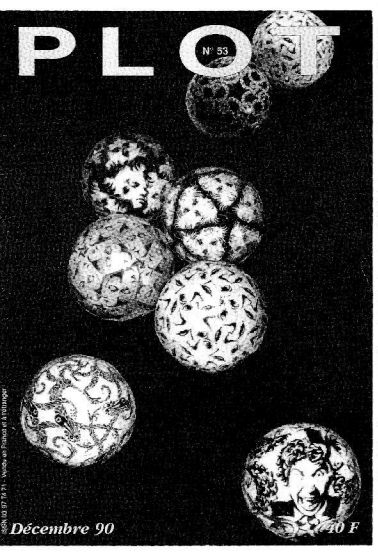
Les mathématiques et leurs interactions

Rapport 1992 du CNRS.

Tous les 4 ans, le CNRS publie un rapport de conjoncture sur l'état des recherches scientifiques en France. Dans le ***Plot n° 53*** *de décembre 1990, nous avions publié quelques extraits du précédent rapport concernant les mathématiques. Voici aujourd'hui quelques extraits de celui qui vient de paraître et dont le mensuel "La Recherche" de février 93 a fait une synthèse générale dans un dossier spécial.*



Les mathématiques sont tout à la fois une science poursuivant pour elle-même ses propres développements, et un outil universel pour toutes les autres sciences. L'équilibre entre ces deux axes est complexe, et la façon que l'on peut avoir de l'appréhender conditionne à l'évidence l'orientation d'une politique scientifique en mathématiques.

Le rapport entre le "noyau dur" et les applications a fortement évolué depuis quelques décennies. Divers facteurs, tant sociaux que scientifiques, ont depuis poussé les mathématiques à s'ouvrir davantage sur le monde qui les entoure, que ce soit le monde universitaire des autres disciplines ou le monde industriel.

Aujourd'hui, sans que l'importance des applications des mathématiques soit le moins du monde minimisée, un certain besoin de recentrage est perçu par la communauté mathématique, dont l'ampleur peut être mesurée par la nuance entre le titre du chapitre la concernant dans le Rapport de conjoncture 1989 : *"Interactions des mathématiques"* et celui d'aujourd'hui *"Les mathématiques et leurs interactions"*.

Les enjeux

Les résultats mathématiques se caractérisent essentiellement par leur généralité et par leur permanence. Ces deux caractéristiques, que nous allons développer, sont à l'origine des spécificités des relations entre les mathématiques, les autres sciences et les applications.

On reproche souvent aux mathématiques une constante de temps considérable : la résolution d'un problème peut survenir plusieurs années — voire plusieurs décennies — après qu'il ait été posé, et ne plus intéresser l'auteur. Sans parler des exemples fameux où la solution s'est fait attendre plusieurs siècles ou millénaires : quadrature du cercle, trisection de l'angle, nombres parfaits, théorème de Fermat, hypothèse de Riemann... Bien que ce soit souvent un stimulant très puissant pour les mathématiciens, cet état de fait est un handicap certain pour les interactions des mathématiques. C'est aussi une manifestation de la durabilité des concepts mathématiques, qui en fait un enjeu culturel de première grandeur. La spécificité de ces concepts n'est pas l'abstraction, mais la généralité. Leur valeur est donc interdisciplinaire par essence : qu'ils proviennent d'une discipline, et l'on découvrira, grâce à l'approche mathématique, que la même structure gouverne un phénomène dans un tout autre domaine. C'est une des fonctions des mathématiques que d'établir des relations entre des notions abstraites et de permettre d'identifier des modèles ayant la même structure.

Généralité et permanence

A cette généralité s'ajoute donc la permanence de la validité des résultats et des théories mathématiques : on ne peut comparer, de ce point de vue, la "crise des fondements" qui a affecté les mathématiques dans la période 1890-1935 et les révolutions qui ont touché la physique à peu près à la même époque. Une théorie physique n'est valable que dans certaines limites : de distance, de vitesse, de temps ou de masse par exemple (on s'en aperçoit le plus souvent après coup, au moment de l'établissement d'une nouvelle théorie). Par contraste, un théorème sera toujours vrai et certains seront toujours utiles.

