

De nouveaux exemples de surfaces minimales

Jean-Pierre BOURGUIGNON, Palaiseau

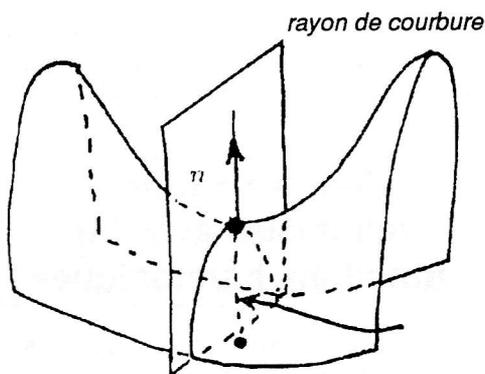
Les surfaces minimales sont les idéalizations des films de savons, et à ce titre elles ont, depuis plus d'un siècle, une place particulière dans la panoplie du mathématicien vulgarisateur. Je vais présenter un certain nombre de résultats les concernant (dont certains sont récents) avec pour but d'illustrer le passage du local au global en Géométrie.

Cette évolution est une des grandes tendances de la Géométrie depuis près de deux siècles. Il y a d'abord eu une analyse fine de la nature locale des objets géométriques, mais le tournant s'est produit avec la dissertation de Bernhard Riemann en 1854 "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zur Grunde liegen" (publiée seulement en 1867, après sa mort).

Les propriétés fondamentales des surfaces minimales

Les surfaces minimales sont aussi solutions d'un problème du Calcul des Variations : celui de l'aire. On s'intéresse en effet à toutes les surfaces qui s'appuient sur un contour donné (ce seront nos conditions aux limites), et on cherche la surface dont l'aire est la plus petite. Énoncé sous cette forme, le problème porte le nom du physicien belge Plateau qui s'est particulièrement intéressé aux films de savon. L'équation d'Euler de la fonctionnelle d'aire (analogue à la condition d'harmonicité pour une fonction qui est une extrémale de l'énergie) est la nullité de la courbure moyenne H en tout point de la surface Σ .

Rappelons qu'en chaque point de la surface, cette courbure s'obtient comme suit : les rayons de courbure (mesurés algébriquement) des courbes intersections de la surface avec les plans pivotant autour de la normale orientée



varient entre deux valeurs extrêmes R_{max} et R_{min} , appelées encore rayons de courbure principaux ; alors $H = (1/R_{max}) + (1/R_{min})$. En fait les plans pour lesquels ses extrémums sont atteints sont perpendiculaires entre eux comme l'a montré Meusnier. Demander la nullité de la courbure moyenne revient donc à demander que les rayons de courbure extrémaux soient opposés l'un de l'autre, autrement dit que la surface ait en chaque point une forme de selle symétrique. Il est bien entendu possible de donner une description analytique de cette condition par exemple si nous avons décrit la surface sous forme paramétrique. On verrait alors clairement que cette condition est une équation aux dérivées partielles du second ordre non-linéaire dans ses termes de plus haut degré.

L'expérience du fil de fer trempé dans un récipient rempli d'eau savonneuse suggère qu'il existe beaucoup de surfaces minimales. C'est effectivement le cas comme nous allons le montrer maintenant.

Commençons par donner les exemples les plus fameux de surfaces minimales. Bien sûr l'exemple le plus simple est le plan : l'expérience du fil de fer formant un contour plan ou le calcul des rayons de courbure le prouvent ! Un des premiers exemples, introduit par Meusnier en 1776, est l'hélicoïde qui est la surface réglée décrite par une droite en rotation et translation uniformes autour d'un axe perpendiculaire (la véri-

Extrait avec l'autorisation de l'auteur des Actes de l'Université d'été-d'automne 91, organisée à Tours par l'Apmp.

fication est laissée au lecteur). Un autre exemple fondamental est dû à Euler. Il s'agit de la *caténoïde* qui est la seule surface minimale (non plane) qui soit de révolution. Cette surface peut être obtenue en faisant tourner une chaînette bien choisie (d'où le nom de la surface) autour d'une droite perpendiculaire à son axe. Il y a bien d'autres exemples comme la *surface de Scherk*, la *surface d'Enneper*, la *surface de Schwarz*, ...

