Quelles mathématiques dans 20 ans ?

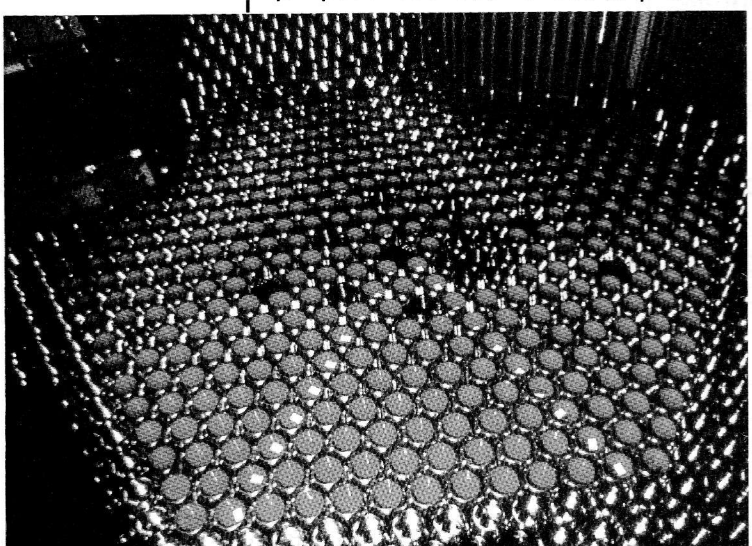
Jean-François MELA - Paris

Ce texte est tiré d'une conférence que Jean-François Méla, nouveau président de l'Université de Paris-Nord, a donnée à Marseille en 1992 à la demande de Marcel Benaroche, directeur du CCSTI de Provence-Côte d'Azur.

J'avoue qu'il faut avoir un certain culot pour faire de la prospective à l'époque actuelle, même en mathématiques. C'est peut-être pour cela que j'ai accepté !

Tout le monde sait bien que la prospective a des grandes chances de se tromper. Mais c'est finalement assez rassurant parce qu'on a l'impression de s'accaparer un petit peu du futur alors qu'il peut nous réserver des surprises.

Les structures métalliques du cœur d'un réacteur à neutrons rapides sont soumises à des conditions de service particulièrement sévères.



Les problèmes de Hilbert

Est-ce que la prospective a de plus grandes chances de succés dans le domaine de l'histoire ou de la société ? Ce n'est pas la première fois que les gens se posent la question de dessiner les tendances du futur en sciences, et en particulier en mathématiques.

Au début de ce siècle, Hilbert, le plus grand mathématicien de son temps avec Poincaré, avait proposé, à l'occasion du colloque international des mathématiciens qui s'était tenu à Paris en 1900, une liste de quelques dizaines de problèmes qui d'après lui devraient être les problèmes majeurs des mathématiques du 20ème siècle.

Quand on regarde cette liste, on s'aperçoit qu'il n'a pas évité l'écueil que je signalais : les choses les plus surprenantes, il ne les a pas devinées.

En particulier vers 1923 les physiciens ont inventé **la mécanique quantique.** L'outil mathématique principal de la mécanique quantique, c'est l'étude des opérateurs dans ce qu'on appelle aujourd'hui les "espaces de Hilbert". Or dans son programme, lorsqu'il parle de physique mathématique, il ne signale absolument rien sur les opérateurs, sur l'analyse fonctionnelle...

On ne peut pas lui faire grief de ne pas avoir deviné la mécanique quantique ; c'est un exemple d'écueil qu'on ne peut guère éviter.

Par ailleurs, dans la liste des grands problèmes qu'il signale, on trouve nombre de problèmes qui ont effectivement accaparé les mathématiciens tout au long du 20ème siècle. D'autre part il a bien senti par exemple une des tendances lourdes de ce siècle : essayer de faire reposer les mathématiques sur des bases solides.

Les grands problèmes

Je crois que cela garde quand même un sens de discuter aujourd'hui des grandes tendances des mathématiques et de chercher à distinguer celles qu'on peut extrapoler dans le futur. D'autant plus qu'elles ne sont peut-être pas connues de tout le monde.

Il y a d'abord des tendances qui traversent l'histoire, c'est ce qu'on appelle les "grands problèmes".

Certains ont été posés il y a très longtemps, d'autres plus récemment. Au départ ce sont des questions "naturelles" qui concernent l'arithmétique, la géométrie élémentaire ou la physique, spécialement la mécanique.

Il y a de très vieux problèmes sur les nombres entiers, sur les nombres premiers, sur la résolution d'équations en nombres entiers, comme la fameuse conjecture que l'on appelle **le théorème de Fermat.**

Il y a des problèmes plus récents comme **le problème des "n corps"** dont je parlerai un peu plus loin. On peut se demander pourquoi ces questions plutôt que d'autres constituent les "grands problèmes".