Ces deux propriétés de permanence et de généralité permettent, à la longue,

l'assimilation des idées utiles par le plus grand nombre d'individus. Les mathématiques font donc pleinement partie du patrimoine culturel de l'Humanité. Il n'est pas besoin de dire à quel point cette diffusion des connaissances mathématiques est utile au progrès de toutes les sciences.

Culture et développement

Les mathématiques participent donc simultanément :

☞ **au développement de la culture humaine,** et les mathématiciens tiennent à être reconnus comme détenteurs d'une part de cette culture,

☞ **au mouvement général des sciences :** leur langage sert à la fois de support à bien des développements, que ce soit en physique, en biologie ou en sciences de l'homme, et de moyen de communication entre ces sciences.

☞ **au développement du monde moderne :** les mathématiques élaborées ont un impact technologique croissant et contribuent à l'augmentation de la production dans tous les domaines, à celui de la circulation d'information et des capacités d'organisation.

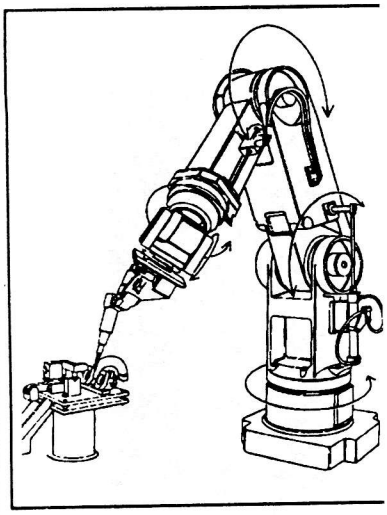
Au-delà de cette évolution qualitative, on peut schématiquement dire que le lien entre mathématiques et interactions a essentiellement été marqué depuis quatre ans par deux phénomènes :

Calculs et modèles

D'une part, l'accroissement phénoménal des puissances de calcul des ordinateurs s'est poursuivi, au point qu'aujourd'hui des entreprises de taille moyenne peuvent avoir facilement accès à la simulation numérique dans des conditions réalistes. Ceci accroît considérablement les enjeux industriels des mathématiques, comme d'ailleurs leurs enjeux dans des domaines aux ambitions avant tout cognitives (biologie ou sciences sociales par exemple). Le rôle du CNRS sur ce point est — et doit demeurer — important : beaucoup d'industries utilisent en effet les compétences des laboratoires du CNRS pour résoudre leurs problèmes de modélisation numérique.

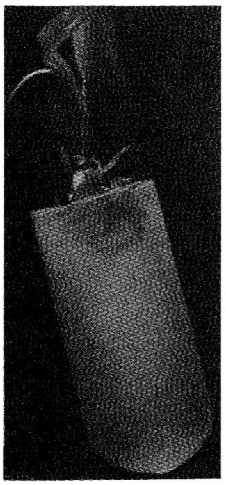
Physique et environnement

D'autre part, les interactions des mathématiques avec les autres sciences sont marquées par l'utilisation de plus en plus répandue de modèles. La plupart de ces modèles s'expriment dans le langage mathématique, et leur traitement fait usage de résultats mathématiques parfois très sophistiqués ou suscitent des recherches dont certaines sont de nature fondamentale. Soulignons l'importance souvent ignorée de ce que l'on pourrait appeler la "modélisation fondamentale", dans laquelle une théorie abstraite en soi bénéficie de l'apport du mathématicien. Un exemple typique réside dans l'essor en physique théorique de l'usage de la géométrie non commutative.



Les enjeux économiques et sociaux du développement de modèles mathématiques efficients ne cessent de croître : la régulation et le pilotage des grands réseaux techniques (réseaux nationaux et internationaux de télécommunication, d'énergie, de transports...), la gestion de systèmes socio-économiques (les entreprises, les grandes administrations) d'une complexité croissante, la maîtrise des interactions entre nos sociétés et le milieu naturel (les problèmes d'environnement), le besoin d'une connaissance plus fine des phénomènes naturels eux-mêmes (qui se traduit, par exemple, par la nécessité de disposer de prévisions météorologiques de plus en plus précises et fiables) sont autant de champs d'application en plein développement et d'interactions pour les mathématiques.