Lien des surfaces minimales avec les fonctions harmoniques

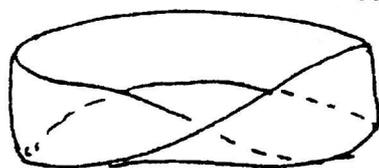
Le lien est fourni par la propriété suivante : *toute fonction coordonnée sur une surface minimale est harmonique*. Bien sûr, il y a au moins une imprécision dans l'énoncé précédent. Pour parler de fonction harmonique, il faut disposer d'un laplacien. Ici, je dois prendre le laplacien Δ_Σ qui est défini sur la surface Σ , notion qui mérite d'être précisée un peu. Une façon particulièrement agréable de formuler cette propriété est la suivante :

pour tout circuit γ tracé sur Σ ,

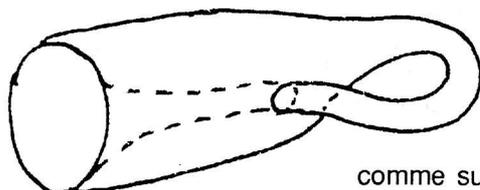
$$\int_\gamma \cos(\vec{n}(t), \vec{v}) dt = 0$$

et ceci pour toute direction \vec{v} de \mathbb{R}^3 .

Il est décisif pour toute la théorie de donner une interprétation complexe de cette propriété. En effet on peut assimiler tout point de Σ qu'on repère par deux nombres précis réels x et y au nombre complexe $z = x + iy$ en rappelant qu'il est commode d'identifier l'opération de multiplication par i à la rotation de $+\pi/2$ dans le plan tangent à Σ . Pour parler de rotation, il suffit d'utiliser le produit scalaire induit sur le plan tangent à la surface. Pour parler du signe, il est nécessaire d'*orienter* la surface ce qui est une propriété *globale* : en effet il n'est pas toujours possible de choisir de façon cohérente des sens de rotations locaux, comme sur le ruban de Möbius, le plan projectif réel ou la bouteille de Klein.



Ruban de Möbius



Bouteille de Klein

Etablir qu'il est possible de donner un paramétrage complexe défini sur toute la surface est un théorème assez difficile (c'est une partie du *théorème d'uniformisation* qui décrit en plus tous les modèles possibles simplement connexes, i.e. sans trous). Dans toute la suite, nous supposons que les surfaces que nous considérerons sont orientées.

Nous admettons alors le fait fondamental suivant :

PROPOSITION : *Si la surface Σ est bien paramétrée, alors la condition d'harmonicité d'une fonction f (i.e. l'équation $\Delta_\Sigma f = 0$) s'écrit*

$$(\partial^2 f / \partial x^2) + (\partial^2 f / \partial y^2) = 0$$

où x et y désignent les deux paramètres locaux de la surface.

Il faut bien entendu définir ce qu'est un "bon" paramétrage, et établir que ces paramétrages existent au voisinage de chaque point. On demande que l'expression de la métrique dans ces coordonnées soit conforme à la métrique habituelle dans \mathbb{R}^2 , autrement dit que l'application de paramétrage préserve les angles.

Il est traditionnel d'introduire les deux opérateurs de dérivations complexes

$\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \bar{z}$ en posant

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

Il est alors facile de voir que

$$\Delta_\Sigma = \partial^2 / \partial z \partial \bar{z}$$

Ceci ouvre la porte au *calcul holomorphe à une variable* : en effet une fonction f est dite *holomorphe* (ou dérivable au sens complexe) si

$$\partial f / \partial \bar{z} = 0$$

et *antiholomorphe* si $\partial f / \partial z = 0$. Avec cette terminologie, une fonction f est *harmonique* si et seulement si $\partial f / \partial z$ est *holomorphe*. Un dernier point de terminologie : une fonction f est dite *méromorphe* si et seulement si f est *localement holomorphe* lorsqu'elle prend ses valeurs dans $S^2 (= \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})$, et les points où f prend la valeur ∞ s'appellent ses *pôles*.

Les résultats fondamentaux de la théorie des fonctions d'une variable complexe établissent que *toute fonction holomorphe (ou antiholomorphe) est en fait analytique (au sens complexe) et réciproquement*. Il en résulte notamment que toute fonction qui est une fois dérivable au sens complexe l'est en fait indéfiniment. De même on démontre le résultat fondamental suivant : *toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe ou antiholomorphe*.

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème fondamental de la théorie des surfaces minimales.

THÉOREME D'ENNEPER-WEIERSTRASS :

Soient $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe telles que f aient des zéros d'ordre au moins $2m$ aux points où g a un pôle d'ordre m . On pose $\varphi_1 = \frac{1}{2} f (1 - g^2)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2} i f (1 + g^2)$, $\varphi_3 = f g$.

Alors la surface Σ de \mathbb{R}^3 dont es coordonnées x^1, x^2, x^3 sont définies en fonction du paramètre z par

$$x^i(z) = \operatorname{Re} \left(\int_0^z \varphi_i(\zeta) d\zeta \right), \quad i = 1, 2, 3$$

est une surface minimale.