Par exemple le problème de Fermat : la question est de savoir si, lorsque $n \geq 3$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ peut avoir des solutions de nombres entiers non nuls x,y,z. Pourquoi est-ce un problème important. J'avoue que quelqu'un qui débarque là-dedans se dit : oui pourquoi pas ? mais pourquoi pas un autre problème ?

Et de fait on s'aperçoit que pendant tout le 19ème siècle, par exemple, ce problème était classé dans les mathématiques amusantes. C'est à dire qu'il n'était pas considéré comme un problème vraiment sérieux. Il a recommencé à être un problème sérieux le jour où l'on a introduit, à son propos des outils algébriques nouveaux, révolutionnaires, comme les "idéaux" ou les "groupes attachés à une courbe algébrique".

Ce problème c'est ainsi, à nouveau, retrouvé au cœur de tout un développement.

Qu'est-ce qu'un grand problème ?

Ce qui fait l'importance d'un grand problème, c'est surtout sa fécondité, c'est à dire sa capacité à susciter pour sa résolution, le développement de théories profondes qui vont aller féconder une grande partie des mathématiques.

La plupart des problèmes sont, au départ, des problèmes gratuits. Par exemple il y a un grand problème qu'on a vu ressortir périodiquement dans l'histoire : **le problème isopérimétrique.**

Il s'agit de savoir, parmi toutes les courbes fermées ayant le même périmètre, enferme le domaine d'aire maximale.

Bien sûr, intuitivement on pense au cercle. Les Grecs devaient déjà avoir le sentiment que c'était le cercle. Du point de vue des applications, la réponse à ce problème n'apporte rien de nouveau.

Mais la question était plutôt comment le démontrer ? C'est un problème purement gratuit, trouver une démonstration d'un fait qui parait assez intuitif.

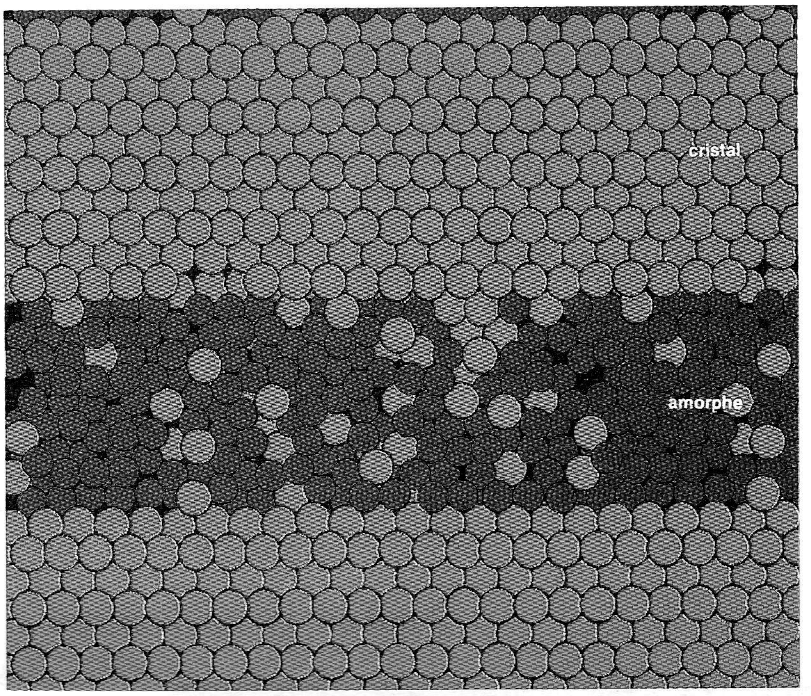
Ce problème est réapparu dans l'histoire sous des formes diverses, on s'est aperçu que finalement c'était le même problème que le "principe de moindre action" de Maupertuis, ou que le "principe de Dirichlet",...

Bien souvent, un objet mathématique remarquable a souvent une signification physique remarquable, ici "l'énergie minimale".

L'approfondissement de ce problème isopérimétrique a conduit à ce qu'on appelle le "calcul des variations" et à d'autres développements extrêmement profond en géométrie, qui ont permis justement d'englober dans une même théorie tout ce dont je viens de parler.

Le problème des n corps

Ces grands problèmes, il faut s'attendre à les voir continuer à traverser l'histoire, à se transmuer et à prendre des formes diverses. Beaucoup de grands problèmes ont une vie très longue. On



Empilement d'atomes simulé par ordinateur dans un matériau contenant des couches alternées de titane cristallin et d'alliage fer-titane amorphe. Le titane est représenté en plus clair que le fer. Deux états de la matière séparés par une interface sont visibles.

voit arriver de nouveaux grands problèmes, comme par exemple le "problème des n corps". C'est, par exemple, la question de savoir si le système solaire est stable. On connaît parfaitement les lois newtoniennes qui régissent les mouvements des planètes, mais on ne sait pas démontrer qu'à un instant donné très lointain, une planète ne va pas partir à l'infini ou deux planètes entrer en collision. On a aujourd'hui toutes les raisons de penser que ceci ne se produira pas dans la durée de vie du système. Mais il est tout à fait fascinant pour l'esprit humain de ne pas savoir si le système dans lequel il vit est stable.

