

Le serpent Hamiltonien

Robert DOMAIN, Chateauroux

*P*our une question "ancienne" posée par l'exposition "Horizons Mathématiques" depuis 1980 : Quels sont les "Serpents Hamiltoniens" de 27 cubes avec le **minimum** de cubes traversés en ligne droite par l'élastique ?

Il semble que ce minimum soit ... 2, à moins que quelque faille se soit glissée dans les arguments qui suivent.

Notons :

A - le cube central du cube $3 \times 3 \times 3$ constitué

B - les cubes adjacents (les milieux des 6 faces)

C - les cubes adjacents aux cubes B (les milieux des 12 arêtes)

D - les cubes adjacents aux cubes C (les 8 sommets)

(adjacent est donc pris au sens "adjacent par une face").

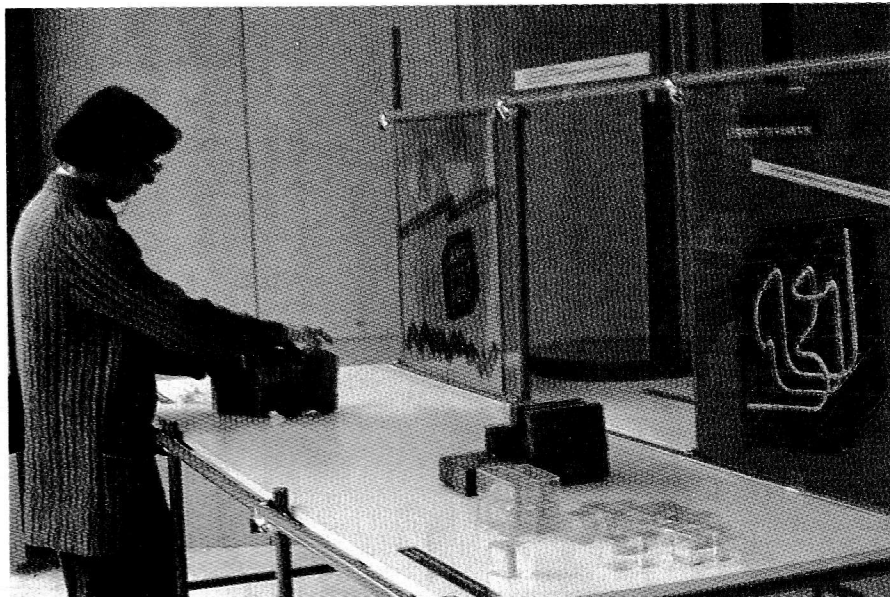
1. Un chemin dans ce cube $3 \times 3 \times 3$ doit avoir ses extrémités B ou D (par une raison classique de coloriage en 2 couleurs alternées).

2. a) Si un chemin n'a aucune "ligne droite" alors un cube C ne peut être entre deux cubes D mais obligatoirement entre un cube D et un cube B. Ou entre deux cubes B.

Chaque cube D doit donc être en contact avec :

1 cube C s'il est extrémité

2 cubes C sinon, ces cubes C n'étant pas "en contact" avec d'autres cubes D



(on "relie" à d'autres cubes D).

Pour les 8 cubes D, il "faut" donc :

16 cubes C si aucun D n'est extrémité

15 cubes C si 1 D est extrémité

14 cubes C si les 2 D sont extrémités.

Cela n'est pas possible.

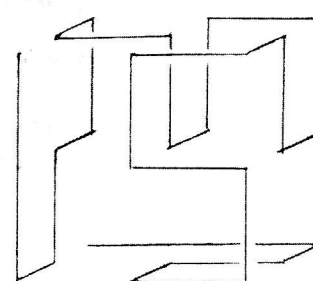
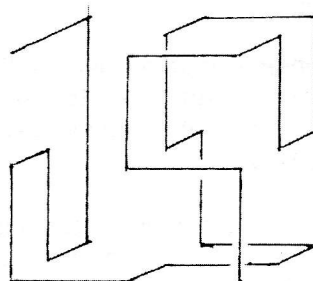
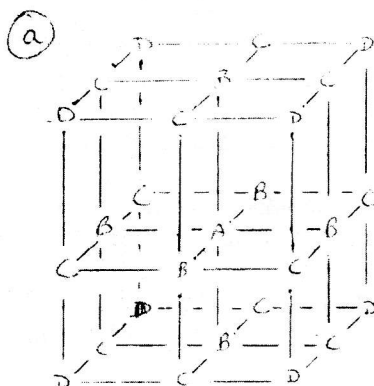
b) Si un chemin a une "ligne droite" du type D-C-D; cela économise 1 cube par rapport au cas précédent. Il faut donc 15, 14 ou 13 cubes C.

