple simple, un carré $abcd$. Les rayons lumineux qui proviennent de F dans l'œil gauche O_{gauche} et l'œil droit O_{droite} forment deux faisceaux distincts qui interceptent un plan T appelé

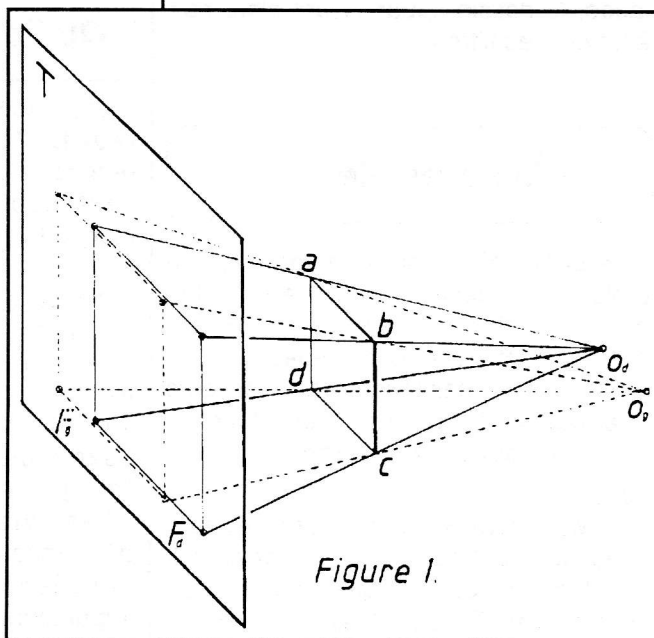


Figure 1.

La vision binoculaire

Elle permet à l'individu de percevoir le relief des objets qui sont relativement proches de lui. Au-delà de quatre ou cinq mètres, cette fonction perd quasiment toute son efficacité. D'autres phénomènes prennent alors le

tableau, selon deux figures distinctes, F_{gauche} et F_{droite} .

Imaginons maintenant que nous retirions la figure F et qu'il ne reste que le plan T contenant F_{gauche} et F_{droite} . Si l'œil gauche ne voit que F_{gauche} et l'œil droit que F_{droite} , la sensation visuelle sera la même qu'avant, la figure F apparaîtra dans l'espace pour l'observateur qui n'a pas bougé. Voilà l'illusion réalisée !

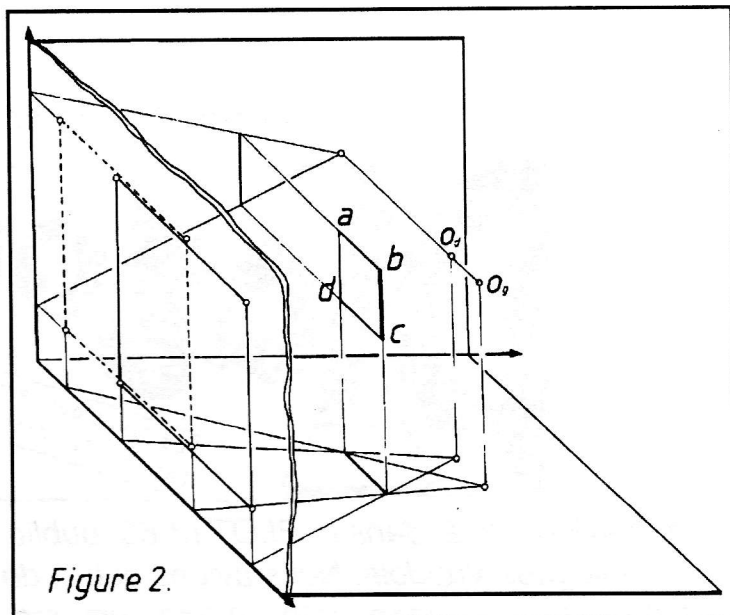


Figure 2.

Vert/rouge

Mais comment faire pour que chaque œil ne voie qu'une figure ? Avec des couleurs tout simplement. F_{gauche} sera dessinée en rouge et l'œil gauche couvert d'un filtre vert, réciproquement F_{droite} sera dessinée en vert et l'œil droit couvert d'un filtre rouge. L'illusion est alors réalisée, l'œil gauche ne voit que F_{gauche} et l'œil droit que F_{droite} . On choisit si possible deux couleurs complémentaires, le dessin apparaissant alors noir à travers les filtres.

Avec les élèves

Le phénomène est facilement présentable à des élèves. Le maître en a lui-même réalisé un exemple, avec un schéma explicatif comme ci-dessus.

Aux élèves maintenant de créer leurs anaglyphes. Le problème est donc de dessiner avec exactitude F_{gauche} et F_{droite} .

Ils devraient découvrir assez rapidement qu'il faut pour commencer choisir un objet de l'espace que l'on voudrait représenter. Ensuite il faut situer dans

l'espace les yeux de l'observateur, l'objet et le tableau T . Il n'est pas indispensable que ce dernier soit d'ailleurs vertical, mais la construction sera plus simple s'il l'est, ou s'il est horizontal. Une maquette peut être réalisée, de manière à bien comprendre le principe, et surtout mettre en évidence le rôle indispensable que va jouer le référentiel. Sans lui pas d'anaglyphe !

En effet, c'est à l'aide d'une projection horizontale et d'une projection de profil que les figures F_{gauche} et F_{droite} seront dessinées. Le référentiel sera donc un plan horizontal, un plan de profil, et le tableau T .

Où l'on retrouve Monge

Les choix des trois éléments, objet-yeux-tableau, ainsi que leurs positions respectives, doit être judicieux si l'on veut que l'effet soit payant. Une maquette grandeur nature, réalisée avec des pailles ou des pièces polydron, sera bien utile pour quelques essais et mesures.

Ensuite, il ne reste qu'à construire avec exactitude les deux projections de Monge qui permettront, comme l'explique le schéma 2, d'obtenir l'anaglyphe (ici sur un tableau vertical).

Les filtres de couleur peuvent être découpés dans des feuilles d'acétate utilisées au théâtre ou chez les imprimeurs pour réaliser les fac-similés

de pages couleurs (comme la couverture des PLOT) (voir références en fin d'article), et les stylos de couleur seront choisis de manière à ce que leurs traits disparaissent au travers des filtres correspondants. Des crayons de couleur, bien taillés, conviennent très bien.

sa projection F_{gauche} sur un plan, le tableau. Mais une autre application serait ici utile à étudier.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ F_{\text{gauche}} & \longrightarrow & F_{\text{droite}} \end{array}$$

Pour les plus forts

Les élèves du niveau supérieur pourront s'intéresser à une première application, celle de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui fait correspondre à un objet F de l'espace

Pour aller plus loin

* L'incontournable et excellent "géométrie descriptive par les anaglyphes" d'Imre Pal, éditions SPES, Lausanne. Hélas épuisé, il est cependant disponible dans les bonnes bibliothèques comme celles de vos IREM.

* On trouvera des filtres de couleur, dits gélatines, dans les librairies scolaires ou chez les fournisseurs de matériels scolaires comme Pierron.