On verra que les mathématiques ont une part cruciale dans beaucoup de développements technologiques récents. On évoquera également le rôle qu'elles jouent dans la formulation et la modélisation des sciences, notamment (mais pas uniquement) de la physique. On a aussi mentionné l'utilité des concepts et de la démarche mathématique. Pour conclure, il nous semble important de rappeler que les mathématiques sont aussi une science de la nature, et de souligner leur aspect esthétique : après tout, la recherche de la vérité et de la beauté sont des buts tout à fait valables en soi.



EVOLUTION ET TENDANCES

Depuis environ une vingtaine d'années, il y a eu chez les mathématiciens un changement assez net d'orientation que l'on peut baptiser de "retour au concret". Ceci par contraste et quelque peu en réaction contre la période précédente, qui a commencé juste après l'après-guerre, et qui a été en grande partie dominée par la construction et l'utilisation de "grosses machines" théoriques, l'exemple le plus spectaculaire étant celui de la géométrie algébrique.

Cette tendance, symbolisée pour le meilleur et pour le pire par le groupe Bourbaki, était spécialement marquée en France ; il faut d'ailleurs noter qu'elle a coïncidé avec une place particulièrement brillante de notre pays dans la recherche mathématique mondiale. Bien que les dangers de stérilisation aient été fort exagérés, il n'en est pas moins vrai que les contacts avec les autres disciplines scientifiques étaient devenus plus difficiles.

1 - Intégration des mathématiques

La recherche mathématique est aujourd'hui tellement foisonnante qu'il serait fort présomptueux de prétendre donner un panorama des progrès réalisés récemment. Nous allons nous contenter de décrire quelques domaines qui paraissent les plus caractéristiques de son évolution.

Une caractéristique de la période actuelle semble être l'intégration toujours plus grande des mathématiques, au sens où il est de plus en plus fréquent qu'un concept né dans un domaine soit appliqué avec fruit dans un autre parfois très éloigné. Cela est aussi vrai, et c'est en grande partie nouveau, de concepts nés en dehors des mathématiques, notamment en physique, informatique et biologie. Ce transfert de concepts produit parfois des résultats inattendus et spectaculaires. Parmi les exemples les plus marquants, citons :

— l'utilisation des théories de jauge, issues de la physique des particules, dans la topologie des variétés de dimension quatre,

— l'application des algèbres d'opérateurs à la théorie des nœuds,

— les rapports mystérieux entre le chaos quantique et l'hypothèse de Riemann,

— la multiplicité des techniques qui interviennent dans les mathématiques de la vision : ondelettes, physique statistique, réseaux de neurones, géométrie algébrique,

— les théories de la complexité,

— enfin, l'exemple sans doute le plus fascinant est relatif à l'utilisation de concepts de théorie quantique des champs dans divers domaines topologiques et géométriques, ainsi qu'en analyse sur les variétés : théorie de Morse, topologie algébrique (cohomologie elliptique), théorie de l'indice, variétés de petite dimension...

Tâchons néanmoins de dégager les principales problématiques actuelles — ou pour le moins un échantillon de celles-ci — et de cerner les thèmes en émergence, tout en soulignant, autant que faire se peut, les interactions, soit internes à la discipline, soit surtout avec les disciplines voisines.

2 - Physique et topologie

On rencontre d'abord ces interactions dans l'étude topologique des variétés de petite dimension. Cette étude est cruciale, en particulier par ses évidentes relations avec la physique où l'on ne cesse de traiter de variétés de dimension deux (surfaces), trois (localement analogues à notre espace), ou plus généralement n, pour n petit.