2 corps, ça va, 3 corps ...

Aile de tangage.
Tourbillon de bord de fuite.
(Cliché A. Morand, CNRS-IMST)

Plus généralement résoudre le problème des "n corps" c'est décrire de façon qualitative le mouvement de n corps lorsque n est plus grand que 2.

On sait le faire avec précision lorsqu'il n'y en a que deux mais, dès qu'il y en a trois, on n'est plus capable de dire ce qui va se passer.

On sait faire des calculs approchés valable dans un laps de temps limité mais on ne sait pas décrire ce qu'il va se passer d'ici à la fin des temps.

Des programmes mobilisateurs

Les grands problèmes fonctionnent comme de grands programmes mobilisateurs autour desquels se rassemblent des générations de mathématiciens parmi les plus talentueux. Au bout d'un certain temps, il n'est plus possible d'aborder ces problèmes d'un point de vue naïf.

Tous les jours il y a des gens qui essaient de démontrer le théorème de Fermat avec des moyens élémentaires ; mais ils sont un peu dans la position du forgeron de village qui entreprendrait de construire le Concorde. En face d'eux ils ont une "industrie lourde" considérablement développée qui a déjà essayé toutes les approches de solution !

Les grandes tendances du XXème siècle

Pour décrire les mathématiques dans 20 ans, il faut d'abord s'attacher aux tendances qui ont traversé le 20ème siècle.

Il y en a une qui était déjà affirmée dans le programme de Hilbert, et qui ne s'est pas démentie, c'était l'ambition de poser les mathématiques sur des bases solides.

Il y a eu vers la fin du 19ème siècle des débats passionnés sur le statut des objets mathématiques. Et une question était de s'avoir si l'on pouvait espérer fonder les mathématiques de façon logiquement correcte.

Mais il y avait aussi l'ambition de leur donner une certaine unité et de distinguer, au travers de la multiplicité des théories, qu'elles étaient les grandes structures qui intervenaient et que l'on retrouvait partout.

Cela a donné un programme unificateur qui a beaucoup occupé les gens au milieu du siècle et auquel est associé le nom de **Bourbaki**. Mais Bourbaki est seulement un aspect de cette tentative.

Ce programme, il faut bien le dire, a été couronné de succès.

Il faut le dire parce qu'il y a un petit mal entendu à ce sujet. En effet ce programme qui aboutit à présenter les mathématiques de façon beaucoup plus formalisée qu'avant, a été surtout perçu dans le public par son avatar dans l'enseignement : "les maths modernes". Des gens bien intentionnés se sont dit, puisque ça marche si bien, il faut tout de suite le mettre en œuvre dans les programmes scolaires.

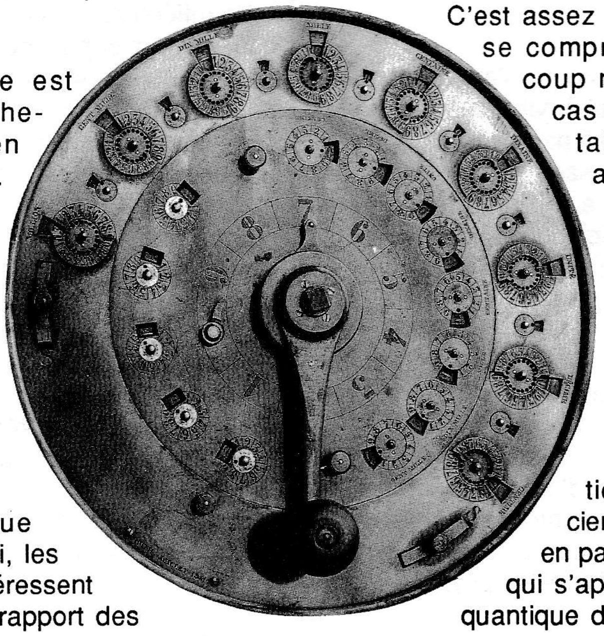
Cela a conduit à une espèce de "Bérézina pédagogique". Mais si l'on peut être extrêmement critique sur la pédagogie qui en a résulté, par contre l'ambition "bourbakiste" qui à réussi à donner aux mathématiques l'unité extraordinaire qu'elles ont aujourd'hui, est une réussite complète.

De nos jours toutes les branches des mathématiques parlent le même langage et cela donne une efficacité considérable à la discipline.

On est aujourd'hui capable de transporter des méthodes d'un domaine dans un autre qui n'a rien à voir, tout simplement parce qu'il y a un langage unique et que l'on a réussi à dégager le petit nombre de structures qui sous-tendent chaque théorie.

Cette période est aujourd'hui achevée, mais on en récolte les fruits. Cela se traduit dans beaucoup de domaines par des résultats assez surprenants et enthousiasmants.

