Calcul numérique sur un ordinateur vert

Emile URLACHER, Lyon.

Cet article fait partie des compte-rendus des journées nationales de Lyon (cf PLOT n°60 & 61)

Des extraits de codes de fonctions

Les trois tableaux de nombres à un chiffre ci-dessous représentent des extraits de codes respectivement des trois fonctions indiquées en titre.

$$f_1(x) = \frac{7}{9}x$$

```
0100100010010001000100100010001001
0001000100100010010001000100100010
0010010001000100100010010001000100
0100100010010001000100100010001001
0001000100100010010001000100100010
0010010001000100100010010001000100
0100100010010001000100100010001001
0001000100100010010001000100100010
0010010001000100100010010001000100
0100100010010001000100100010001001
0001000100100010010001000100100010
0010010001000100100010010001000100
0100100010010001000100100010001001
00010001001000100 1
```

$$f_2(x) = x^2$$

```
000010000100001000010000100001
000010000100001000100001000010
000100010000100010000100010000
100010000100001000100001000100
010000100010000100010001000010
001000100001000100010001000010
001000100010001000010001000100
010001000100010001000100010001
000100010001000100010001000100
010001000100010001000100010001
000100010001000100010001000100
010001000100010001000100010001
000100010001001000100010001001
000100010010001000100100010010
```

```
010001000100100010010001001000
100100010010001001000100100010
010010001001000100100100010010
010001001001000100100100010010
010001001001001000100100100100
010010010010001001001001001001
001001001001001001001001001001
001001001001001001001001001001
00100100100100
```

$$f_3(x) = \exp x$$

```
111211111111121111111121111111
121111111121111111121111111121
111111211111111211111111211111
111211111112111111112111111121
111111121111111211111112111111
112111111121111111211111112111
111121111111211111112111111121
111112111111121111111211111121
111111211111121111111211111121
111112111111211111121111112111
111211111121111112111111211111
121111112111111211111121111112
111111211111211111121111112111
111211111211111121111121111112
111111211111211111121111121111
121111112111112111112111112111
112111112111112111112111112111
112111112111112111112111112111
112111112111112111112111121111
121111211111211111
```

Le calcul de codes de fonctions

L'Analyse Non Standard (ANS) permet de considérer de manière à la fois simple et rigoureuse des échelles d'ordres de grandeur différents. En fixant pour unité un entier w infiniment grand, on peut élaborer une théorie du continu sur $\mathbb{Z}$ (*).

(*) : cf J. HARTHONG - *Eléments pour une théorie du continu.* Astérique 109/110 (1983)

Les algorithmes conçus dans le cadre de cette théorie ne font évidemment appel qu'aux nombres entiers.

Ainsi pour une fonction réelle f on note F_k la partie entière

$$\left[\omega . f\left(\frac{k}{\omega}\right)\right]$$

Afin de tabuler f sur [0,1] on construit des algorithmes permettant de calculer une suite d'entiers $Y_0, \ldots, Y_w$ "approximations" des entiers $F_0, \ldots, F_w$, les "erreurs " étant standard.

Les réels $\mathbf{y_i = Y_i/_w}$ sont alors des valeurs approchées des réels $\boldsymbol{f}$ **(i/w)** avec des erreurs de l'ordre de **l/w**, c'est-à-dire majorées par un réel du type **n/w** avec n standard.

La suite des nombres $C_k = Y_{k+1} - Y_k$ est appelée un code de la fonction f. Il est évident que la donnée d'un code de f et, par exemple, de F_0 déterminent une suite Y_k.

Dans le cas où la fonction f est de classe C^2 on peut obtenir un algorithme permettant de déterminer un de ses codes à partir d'un code de la dérivée de la manière suivante.

A la suite $(F_k)_{0 \leq k \leq w}$, on associe la suite $(RF_k)_{0 \leq k \leq w}$ où

$$RF_k = \left[\omega\left(\omega . f(\frac{k}{\omega}) - F_k\right)\right]$$

De même pour la dérivée f' de f on définit deux suites $(DF_k)_{0 \leq k \leq w}$ et $(RDF_k)_{0 \leq k \leq w}$.

De la formule de Taylor on déduit alors que

$$F_{k+1} + \frac{RF_{k+1}}{\omega} = F_k + \frac{RF_k}{\omega} + \frac{DF_k + \frac{RDF_k}{\omega}}{\omega} + \partial$$

où ∂ est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$

D'où il résulte qu'une suite d'entiers Y_k satisfaisant à

$$Y_{k+1} + \frac{R_{k+1}}{\omega} = Y_k + \frac{R_k}{\omega} + \frac{RDF_k}{\omega}$$

avec $0 \leq R_k < w$ pour $0 \leq k \leq w$ et $Y_0 = F_0$ est une suite "d'approximations" du type recherché.

