

Fractals et dimensions

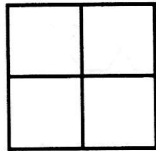
Une nouvelle dimension

La plupart des objets mathématiques que vous avez étudiés ont une dimension exprimée par un nombre entier. Par exemple des solides comme le cube et l'icosaèdre sont de dimension 3. Les carrés, les triangles, et beaucoup d'autres figures planes sont de dimension 2. Les lignes sont de dimension 1 et les points de dimension 0.

Considérons un carré de côté de longueur 1.



Réalisez plusieurs de ces carrés prédécoupés (avec les Kit-Polyèdres par exemple).



☞ Quel est le plus petit nombre de tels carrés que l'on peut mettre côté contre côté pour former un carré ?

La taille d'une figure est calculée en comptant le nombre de figures initiales nécessaires pour former cette figure.

Ici, une pièce initiale est un carré dont la mesure du côté est 1 et dont la taille est 1.

☞ Quelle est la taille du nouveau carré (fig. 2) ?

☞ Quelle est la mesure du côté du nouveau carré ?

Changements d'échelles

Des figures semblables ont la même forme, mais pas la même taille. "L'échelle" entre deux figures semblables s'obtient en calculant le rapport entre les mesures des côtés des deux figures.

$$\text{échelle} = \frac{\text{nouvelle mesure}}{\text{ancienne mesure}}$$

☞ Quelle est l'échelle entre le petit carré et le grand carré ?

☞ Trouver le rapport "nouvelle taille/ancienne taille" pour les deux carrés.

☞ Former un carré toujours plus grand,

tel que la mesure du côté soit 3. Comparer ce carré avec le petit carré. Quelle est l'échelle ? Quel est le rapport de leur taille ?

☞ Former un carré toujours plus grand, tel que la mesure du côté soit 4. Comparer ce carré avec le petit carré. Quelle est l'échelle ? Quel est le rapport de leur taille ?

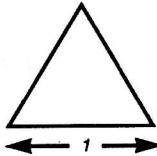
☞ Compléter le tableau pour des carrés

Echelle	2	3	4	5	6	10
Rapport de tailles						

☞ Quelle est la relation entre les deux lignes du tableau ?

Du carré au triangle

Considérons un triangle équilatéral. La mesure du côté est 1 et la taille est 1.



Triangle équilatéral

☞ Quel est le plus petit nombre de triangles équilatéraux que l'on peut mettre ensemble côté contre côté pour former un triangle semblable, mais plus grand ?

☞ Compléter le tableau pour les triangles.

Echelle	2	3	4	5	6	10
Rapport de tailles						

☞ Quelle est la relation entre les deux lignes du tableau. Comparer votre réponse avec celle du tableau des carrés.

A la recherche d'une autre dimension

Un moyen de définir la dimension d'une figure dépend de l'échelle et du rapport des tailles :

$$(\text{échelle})^d = \frac{\text{nouvelle taille}}{\text{ancienne taille}}$$

Traduit de l'anglais par Georges BORION de la régionale Apmep de Poitiers, qui a déjà publié un article sur le sujet dans le bulletin vert de décembre 1991. Nous vous renvoyons aussi aux nombreux articles parus dans le PLOT depuis 10 ans et, en particulier, au n°60 avec l'article de J. F. Colonna, au numéro 38 (1987) avec l'article de J. P. Kahane et au numéro 29 (1984) avec l'article de J.P. Delahaye.

En utilisant cette définition pour 2 carrés ou pour 2 triangles vous constatez que :

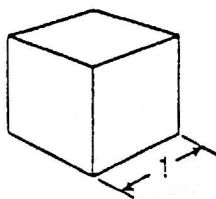
$$2^d = \frac{4}{1} \text{ d'où } 2^d = 4 \text{ donc } d = 2$$

Cette définition de la dimension confirme ce que nous savions déjà : carrés et triangles sont de dimension 2.

☞ On peut utiliser les tables pour confirmer la dimension des carrés et des triangles. En effet $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, ... $10^2 = 100$.