Maintenant que ce travail est fini, les chercheurs s'intéressent de nouveau au rapport des mathématiques avec les autres sciences, qui avait été un peu l'axe central du progrès des mathématiques au 19ème siècle.



De tout temps, l'homme a imaginé des mécanismes pour faciliter la pratique du calcul. Ici, la machine de Roth, conçue en 1984.
Boyer-Viollet

Mathématiques et physique

Si on prend le cas de la physique, il s'y passe aujourd'hui des choses extraordinaires. Il est en train de s'établir, depuis quinze-vingt ans, entre les mathématiques et la physique théorique, la plus mathématisée, une interaction tout à fait surprenante qui laisse rêveur.

On peut se demander pourquoi il a fallu attendre ces vingts dernières années pour voir s'établir une telle interaction.

La mécanique quantique a marqué de ce point de vue, une date importante.
C'était la première fois que les concepts mathématiques intervenant dans la modélisation du réel étaient aussi éloignés de l'intuition et que la théorie physique était aussi indisociable de la théorie mathématique.

Une particule c'est une représentation de groupe, la gravité en théorie de la relativité c'est une propriété géométrique de l'espace temps... Il est normal que la physique et les mathématiques se développent un peu parallèlement, mais il faut croire que les physiciens et les mathématiciens ne se sont pas compris pendant très longtemps.

C'est assez étonnant qu'ils se comprennent beaucoup mieux, en tout cas dans une certaine frange, aujourd'hui que les mathématiques sont devenues beaucoup plus formalisées et abstraites.

Mathématiciens et physiciens se retrouvent en particulier dans ce qui s'appelle la théorie quantique des champs, qui est une sorte de tentative d'unification des différentes forces qui régissent l'univers, de la mécanique quantique, de la relativité...

Cette théorie quantique des champs est à l'heure actuelle un "chaudron de sorcière" qui bouillonne et dans lequel se retrouvent l'élite de la géométrie moderne, plus un certain nombre de physiciens de haut vol.

S'y télescopent énormément de parties des mathématiques : l'analyse fonctionnelle, la géométrie, la théorie des groupes, les probabilités... Les mathématiciens qui travaillent sur ce sujet arrivent à concilier le langage "bourbakiste", un langage abstrait et formalisé, avec une intuition physique profonde.
On voit notamment une chose à laquelle on n'aurait jamais pensé auparavant : des résultats de mathématiques démontrés par le biais de la physique.
Par exemple, en regardant de près les équations de **Yang-Mills**, qui sont en relativité générale, l'analogue des équa-

tions de Maxwell, en regardant certaines solutions de ces équations, on est arrivé à démontrer qu'il existait un espace de dimension 4 qui avait des propriétés tout à fait faramineuses, qui n'avaient rien à voir avec l'espace de dimension 3, même avec une dimension de plus.

Et il n'y a que dans un espace de dimension 4 que cela peut se produire. Cela fait l'objet d'une médaille Fields, l'équivalent d'un prix Nobel pour les mathématiques.

Récemment encore, l'année dernière, un physicien mathématicien assez génial, **Witten**, a réussi à partir de l'intuition physique, à trouver sans démonstration des propriétés tout à fait remarquables en géométrie, en topologie. Nous vivons une époque formidable, on peut avoir la médaille Fields, la plus haute distinction mathématique, sans rien démontrer, "simplement" en devinat des théorèmes (qui se formulent de façon Bourbakiste) en s'aidant de l'intuition physique.

On peut aujourd'hui avoir des mathématiques extrêmement formalisées et qui en même temps prétendent être de plein pied avec l'intuition physique.

C'est, je pense, une révolution qui va se poursuivre et qui sera quelque chose de très important. C'est une des retombées positives de l'évolution "Bourbakiste" au 20ème siècle.

La crise des fondements

Il faut dire un mot de l'ambition proprement logique du début du siècle. La question était d'essayer de formuler les mathématiques comme système formel cohérent. C'était un des problèmes de Hilbert : donner un fondement rigoureux à l'arithmétique.

D'un certain point de vue cela s'est réalisé : il s'est dégagé un système d'axiomes (avec des variantes) qu'on appelle aujourd'hui le système d'axiomes Zermelo-Frankel, dans lequel les mathématiques trouvent une cohérence logique complète.

A ceci près que dans l'esprit d'Hilbert, une fois ce travail fait, on devait pouvoir se convaincre que les mathématiques ne pouvaient pas receler de contradictions.

Or ce travail de formalisation a bien été fait, mais on a démontré par la même occasion qu'il était impossible de démontrer que les mathématiques sont non contradictoires.

Tout simplement en formalisant un petit peu le paradoxe du menteur. Si je vous dis «je suis un menteur, je dis tout le temps des mensonges», par quel raisonnement, allez-vous savoir si je mens ou si je dis la vérité ?

En réfléchissant un instant vous verrez que, si vous supposez que je suis menteur ou si vous supposez que je ne suis pas menteur, vous arrivez dans les deux cas à une contradiction.