Ainsi le code associé à cette suite est obtenu à partir de l'algorithme suivant :

R = RF$_0$; DF = RDF$_0$;
Pour i = 0 **à** w – 1 **faire**
C[i] = (DF + R) **div** w ;
R = (DF + R) **mod** w ;
DF = DF + DC [i] ;

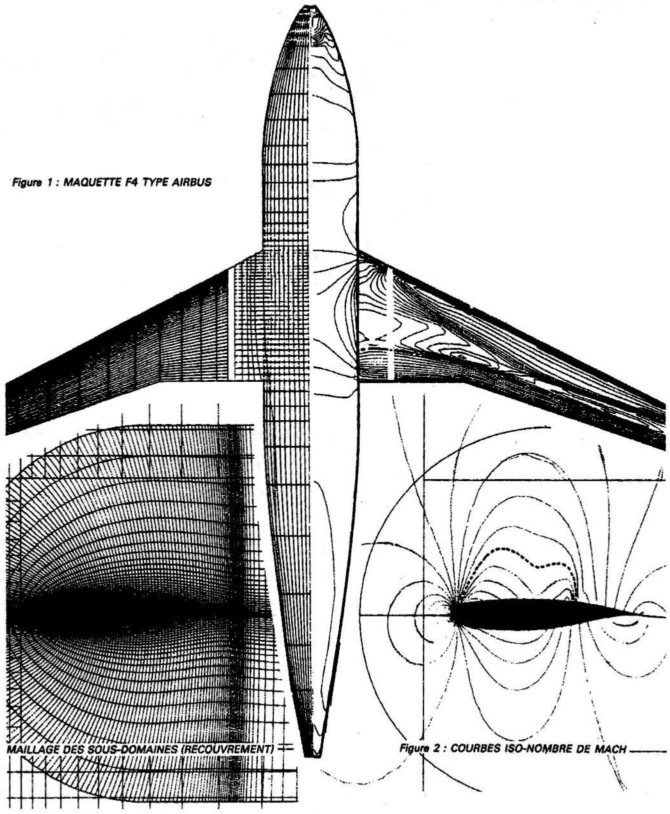
L'algorithme obtenu est purement formel au sens où il dépend d'un paramètre unité infiniment grand. Ceci pourrait amener à penser qu'il n'est d'aucun intérêt pratique.

Pourtant cet algorithme constitue un schéma de calculs parfaitement programmable et exécutable sur un microordinateur à condition de donner à l'unité w une valeur entière disponible dans le langage utilisé. Cette manière de procéder est motivée par un des outils clés de l'ANS : *le principe de permanence* dont il découle que certaines propriétés vérifiées lorsque l'unité est infiniment grande ont des conséquences résiduelles lorsque cette unité est assez grande mais non nécessairement infiniment grande.

Les termes des tableaux précédents, les lignes étant portées bout à bout, sont des extraits des codes, respectivement des fonctions f_1, f_2 et f_3, obtenus pour w = 10000 et $1000 \leq k \leq 1480$.

Il est à remarquer que :

- les calculs sont exacts et les erreurs sont gérées lors de la conception de l'algorithme,
- les termes du code peuvent être choisis du type "entier court" vu que les termes du code formel sont standard donc "petits".
- le calcul du code de f_3 correspond à l'intégration numérique d'une équation différentielle.



Airbus - Centre de calcul vectoriel de Palaiseau

Intérêt des codes de fonction

• Le calcul numérique.

La donnée d'un code et d'une valeur d'une fonction détermine une tabulation de cette fonction. Ainsi, avec les codes des fonctions f_1, f_2 et f_3 mentionnés plus haut et les valeurs de ces fonctions en 0, on obtient respectivement Yw = 2777, Yw = 9999 et Yw = 27180. L'unité pouvant être choisie en fonction de la précision exigée, ces algorithmes sont particulièrement adaptés pour les représentations graphiques sur écran de micro-ordinateur avec, par exemple, w = 640.

• Etude des structures des codes.

On observe facilement sur les extraits donnés plus haut que les codes des fonctions ont des structures bien déterminées. L'étude de ces structures a donné des résultats très intéressants pour la géométrie discrète dans le cas des droites et semble être prometteuse dans le cas général (*).

• Etude numérique de propriétés qualitatives de fonctions.

Par l'intermédiaire de la théorie du continu élaborée sur $\mathbb{Z}$ on peut aborder des propriétés telle que la dérivabilité. Pour s'en faire une idée on pourra remarquer que les codes de f_2 et f_3 ont "localement" une structure similaire à celui de f_1, c'est-à-dire une structure de code de droite.

(*) J.P. REVEILLES - *Droites discrètes et fractions continues.* ULP Département d'informatique (1990) R90/01.
A. TROESCH - *Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide et reconnaissance de segments.* IRMA Strasbourg, (1990) 426/P-239.