Réciproquement, toute surface minimale définie sur un domaine simplement connexe a une telle représentation.

Comme les conditions mises sur le couple (f, g) sont concentrées en certains points, on a ainsi beaucoup de possibilités pour construire des surfaces minimales.

Le problème de Bernshtein

Le théorème précédent résout en quelque sorte le problème local, mais sur cette représentation il est par exemple extrêmement difficile de décider si la surface obtenue se recoupe elle-même (comme la bouteille de Klein). Une telle propriété ressort des propriétés globales de la surface et nous

allons nous intéresser dans la suite plus particulièrement aux surfaces qui ne se recoupent pas elles-mêmes (on dit qu'elles sont *plongées*).

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux surfaces qui *se projettent bien sur un plan entier*. c'est un exemple typique de propriété globale que l'on peut imposer à une surface. Le problème de la détermination de ces surfaces est fameux, et a été résolu par Sergei N. Bernshtein en 1916 qui a établi le résultat suivant.

THÉOREME DE BERNSTEIN :

Toute surface minimale de \mathbb{R}^3 dont la projection sur un plan parallèlement à une direction de droites est biunivoque est plane.

Une autre façon d'exprimer la condition géométrique imposée à la surface dans le théorème précédent est de dire que la surface considérée est un graphe pour un choix approprié de coordonnées dans \mathbb{R}^3 . La preuve de Bernshtein est difficile et s'appuie uniquement sur des considérations analytiques. On dispose aujourd'hui de preuves beaucoup plus simples et plus géométriques (notamment par Robert Osserman).

Il est naturel de se poser la question analogue pour les hypersurfaces de \mathbb{R}^n , question qui a été appelée la *conjecture de Bernshtein*. Cela a conduit à une surprise, montrant une nouvelle fois que dans des dimensions différentes se produisent des phénomènes différents.

LE POINT SUR LE PROBLÈME DE BERNSTEIN

Le théorème de Bernshtein se généralise jusqu'en dimension 7 mais, dans \mathbb{R}^8 , il existe des hypersurfaces non planes qui se projettent biunivoquement sur un plan : par exemple, le cône d'équation cartésienne

$$(x^1)^2 + \dots + (x^4)^2 - (x^5)^2 - \dots - (x^8)^2 = 0.$$

Ces résultats ont été obtenus par une série de travaux difficiles mêlant des considérations analytiques et géométriques. Ce problème a été une puissante motivation pour étudier l'équation aux dérivées partielles non-linéaire traduisant ce problème.

Les surfaces minimales de courbure totale finie : de nouveaux exemples

Pour cette section, il est nécessaire d'introduire un invariant géométrique fondamental des surfaces : la *courbure de Gauss* K qui n'est rien d'autre que le produit des courbures principales, i.e. $K = (1/R_{\max})(1/R_{\min})$. Une des grandes découvertes de Gauss est le caractère *intrinsèque* de cette quantité, ce qui signifie que K peut être calculée en faisant uniquement appel aux données géométriques sur la surface (et non à sa position dans l'espace ambiant). C'est le fameux "therema egregium" de Gauss. Cette propriété différencie fortement la courbure des Gauss K de la courbure moyenne H qui, par opposition, est qualifiée de quantité *extrinsèque*. Rappelons que pour une surface minimale les rayons de courbure principaux sont opposés, ce qui implique que la *courbure de Gauss d'une surface minimale est partout négative ou nulle* (et nulle seulement aux points plats).

Si la surface est compacte, la courbure de Gauss est reliée au nombre de trous t de la surface par une formule fameuse :

FORMULE DE GAUSS-BONNET - L'intégrale de la courbure de Gauss K sur une surface Σ est reliée à son nombre de trous τ par la formule :

$$\int_{\Sigma} K(x) dx = 2\pi(2 - 2\tau)$$

Ainsi sur la sphère S^2 qui n'a pas de trou,

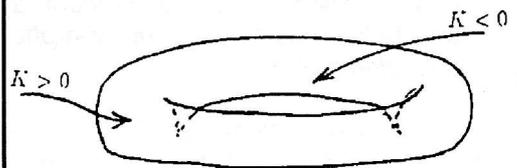
$$\int_{S^2} K(x) dx = 4\pi$$

et cette formule est vraie quelle que soit la métrique servant à calculer la quantité locale qu'est la courbure de Gauss (par exemple une métrique induite par un prolongement). Ceci a pour conséquence d'interdire sur la sphère S^2 l'existence de métriques qui soit partout à courbure de Gauss négative.