C'est en formalisant un peu ce type d'argumentation, que Gödel, en 1920, a montré que cet espoir de démontrer la non-contradiction des mathématiques était une illusion.

Il a démontré par la même occasion qu'il existait dans le système formel qu'on venait de bâtir, des propositions indécidables, c'est à dire pour lesquelles il n'existe aucune démonstration permettant d'affirmer qu'elles sont vraies, et aucune démonstration permettant d'affirmer qu'elles sont fausses.

Ce résultat extrêmement important n'a pas révolutionné complètement la pratique mathématique. Un mathématicien ordinaire, une fois dans sa vie, met le nez dans ces choses là, et puis s'empresse un peu d'oublier les axiomes de Zermelo-Frankel.

Il est content que cela existe, content de savoir que les mathématiques sont un système formel cohérent.

Jusqu'à ces dernières années, on ne s'intéressait pas beaucoup , sauf si on était un logicien, à l'existence de ces propositions indicidables en mathématiques.

Qu'en sera-t-il à l'avenir ? Difficile de prévoir. Rien ne dit que certains grands problèmes, comme le théorème de Fermat, ne sont pas indécidables.

On sait fabriquer un problème très analogue au problème de Fermat, dont on peut montrer qu'il est indécidable. On a trouvé une équation, qui n'est pas $x^n + y^n = z^n$, mais une équation avec quinze variables, pour laquelle la question de savoir si elle a des solutions en nombres entiers, est indécidable.

C'est vrai que si ce type de phénomènes se multipliait, ça finirait par créer une certaine "perturbation" dans l'activité mathématique.

Pour l'instant, ça a surtout la vertu de rassurer philosophiquement, sur les mathématiques, de préciser un peu leur statut ; mais ça n'a pas encore le pouvoir de créer de nouvelles mathématiques.

Qu'est-ce qu'une preuve ?

En suivant le même ordre d'idée, on s'interroge sur ce qui constitue une démonstration. Ceux qui ont démontré qu'il n'existait pas de démonstration dans certaines propositions, ont été obligés de s'interroger sur ce qu'est une démonstration.

A partir de là, des logiciens ont proposé une conception légèrement plus restrictive de la démonstration que l'on a appelée **la machine de Turing**. Elle est le prototype des ordinateurs concrets. C'est essentiellement un ordinateur idéal.

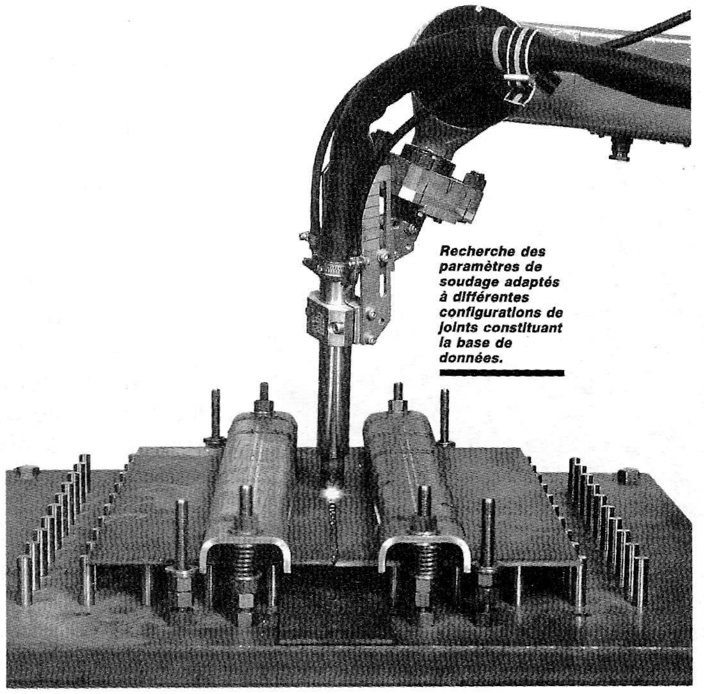
C'est à dire un ordinateur qui peut être le modèle de tous les ordinateurs existants.

C'est l'anglais Turing qui a introduit ce concept avec Von Neumann. Cela a conduit à préciser ce qu'on appelait un algorithme (classiquement, l'exécution d'une suite finie d'instructions préalablement codifiées. Il est tout à fait remarquable que ce concept soit arrivé avant l'apparition des machines réelles, il a servi de modèle dans la fabrication des premiers ordinateurs. C'est le même Von Neumann qui a conduit la réalisation pratique du premier ordinateur, utilisé pour la fabrication de la bombe atomique aux Etats-Unis.

Ce courant de pensée est beaucoup plus riche de conséquences que les discussions sur l'axiomatique, parce qu'il met à jour une problématique entièrement nouvelle qui tourne autour de la notion de machine. On se pose la question de fabriquer des objets, et non plus de démontrer leur existence, et de fabriquer des algorithmes qui les construisent.

La théorie de la complexité

Ce projet conduit à revisiter une partie



Recherche des paramètres de soudage adaptés à différentes configurations de joints constituant la base de données.