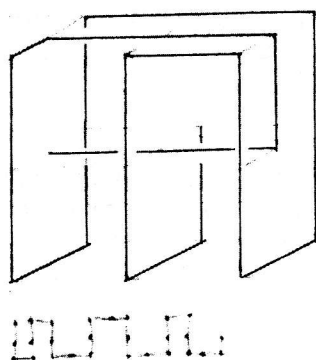
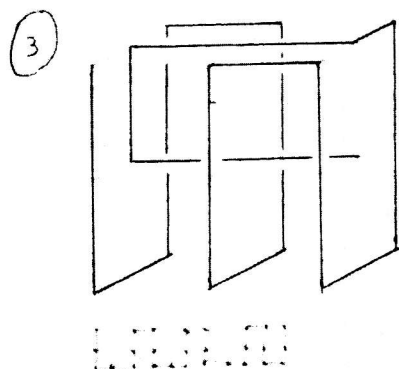
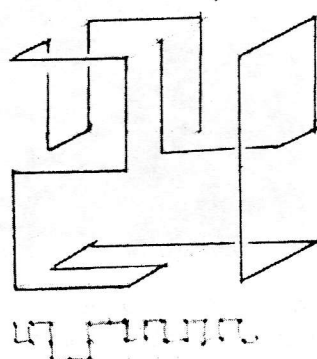
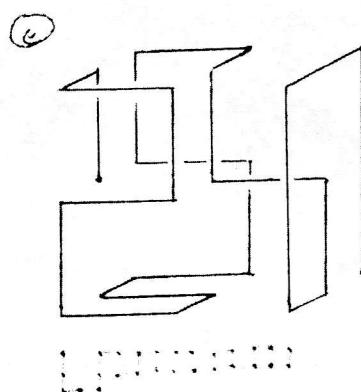
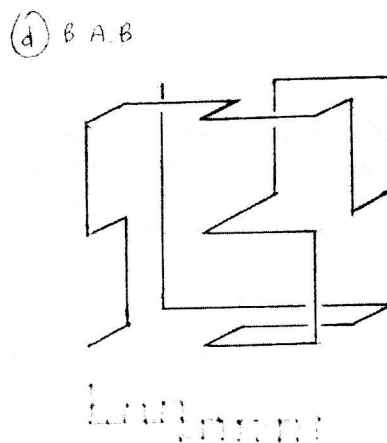
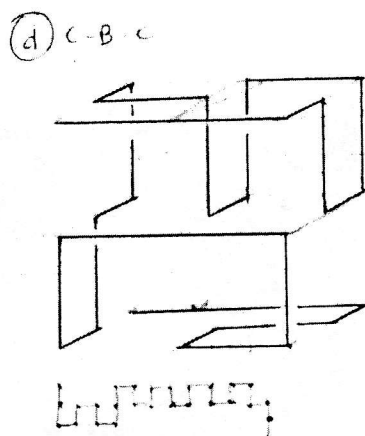
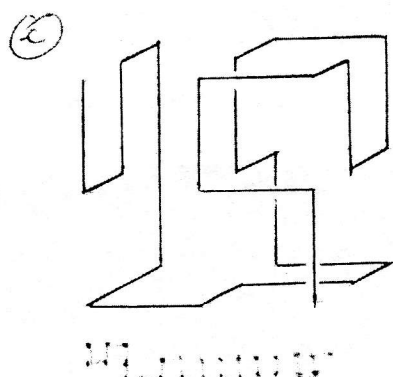
Cela n'est toujours pas possible.

c) Si un chemin a deux lignes droites du type D-C-D ; ceci économise 2 cubes C (un pour chacune de ces lignes droites) par rapport au cas a) ce qui fait que le chemin nécessite :

14 cubes C si aucun D n'est extrémité

Exposition
«Horizons Mathématiques»

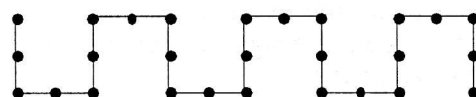




Si on exige que les deux extrémités soient en B, cela oblige à un 3e et un 4e alignements D-C-D d'après le même raisonnement qu'au a).

3. Ces chaînes, tortueuses au maximum, sont également très désagréables à remonter en cube $3 \times 3 \times 3$! Après expérience des élèves, la question à se poser est alors :

Quel est le **maximum** d'alignements possibles ?



Il semble que la chaîne :
ayant 13 alignements (2 cubes extrémités - 12 cubes coudés - 13 cubes droits)
soit la meilleure possible. Mais cela n'est que théorique car une telle chaîne ne peut couvrir les emplacements A et B car elle ne décrit commodément que les arêtes du cube $3 \times 3 \times 3$.

Or les cubes B peuvent être répartis sur deux "chaînes" carrées dans des plans perpendiculaires ce qui oblige à 2 coudes (cubes coudés) supplémentaires :

l'un pour accéder à l'un de ces carrés, le deuxième pour accéder à l'autre. Dans ces conditions il n'y a plus que 11 cubes "droits" possibles et 11 alignements.

Cette argumentation manque de rigueur. Toujours est-il que j'ai obtenu des chaînes de ce type et que je n'en ai aucune de 12 ou 13 alignements !

Problème à ... suivre !

13 cubes C si 1 cube D est extrémité.
12 cubes C si les 2 cubes D sont extrémités.
Puisqu'il y a exactement 12 cubes C, cela est techniquement possible. Pratiquement aussi. On peut mettre les alignements D-C-D à diverses places dans la chaîne.

d) Si on veut intercaler un alignement C-B-C ou un alignement B-A-B, cela n'empêche pas qu'il faut obligatoirement 2 alignements D-C-D.

e) Si on exige que le chemin se termine au centre d'une face (en un cube B) pour une extrémité et en D pour l'autre, cela oblige à un 3e alignement D-C-D.