Sur le tore T^2 , produit de deux cercles (donc la surface orientée ayant un seul trou), nous avons

$$\int_{T^2} K(x) dx = 0$$

d'où l'impossibilité d'avoir sur le tore T^2 une métrique qui soit partout à courbure de Gauss positive ou partout à courbure de Gauss négative. Ceci montre que la présence de zones à courbure de Gauss positive et de zones à courbure de Gauss négative que nous pouvons constater sur un tore de révolution (une chambre à air, quoi !) est en fait un phénomène général.



Par contre sur toutes les autres surfaces compactes Σ (comme le tore à deux trous souvent appelé *bretzel*),

$$\int_{\Sigma} K(x) dx < 0$$

ce qui autorise l'existence de métriques à courbure de Gauss partout négative. Pourtant aucune de ces métriques ne sera induite par un prolongement minimal dans \mathbf{R}^3 . Il n'existe en effet aucune surface compacte à courbure négative dans \mathbf{R}^3 car, si une telle surface existait, il serait possible en partant de l'infini d'avoir un premier point de contact entre la surface et une direction de plan bien définie. En ce point, la surface serait tangente au plan ayant cette direction et tout entière du même côté de son plan tangent. Ceci n'est pas possible puisque nous savons que les courbures principales doivent avoir des signes opposés. Le seul cas délicat serait la présence de points plats, circonstance qu'on peut contourner, soit en variant la direction de plan, soit en utilisant une propriété analytique importante des fonctions harmoniques, le *principe du maximum*.

Nous allons nous intéresser maintenant à des surfaces Σ *non compactes*, mais nous allons tout de même exiger une propriété de finitude, à savoir demander que la courbure totale

$$\int_{\Sigma} K(x) dx$$

soit finie. Ceci exige donc que la courbure décroisse suffisamment vite à l'infini pour que l'intégrale soit finie, donc géométriquement que la surface s'applatisse suffisamment à l'infini. Ceci est une condition globale sur la surface dont les conséquences sont très importantes. En

effet nous avons le théorème suivant :

THÉOREME D'OSSERMAN : *Les surfaces orientables de courbure totale finie qui se plongent minimalement dans \mathbb{R}^3 sont toutes obtenues à partir d'une surface compacte en envoyant un nombre fini de points à l'infini.*

Ce théorème contient donc le fait que ces surfaces sont presque compactes ce qui n'est pas trop surprenant au vu du théorème de Gauss-Bonnet qui affirme que, pour les surfaces compactes, la courbure totale contrôle le seul invariant topologique, à savoir le nombre de trous. Les seuls exemples de ces surfaces dont on a disposé jusqu'en 1986 étaient *le plan et la caténoïde*, au point de faire naître la tentation de prouver qu'ils étaient les seuls possibles. Depuis lors, grâce aux travaux de David Hoffman et Willians Meeks (et avec l'aide de l'informaticien Jim Hoffman), de très nombreux nouveaux exemples ont pu être découverts, et ceci avec un complice nouveau : *l'ordinateur*.

Le point de départ a été l'étude de la *surface de Costa* (du nom du mathématicien brésilien qui l'a étudiée le premier). Comme on le voit sur le dessin ci-dessous, cette surface a trois branches infinies, deux qui ressemblent à des branches de caténoïdes dont le normale tend vers la même direction, disons verticale pour fixer les idées, et une branche, asymptotique à un plan horizontal les séparant.

Pour cette surface, dont le type topologique est celui d'un tore privé de deux points, on disposait de sa représentation d'Enneper-Weierstrass (qui fait appel à des fonctions elliptiques), mais un des points fondamentaux a été la découverte, en la dessinant à la machine, de droites qui se trouvaient tout entières sur la surface. Ces droites étaient la trace visible de symétries discrètes dans le plongement, qui étaient très difficiles à voir sur la représentation analytique. La première réaction

d'Hoffman devant ces droites apparaissant à l'écran a été de croire à une illusion liée au processus d'approximation,... il n'en était rien, et les symétries étaient bien réelles.