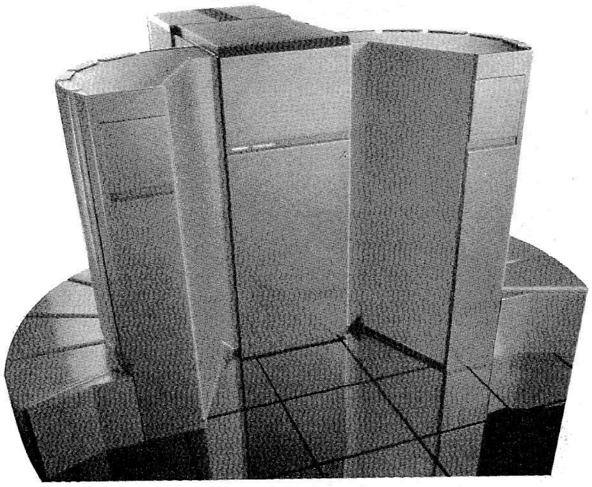
importante des mathématiques et à faire un travail un peu nouveau : c'est ce que l'on appelle faire des mathématiques effectives, dans lesquelles les objets dont on parle doivent pouvoir être construits par des algorithmes.

On est alors conduit à s'interroger sur la complexité de ces algorithmes, c'est à dire en gros la longueur des suites d'instructions qu'il faut écrire pour faire tourner un programme. La question est : est-ce que l'on peut avoir des indications a priori sur le nombre de lignes de programme pour calculer telle ou telle chose, démontrer telle ou telle propriété.

Il y a toute une théorie qui se développe, qu'on appelle la théorie de la complexité de calcul, et par ailleurs on voit que l'objet d'intérêt change. On s'intéresse maintenant non plus à des propriétés mathématiques en général, mais à des propriétés qui s'écrivent avec un nombre fini de symboles en un temps fini. On s'intéresse aux mathématiques du fini, aux mathématiques du "discret" qui intègrent évidemment toutes sortes de mathématiques pré-existantes.

Ces mathématiques sont liées aux machines à calculer, auxmachines qui sont capables de traiter l'information.

Ainsi voit-on apparaître à côté de la physique, une deuxième très grande source d'inspiration pour les mathématiques d'aujourd'hui, ce sont les machines.



Sorti en mars 1988, le CRAY Y-MP est doté de 8 processeurs, sa mémoire atteint 64 millions de mots de 64 bits.

Je ne dirai pas, les sciences de l'information parce que cela ne veut pas dire grand chose ; je préfère dire, les machines à traiter l'information.

C'est une deuxième grande source de problèmes, qui évidemment est beaucoup moins abondante que la source de la physique.

Les Marseillais peuvent y être intéressés au premier chef puisque le CNRS va créer à Marseille un institut sur ce thème : "les mathématiques discrètes".

Et maintenant ...

Je viens de décrire où avait abouti l'évolution du siècle. Aujourd'hui on peut essayer de discerner quelques grandes tendances, avec un certain nombre de conséquences. Il est évident que les problèmes que l'on va se poser maintenant ne seront plus de même nature.

En particulier, je ne pense pas qu'il y ait dans les 20 prochaines années de grands débats sur les fondements des mathématiques. Mais par contre, il y a des questions nouvelles qui vont se poser et qui vont concerner la nature, la façon de faire, des mathématiques, et aussi la nature de ce que l'on cherche.

Prenons l'exemple du problème des trois corps. Cela donne à penser ! Voilà un problème où les lois physiques sont extrêmement simples, elles sont connues dès le lycée, ce sont les lois de Newton. On peut écrire des équations différentielles qui régissent le mouvement de trois planètes et ensuite on ne sait pas qu'en faire ; par exemple on n'est pas capable de dire si les planètes vont à un certain moment entrer en collision.

C'est quand même un défi considérable. On peut se demander alors ce qu'il est intéressant de chercher dans ce domaine. Si l'on n'est pas capable finalement de faire une description complète, précise, des phénomènes (ne parlons pas de calculer les solutions...). On peut se dire après tout que c'était trop demander.

Quelles sont les bonnes questions à se poser ? C'est un peu comme cela que Poincaré a procédé, c'est ainsi qu'il en est venu à proposer la notion de **système dynamique** qui était une façon nouvelle de poser le problème.

On peut voir cela comme l'étude géométrique de la trajectoire d'évolution d'un système (mécanique, physique,...) dans l'espace de paramètres qui définissent le système - par exemple les positions et les vitesses des planètes - et on peut essayer de développer une problématique nouvelle dans ce cadre.

C'est une démarche que l'on rencontrera souvent dans les problèmes qui font "la une" aujourd'hui.

Si l'on ne peut pas résoudre le problème des 3 corps, qu'en est-il des problèmes de type météo. Dans ce cas, en principe, on est encore capable d'écrire les équations, et puis après ... Ce sont des problèmes dans lesquels des variations infinitésimales entraînent de très grandes variations (y compris qualitatives) au bout d'un certain temps.