Les problèmes de classification des variétés étant essentiellement résolus depuis vingt ans en dimension supérieure à cinq, l'attention s'est portée sur les dimensions trois et quatre : il est peut-être assez remarquable que ces dimensions, qui sont celles de l'espace et de l'espace-temps "ordinaire", soient de loin les plus riches. Il y a cependant, pour le mathématicien, une différence notable : en dimension trois, on dispose d'une description conjecturale assez complète qui constitue une vaste généralisation de la conjecture de Poincaré, et dans

laquelle la géométrie hyperbolique joue un rôle crucial. En revanche, en dimension quatre, notre compréhension a été complètement bouleversée dans les dix dernières années, avec notamment la découverte d'une différence radicale entre variétés topologiques et différentielles, phénomène spécifique à cette dimension.

Il y a eu d'abord la preuve de la conjecture de Poincaré topologique en dimension quatre, véritable tour de force qui a rajeuni de façon inattendue une vieille école de topologie générale. Plus généralement, une classification complète des variétés topologiques de dimension quatre à groupe fondamental pas trop compliqué a été obtenue.

Equations de Yang-Mills

Mais le véritable début de la période actuelle est constitué par l'utilisation des théories de jauge des solutions des équations de Yang-Mills, issues de la physique des particules des années 50, pour étudier les variétés différentielles de dimension quatre. Le résultat le plus stupéfiant, obtenu en combinant ces travaux avec les résultats sur les variétés topologiques, fut l'existence d'une structure différentielle exotique sur l'espace euclidien : c'est la seule dimension où une telle structure existe. Par la suite, on a même montré qu'il y a une infinité continue de telles structures exotiques, ce qui semble apparenter les variétés de dimension quatre plus aux variétés complexes (par exemple les surfaces de Riemann) qu'aux variétés réelles des autres dimensions. Un fait très curieux est que la théorie utilisée pour démontrer ces résultats a pour origine certaines équations de la relativité, mais dans lesquelles on considérerait le temps comme imaginaire pur, passant de l'espace de Minkowski à l'espace euclidien. Tout récemment cette théorie a été utilisée pour étudier les plongements lisses de surfaces réelles dans les surfaces complexes. La version locale de ces résultats permet de répondre à de vieilles questions de théorie des nœuds.

La conjecture de Poincaré

Un développement ultérieur combine cette théorie avec l'interprétation supersymétrique de la théorie de Morse pour définir une homologie d'instantons pour les sphères d'homologie entière de dimension trois. Celle-ci raffine un précédent invariant qui s'était montré pertinent pour l'étude de la conjecture de Poincaré en dimension trois. Ce dernier illustre le fait que les méthodes "classiques" ont encore beaucoup à donner à condition d'être utilisées de manière inventive. C'est aussi ce que montre la preuve récente du fait qu'un nœud classique est déterminé par son complément, complémentaire dans l'espace ambiant.

La théorie des nœuds

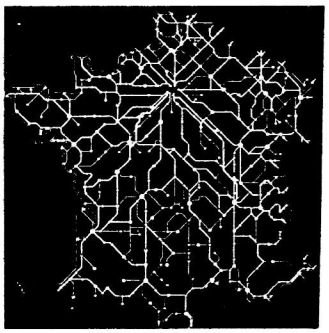
Un développement spectaculaire fut l'application de la théorie des algèbres d'opérateurs à la théorie des nœuds, domaines a priori bien éloignés : invariants polynomiaux pour les nœuds et les entrelacs. Maintenant on comprend mieux ce qu'une telle relation a de naturel, comme l'est la relation entre les représentations du groupe de tresses et l'origine de l'équation de la R-matrice.

Mais l'événement de ces cinq dernières années a — paradoxalement peut-être — davantage consisté en une influence de la physique théorique sur les mathématiques fondamentales, par la spectaculaire intervention de la théorie quantique des champs en topologie et géométrie, et notamment pour les variétés de dimension trois et quatre (annonce d'une théorie quantique topologique des champs, nouveaux invariants).