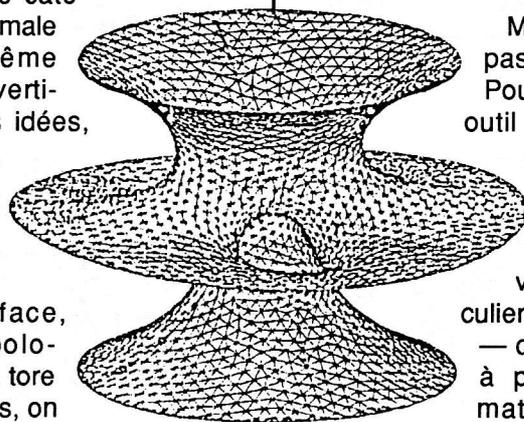
L'étude des branches infinies était assez facile par une approche mathématique directe. L'ordinateur a été un outil privilégié pour comprendre ce qui se passait à distance finie en permettant notamment de tester des surfaces barrières pour s'assurer que la surface ne se recoupe pas elle-même.

La conséquence de cette première découverte a été de rendre possible la construction d'un très grand nombre d'exemples nouveaux de surfaces minimales plongées de courbure totale finie. La diversité des exemples trouvés est telle qu'il est maintenant possible de compliquer des surfaces élémentaires, et de faire des sortes de chirurgies géométriques tout en préservant la propriété de minimalité.

Un bilan

Dans cette partie, j'ai voulu souligner le rôle décisif de l'ordinateur

- pour *voir* ce qui se passe,
- pour *tester* des estimations.



Mais l'ordinateur n'est pas une donnée brute. Pour avoir vraiment un outil performant, il a été nécessaire de mettre au point des logiciels adaptés à ce qu'on voulait faire, en particulier :

- capables de dessiner à partir de données mathématiques (page suivante la représentation d'Enneper-Weierstrass).

- incluant des algorithmes d'approximation qui se révèlent utiles à la preuve mathématique (comme des maillages adaptatifs).

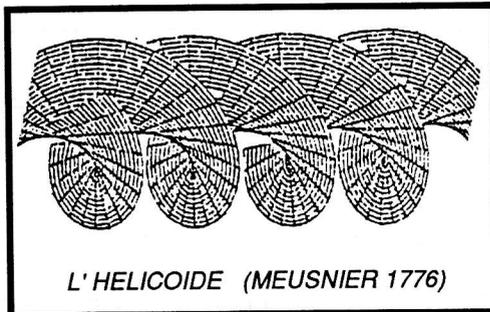
Grâce à cette nouvelle approche, on dispose aujourd'hui d'une multitude d'exemples alors qu'hier encore l'opi-

nion généralement admise était que la situation était rigide, i.e. que le petit nombre d'exemples connus épuisait la liste des situations possibles.

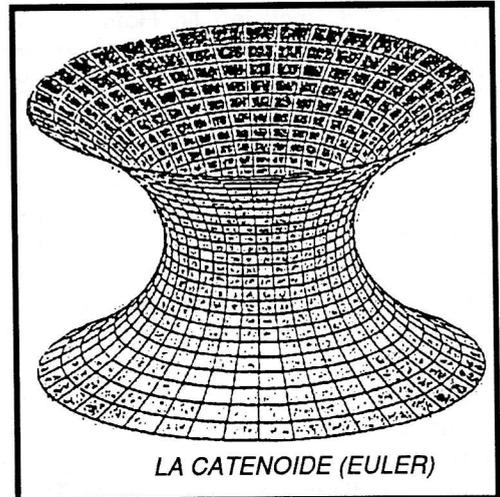
Cela a aussi pour conséquence de changer les rapports avec les collègues travaillant dans d'autres spécialités scientifiques car nous disposons maintenant d'une panoplie d'exemples qui peuvent servir de modèles pour des disciplines extrêmement diverses. Ces rapprochements se sont passés depuis quelques années seulement et ont pris très vite de l'ampleur.

Ainsi, des physiciens des milieux désordonnés, des cristallographes, des chimistes des macromolécules et des biologistes se montrent extrêmement intéressés à dialoguer avec les géomètres informaticiens pour tester des modèles du genre présenté précédemment. Cette direction de coopération

multidisciplinaire est bien entendu un peu inhabituelle : c'est un exemple de situation où *les Mathématiques sont appelées à la rescousse* comme *Science des Formes*. A côté de la modélisation numérique, dont l'impact dans le domaine industriel est de plus en plus visible, est en train de se *développer une modélisation géométrique* dont le succès dépendra en grande partie de notre capacité à former des chercheurs et des ingénieurs qui, par leur compétence polyvalente (dans laquelle les Mathématiques ont une place importante comme j'espère vous l'avoir montré), pourront intégrer dans un tout cohérent la problématique des utilisateurs, les possibilités techniques des machines et l'exigence de rigueur des Mathématiques. C'est à ce titre aussi que j'ai pensé que cet exemple pouvait intéresser les formateurs que vous êtes.



L'HELICOIDE (MEUSNIER 1776)



LA CATENOIDE (EULER)