Quels sont les instruments que l'on va bâtir pour appréhender ces systèmes ?

Il y a déjà eu la réponse construisant des modèles probabilistes. Il y a beaucoupsde domaines où l'on se contente d'avoir un modèle probabiliste dans lequel on introduit du hasard ou de l'incertitude, non pas que les lois ou les conditions ne seraient pas connues avec certitude, mais tout simplement parce qu'on ne sait pas faire autrement, parce qu'on ne sait pas résoudrel les équations.

Et si l'on pense aux problèmes posés par la biologie par exemple, alors là on se dit qu'il va falloir forcer notre talent... Il va falloir faire des mathématiques de façon entièrement différente (que l'on a peine à imaginer) parce qu'on a un très grand nombre de données à manipuler, une trop grande complexité des phénomènes à mettre en équation..., et même si l'on y parvient, rien ne nous garantit pas qu'on pourra faire quoi que ce soit des équations.

Il y a là une problématique, différente de celle des fondements, qui consiste à essayer de préciser ce que résoudre veut dire. C'est une problématique très moderne, qu'il s'agisse de traiter des problèmes pratiques comme le **"Global Change"**, c'est à dire les phénomènes de type météorologique, ou bien des problèmes plus théoriques comme le problème des "n corps".

Les mathématiques comme enjeu économique

Je terminerai en évoquant un autre aspect dans les mathématiques d'aujourd'hui qui va se développer énormément dans les années qui viennent et qui n'a pas grand chose à voir avec la problématique purement scientifique que je viens d'esquisser : il s'agit des mathématiques comme enjeu économique direct.

C'est un phénomène relativement récent, on peut le dater des années soixante. Il vient tout simplement de l'importance qu'a pris la modélisation mathématique avec la possibilité de faire de très gros calculs.

Aujourd'hui par exemple, dans les programmes d'aéronautique, comme le programme d'un avion de chez Dassault, disons le "Rafale", le coût des calculs est à peu près équivalent au coût des expériences en soufflerie.

Ça veut dire qu'on fait tourner de très gros programmes. Un très gros programme a, par exemple, 500 000 instructions d'un langage courant, disons, et dans ces 500 000 instructions, on trouve ce que l'on appelle "la couche scientifique" qui comprend 5 à 10 000 instructions pas plus, et qui résume la formulation scientifique du problème.

Si cette "couche scientifique" n'est pas correcte, on peut jeter le programme de 500 000 lignes. C'est là que le mathématicien intervient.

Si l'on regarde ce qui se passe dans les programmes les plus avancés, comme la navette spatiale européenne Hermès, il ne s'agit plus du tout de définir des éléments industriels déjà identifiés, du style la carlingue, les gouvernes, le nez, ... ou de faire des simulateurs de mouvement.

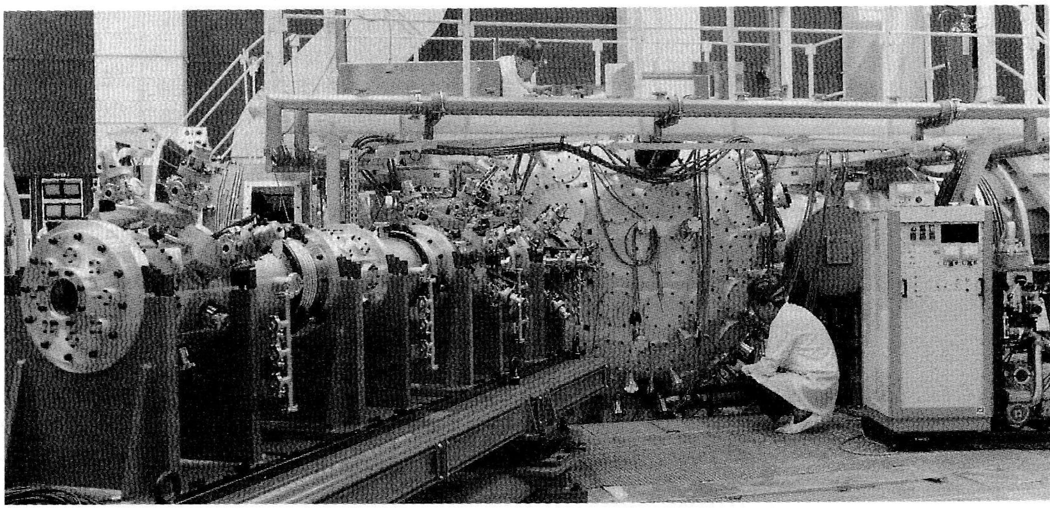
Il s'agit d'élaborer des modèles qui vont premièrement convaincre les gens que le projet est faisable et d'autre part qui va permettre de le mener à bien. Or ce modèle va avoir à prendre en compte des phénomènes extrêmement complexes qui dépendent de beaucoup trop de paramètres pour que l'on se contente d'extrapoler, disons à partir de quelques données expérimentales, dequelques essais au sol.