La supersymétrie

Elle a donné naissance à toute une industrie de travaux à la frontière de la physique théorique, de la topologie de petites dimensions, de l'analyse non linéaire, des représentations de groupes, des algèbres d'opérateurs, des groupes quantiques... L'histoire avait commencé il y a une dizaine d'années, avec l'introduction en topologie et géométrie différentielle de méthodes de la théorie quantique des champs (supersymétrie). Ces idées ont même été utilisées dans des domaines assez éloignés, comme la transformation de Fourier géométrique ou l'analyse complexe.

De façon plus globale, les liens entre



les mathématiques — et en particulier la géométrie — et la physique sont innombrables, de la théorie conforme des champs aux intégrales de **Feynman** en passant par la quantification géométrique ou la théorie quantique générale des champs. Les motivations des physiciens ont poussé à de remarquables innovations concernant les groupes quantiques et les algèbres d'opérateurs, la méthode de scattering inverse se révélant, par exemple, une motivation pressante pour la construction et l'étude des systèmes intégrables quantiques.

De même, dans le domaine extrêmement vaste de la mécanique statistique, les problèmes de **transitions de phase,** par exemple, ont tout à la fois bénéficié de l'étude des algèbres de Lie et motivé celles-ci, tandis que le développement en physique théorique de la théorie des cordes a suscité toute une problématique en topologie algébrique (analyse des genres elliptiques).

On pourrait multiplier à l'infini les exemples de ce développement parallèle de la physique théorique ou de la physique mathématique et de théories mathématiques relevant de diverses branches : fonctions thêta non commutatives et équations de solitons (équations KP), thermodynamique des nombres (caractérisation en termes d'algèbres d'opérateurs de la "transition d'Hagedorn"), modèles conformes et algèbre de Virasoro, systèmes intégrables et géométrie algébrique.

Le chaos

L'étude de phénomènes chaotiques, de la turbulence (au sein d'un gaz, par exemple, avec des applications directes en météorologie) fait aujourd'hui intervenir directement la décomposition en ondelettes, domaine auquel l'école française a apporté une contribution décisive. Les probabilités elles-mêmes interviennent sans cesse davantage en physique, par exemple au travers des spectres d'hamiltoniens aléatoires ou des probabilités quantiques.

3 - Equations aux dérivées partielles et modélisation

L'étude des équations aux dérivées partielles, qui relève en l'occurrence de l'analyse non linéaire, a, de tout temps, été fondamentale pour un très grand nombre de problèmes "appliqués". Notons, à titre de curiosité, que l'une des méthodes les plus employées, tant par les mathématiciens que par les utilisateurs, la méthode des éléments finis a été créée par des non-mathématiciens, et que la théorie a souvent bénéficié de ses applications, un exemple étant donné par le principe de taxation présent en économie en théorie des incitations, qui a fourni la solution d'une équation aux dérivées partielles qu'on ne savait pas résoudre.

Mais, alors que pour les équations de Yang-Mills vues dans le paragraphe précédent, l'intérêt de l'équation résidait en grande partie dans le modèle physique qu'elle portait, l'accent ici est différent, et l'on s'intéresse plus aux solutions des équations pour elles-mêmes. C'est le cas pour les équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, par exemple dans le problème de Yamabe, et l'on a vu la preuve de diverses conjectures : conjecture de Calabi, conjecture de la masse positive en relativité générale. On a aussi constaté des phénomènes étonnants, comme l'apparition de "bulles" dans les équations aux dérivées partielles elliptiques ayant une non-linéarité critique, avec un retour aux équations de Yang-Mills, dans le cas des courbes holomorphes.

Les applications en physique

Elles sont souvent relativement directes : découverte d'un type nouveau de solutions pour la turbulence en mécanique des fluides, la question demeurant posée du lien avec des solutions de viscosité, méthode de compacité par concentration. Les retombées, en biologie par exemple, de l'étude de la variété inertielle ou de la dimension fractale des attracteurs, en particulier pour les équations d'évolution décrivant des systèmes dynamiques de dimension infinie, sont encore aujourd'hui de dimension infinie, sont encore aujourd'hui loin d'être claires.