Du carré au cube

Considérons un cube dont l'arête a pour longueur 1.



☞ Quel est le plus petit nombre de tels cubes pour former un cube plus grand ?
☞ Quelle est l'échelle entre ces deux cubes ?

☞ Compléter le tableau pour les cubes

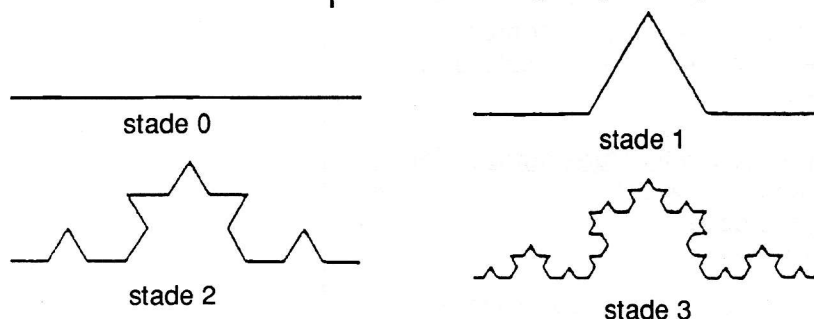
Echelle	2	3	4	5	6	10
Rapport de tailles						

☞ Quelle est la relation entre les deux lignes du tableau ?

☞ En utilisant la définition, on constate que : $2^d = 8/1$ donc $d = 3$ ce qui confirme que le cube est de dimension 3.

La dimension fractionnaire

Nous avons étudié des échelles et des tailles associées à des figures de dimension 2 ou 3. Est-il possible pour des objets mathématiques d'avoir une dimension fractionnaire ? Considérons la série de figures suivantes obtenues en remplaçant le tiers central de chaque segment par un V renversé (formé par 2 côtés d'un triangle équilatéral).

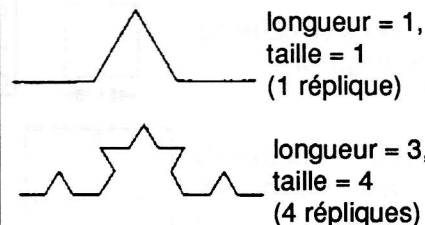


A la recherche de l'échelle

Trouver l'échelle de cette séquence de figures est difficile car la longueur totale de la figure reste la même alors que le nombre de pièces augmente. Pour simplifier la procédure, suivons ces différentes étapes :

Partir de n'importe quel stade (exemple stade 1).

Dessiner le stade suivant (stade 2) de la suite et en agrandissant de sorte qu'il contienne une copie exacte du stade précédent (ici stade 1). Notez que ce stade 2 contient exactement 4 copies (ou répliques) du stade 1 et qu'il est trois fois plus long qu'au stade 1.



☞ L'échelle est le rapport entre la nouvelle longueur et l'ancienne longueur entre deux stades consécutifs. L'échelle entre le stade 1 et le stade 2 est $3/1$.

☞ La taille peut être déterminée en comptant le nombre de répliques du stade 1 trouvées au stade 2.

ancienne taille = 1 nouvelle taille = 4
On utilise la définition de la dimension pour calculer la dimension, d , la figure formée par ce processus

$$3d = 4/1 \text{ donc } 3d = 4$$

$$\text{or } 3^1 = 3 \text{ et } 3^2 = 9.$$

Par suite la dimension de cette figure est plus grande que 1 et plus petite que 2 ; d est compris entre 1 et 2

☞ Utiliser votre calculatrice pour estimer d . Utiliser les logarithmes pour obtenir une valeur exacte.

Les fractals de Mandelbrot

La figure originelle est un segment de dimension 1. Par additions successives de segments, un objet de dimension supérieure à 1 et inférieure à 2 a été construit. Ce type d'objet de dimension fractionnaire est connu sous le nom de "fractal".

Les fractals sont des objets infiniment auto-semblables obtenus par une répétition d'additions (ou de soustractions).