Dès qu'il y a plus de sept paramètres, les spécialistes disent que ce n'est plus possible.

Si l'on regarde, par exemple, le problème de la rentrée dans l'atmosphère, ça couvre un très large spectre de phénomènes : entre le début de la rentrée et la fin vous passez d'une situation de gaz raréfiés qui obéissent aux équations de Boltzmann, à une situation de fluides visqueux qui obéissent à l'équation de Navier-Stokes, et entre les deux, si vous rajoutez un peu de réaction chimique, de combustion, qu'est-ce qui va se passer ?

Vous ne pouvez pas aller chercher dans des bouquins des recettes toutes faites. Il va falloir modéliser de A jusqu'à Z.

Voilà un exemple de problème mathématique très important, pour lequel il faut de véritables mathématiciens. dans l'exemple que j'ai cité, ce travail met en jeu relativement peu de monde, une quarantaine de petites équipes de deux à trois personnes, dans toute l'Europe,



De nombreuses simulations numériques sont effectuées sur le CRAY X-MP pour le laser PHEBUS. Ici, vue de la salle d'expériences.

mais c'est absolument capital.

Voilà une entreprise industrielle qu'on ne peut pas concevoir aujourd'hui sans un noyau de mathématiciens.

D'autres exemples industriels

L'exemple d'Hermès se retrouve dans d'autres secteurs. Cela a commencé dans les années 50-60 avec l'industrie nucléaire puis les compagnies pétrolières s'y sont mises avec les simulations de gisements.

Aujourd'hui les compagnies pétrolières dépensent beaucoup d'argent et de matière grise pour ce genre de travail, avec en particulier un outil nouveau : le développement en série d'ondelettes qui est mieux adapté que le développement en "série de Fourier".

Il y a évidemment en aéronautique tous les calculs de mécanique des fluides, dans l'industrie spatiale tous les problèmes de contrôle optimal (comment stabiliser une structure, comment la gérer...).

Plus récemment on a vu se convertir à cette activité qu'on appelle le "calcul scientifique", de nouveaux secteurs industriels plus classiques, comme l'industrie automobile, avec les essais non destructifs en ordinateur. Il y a aussi l'industrie des semi-conducteurs, les télécommunications où la théorie du signal est devenue aujourd'hui une théorie essentiellement mathématique (ce qu'on retrouve d'ailleurs dans les enseignements universitaires).

Il y a auusi le vaste secteur des statistiques. La recherche de pointe occupe une activité relativement réduite dans l'ensemble de l'activité, mais c'est une part importante dans des domaine très divers. Iil y a, par exemple, un véritable engouement aujourd'hui pour les modèles stochastiques en finance. Depuis les derniers cracks il y a beaucoup de nos collègues qui ont été embauchés dans des banques !

Et puis, il y a des applications plus nouvelles. Celles de la géométrie en conception assistée par ordinateur ou en robotique. Tout ce qui tourne autour de la reconnaissance d'images ou de la reconnaissance de formes qui utilisent soit des probabilités soit de la géométrie (y compris sous une forme assez abstraite). Tout ce qui tourne autour des codages des signaux, la cryptographie, etc...

Ainsi se constitue peu à peu tout un secteur industriel qui a besoin de mathématiciens, de vrais mathématiciens, et plus seulement d'ingénieurs de haut niveau car ce type d'activité est relativement proche de la recherche.

Pour l'instant, ça ne concerne encore que quelques centaines de personnes, mais c'est en train de devenir une affaire d'argent et même de beaucoup d'argent. Il y a des signes qui ne trompent pas. On voit des collègues créer des cabinets de "Consulting" en mathématique, ce qui est assez nouveau. On peut parier que d'ici 20 ans, c'est une activité qui aura pris beaucoup d'extension.

J'ai essayé de décrire comment je voyais les choses en tant que témoin. Mais on est toujours témoin plus ou moins indirect. On ne connaît jamais toutes les mathématiques ; on ne connaît pas toutes les applications. Il s'agit bien souvent d'informations de seconde main.

Je ne crois pas avoir réussi à brosser un panorama des mathématiques dans 20 ans (l'ai-je seulement tenté ?). Mais cela vous a peut-être donné quelques idées sur les mathématiques de notre temps et sur celles à venir. C'est sans doute très différents de la vision qu'on peut en avoir quand on vient de finir ses études secondaires ou même de réussir à un concours prestigieux.

C'est un vrai problème d'arriver à rendre sensible en quoi consiste aujourd'hui l'activité mathématique. C'est d'autant plus difficile qu'il y a à la fois l'aspect "aventure historique" et l'aspect "applications industrielles" et, entre les deux, il y a tout ce qui concerne l'interaction avec les autres sciences.

Le champ des mathématiques est aujourd'hui incroyablement vivant et fécond. Le vrai grand problème sera plutôt le manque de mathématiciens que le manque de sujets.