Pareillement, toute une branche d'analyse extrêmement fine se fait sur un arrière-plan d'interaction directe en physique : l'analyse microlocale, qui étu-

die entre autres la propagation des singularités des solutions des équations aux dérivées partielles en particulier hyperboliques). Et l'on peut prévoir un important développement de méthodes, considérant les propriétés qualitatives de ces équations et de leurs solutions, y compris de méthodes topologiques.

Les surfaces minimales

Toute une classe des équations aux dérivées partielles peut être qualifiée d'équations géométriques : l'étude des surfaces minimales plongées dans l'espace euclidien de dimension trois, par exemple, est l'un des plus anciens problèmes de la géométrie différentielle, il a fait l'objet de nombreux travaux mathématiques suscités notamment par les problèmes posés par les physiciens (problème de Plateau sur l'existence d'un film de savon à contour donné, par exemple). Ces dernières années, son intérêt s'est affirmé dans des domaines extrêmement variés de la physique, de la chimie et de la biologie.

L'observation de phases cubiques "exotiques" dans un grand nombre de systèmes a renouvelé l'intérêt pour les surfaces minimales (ou à courbure moyenne constante) périodiques. Deux de ces surfaces avaient été étudiées déjà à la fin du siècle dernier par **Schwarz**, mais ces observations nouvelles ont entraîné un renouveau d'études mathématiques aboutissant, entre autres, à la découverte de la surface minimale périodique cubique la plus fréquemment observée expérimentalement.

Des travaux sur ordinateur ont permis de visualiser un grand nombre de ces surfaces minimales ou à courbure moyenne constante dont on ne possède pas de représentation analytique. Les comparaisons de ces images avec celles obtenues, par exemple, en microscopie électronique sont assez frappantes. Les discussions interdisciplinaires ont permis d'enrichir les interprétations des expériences, les modélisations des systèmes, et de poser ou de relancer des problèmes mathématiques intéressants.

De plus, ceci a aidé à trouver de nouvelles surfaces minimales plongées, et a contribué à renouveler ce domaine. Par ailleurs, les surfaces minimales dans des variétés de dimension trois autres que l'espace euclidien ont joué un rôle important en topologie de petite dimension. Tout ce domaine est aujourd'hui fort actif.

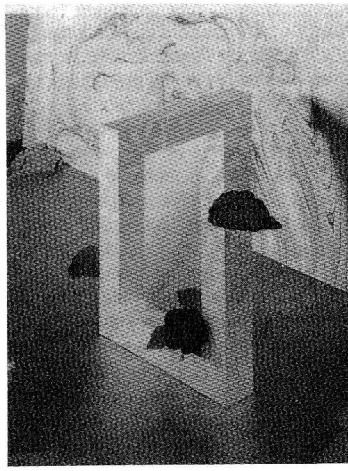
Les équations stochastiques

Il en est de même des développements des équations aux dérivées partielles stochastiques. L'école française s'est montrée dans les tout premiers rangs mondiaux pour l'étude des équations différentielles stochastiques (en particulier des diffusions), s'appuyant pour cela sur une excellente école probabiliste : elle se doit donc d'occuper une place mondiale dans le domaine des équations aux dérivées partielles stochastiques, à la frontière entre les courants stochastiques et l'analyse numérique ou le calcul scientifique. Le rôle des retombées — et donc des modélisations — sera de toute première importance, que ce soit en physique, en biologie (dynamique de population, modélisation d'influx nerveux, ...) ou encore dans le domaine des mathématiques financières.

Enfin, plus peut-être que dans d'autres branches des mathématiques, l'ordinateur joue et jouera un rôle croissant dans le domaine des équations aux dérivées partielles, soit pour des résolutions numériques, soit même, dans le cadre stochastique, pour des simulations numériques.