L'objet atteint comme limite de ce processus répété est le FRACTAL.

Tapis-éponge de Sierpinski

Considérons maintenant un objet de dimension 2 où l'on enlève des parties de façon itérative. A chaque étape du développement du fractal, on enlève un triangle au centre de chaque triangle existant.



stade 0 stade 1 stade 2 stade 3

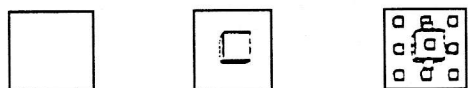
En utilisant le procédé des questions précédentes, répondre aux questions suivantes

- ☞ Quelle est l'échelle de ce fractal ?
- ☞ Quelle est sa taille ?
- ☞ Entre quels entiers se trouve la dimension du fractal ?
- ☞ Utilisez la calculatrice pour trouver une valeur approchée de la dimension de ce fractal.

Répétez l'opération avec un carré auquel on enlève le carré central

Pyramide fractale

- ☞ Trouver la dimension du fractal obtenu par addition d'un cube au centre de chaque partie carrée.



stade 0 stade 1 stade 2

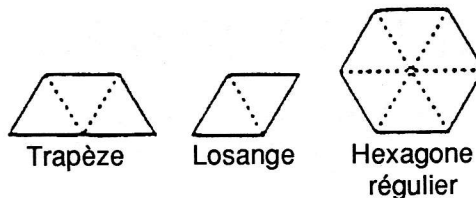
Un fractal dont la dimension est comprise entre 1 et 2 peut être formé par addition à partir d'une ligne de dimension 1 ou par soustraction à partir d'une figure de dimension 2.

- ☞ Comment peut-on former un objet de dimension comprise entre 2 et 3 ?
- ☞ Comment peut-on former un objet de dimension inférieure à 1 ?

Hyperfractals ?

Pouvez-vous...

- Déterminer le plus petit nombre d'hypercube (la figure analogue au cube mais de dimension 4) nécessaire pour obtenir un hypercube plus grand ?
- Utiliser chacun des échantillons pour construire une réplique plus grande ?



Trapeze

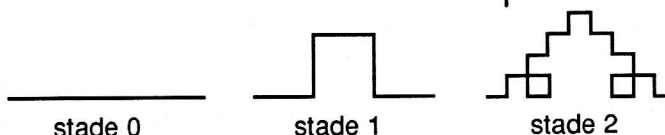
Losange

Hexagone régulier

- ☞ Développer une théorie selon laquelle toute figure de dimension 2 peut être utilisée pour construire une réplique plus grande ?

- ☞ Définir un fractal de dimension 1 et demi ?

- ☞ Trouver l'aire intérieure du fractal formé par l'addition de trois côtés d'un carré au tiers central de chaque segment unitaire (voir figure). Comparer cette aire, à l'aire du triangle circonscrit au fractal. (aide : trouver d'abord la hauteur du triangle).



stade 0

stade 1

stade 2

- ☞ Trouver le volume intérieur du fractal décrit en question 26. Comparer ce volume à celui de la pyramide à base carrée circonscrite au fractal. (aide : trouver d'abord la hauteur de cette pyramide).

Savez-vous que ...

- Avec ses montagnes, vallées et ses océans, la surface de la Terre est un fractal de dimension approximative 2,2 ?

- Benoît Mandelbrot inventa le mot "fractal" en 1975 pour désigner les formes "auto-semblables" ayant une dimension fractionnaire ?

- W. Bolyai montra, en 1832, que si deux polygones ont une même aire, l'un d'eux pouvait être décomposé en un ensemble fini de polygones qui permettent de reconstituer l'autre ?

- M. Dane démontra en 1900 que la réponse au 3e problème d'Hilbert "si deux polyèdres ont le même volume, chacun d'eux peut être décomposé en un nombre fini de polyèdres qui permettent de reconstituer l'autre" est non ? (en fait, il faut un nombre infini de tétraèdres pour faire cette reconstitution).