4-Interactions avec les mathématiques appliquées

Les phénomènes physiques quantitatifs sont généralement décrits par des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires dans des limites singulières variées. Par exemple, dans l'équation de **Navier-Stokes** en mécanique des fluides, on fait tendre la viscosité (mesurée par l'inverse du nombre de Reynolds) vers zéro. A la limite, on obtient l'équation d'Euler. Si la viscosité est très petite mais non nulle, on a les phénomènes de turbulence. Le développement récent des moyens de calcul et de la sophistication des algorithmes a permis de découvrir par simulation numérique des phénomènes inattendus



qu'on ne peut pas toujours reproduire expérimentalement. Mathématiquement, le comportement limite d'une suite de solutions fait intervenir le phénomène de concentration de l'énergie et d'oscillations décrites par une mesure de Young, grâce à laquelle on peut calculer toutes les limites faibles de fonctions non linéaires de la suite de gradients.

Tout récemment, cette théorie mathématique a été utilisée pour expliquer certaines transitions de phase dans les solides (alliages notamment) en fonction de la température. De tels phénomènes sont modélisés mathématiquement dans le cadre de l'élasticité non linéaire, gouvernée par une énergie non convexe. De nombreuses recherches mathématiques s'efforcent actuellement de comprendre la nature des supports possibles des mesures de Young pour analyser l'orientation des phases et les phénomènes de maclage martensitiques.

La compréhension de ces phénomènes est un modèle pour une interaction interdisciplinaire mettant en jeu des idées d'analyse non linéaire, de calcul numérique, et des méthodes asymptotiques sophistiquées.

Dans la théorie des cristaux liquides, si l'on veut prescrire les défauts, on est amené à considérer un certain type d'applications harmoniques. Là encore, l'énergie n'atteint pas son infimum, et il y a concentration dans les gradients de déformation.

5 - Mécanique des solides

Le phénomène de "localisation des déformations" est couramment observé avant la rupture d'une pièce sollicitée mécaniquement. Sur le plan mathématique, cette localisation correspond à la perte d'ellipticité (faible) de l'opérateur tangent gouvernant l'évolution du champ de déformation (ou la perte de la convexité de rang un de l'énergie minimisée par ce champ). Cet opérateur comprenant une partie locale et des conditions aux limites, l'examen de son ellipticité permet tout aussi bien de prévoir l'apparition des bandes de localisation au cœur du matériau que leur naissance au bord de la pièce.

Cette transition d'un régime elliptique à un régime hyperbolique des équations aux dérivées partielles qui gouverne le phénomène est connue de longue date dans l'analyse des chocs en mécanique des fluides. Mais il a fallu attendre la fin des années 70 pour en percevoir la portée en mécanique des solides, en raison de la diversité et de la complexité plus grande des lois de comportement des matériaux. Tout récemment, ces travaux ont été formalisés, puis généralisés au cours des trois dernières années, notamment en France, et l'on est maintenant en mesure de prévoir l'apparition et l'orientation de ces bandes de localisation pour une gamme très large de matériaux.

Ces travaux ont des prolongements numériques importants, et ils sont également appelés à jouer un rôle important dans une nouvelle formulation des lois de comportement.

Les autres chapitres de ce rapport traitent des interactions entre :

— géométrie et algèbre

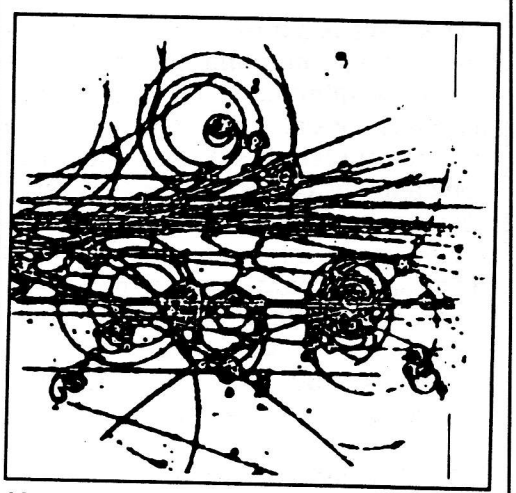
— algèbre, géométrie algébrique et théorie des nombres ,

— informatique et mathématique

— les sciences cognitives

— probabilités et statistiques

— mathématique et biologie



Mouvement d'une particule de haute énergie