

Géométrie non-euclidienne : La controverse franco-allemande

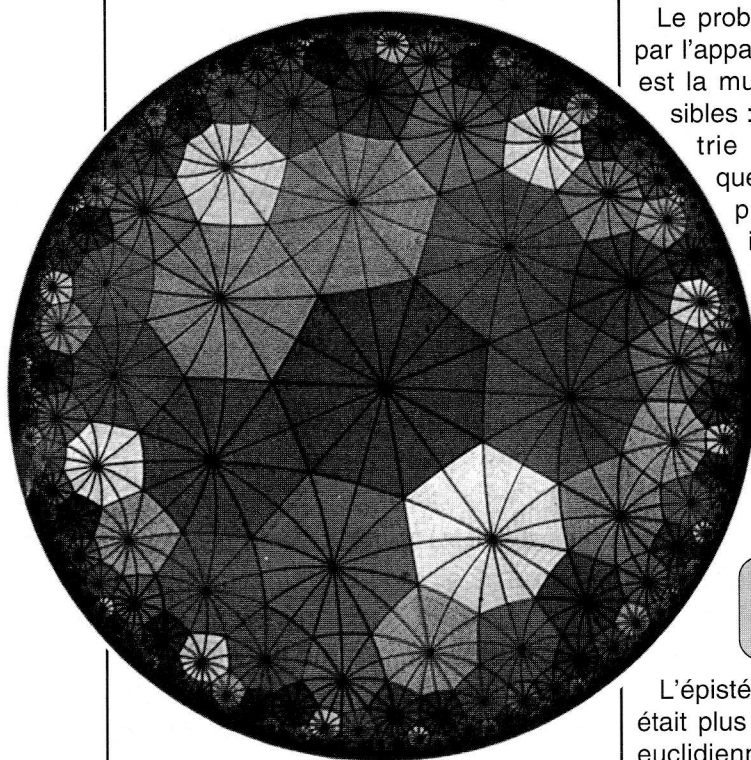
Klaus VOLKERT — Allemagne

Dans la première partie de l'atelier nous avons survolé rapidement l'histoire de la géométrie non-euclidienne (cf. annexe 1 : Les grandes étapes). De plus nous avons étudié quelques points caractéristiques de ces géométries ("La somme des angles dans un triangle est différente de deux droits", "Il n'existe pas de figures semblables non-congruents", "Il n'y a pas de carré", etc...). Ensuite nous avons analysé la chronologie de la géométrie non-euclidienne dans la deuxième moitié du 19^e siècle (cf. annexe 2). Cette chronologie nécessite quelques commentaires.

Le monde mathématique était assez bien informé sur la nouvelle géométrie que l'on appelle plus tard géométrie non-euclidienne : Lobatchevski a publié beaucoup de textes dans plusieurs langues (russe, français, allemand). Un de ses travaux est paru dans un journal très important à cette époque : le "Journal de Crelle". Mais on n'a pas lu ces textes ou — peut-être — n'a-t-on pas compris Lobatchevski (cf. le commentaire de Delbœuf).

Cette idée était étayée par l'épistémologie de Kant qui disait dans sa "Critique de la raison pure" (1781) que les axiomes de la géométrie (euclidienne bien entendu !) sont des propositions synthétiques a priori, donc nécessaires. Cette épistémologie était très répandue en Allemagne dans la deuxième moitié du 19^e siècle; elle était propagée en France par Ampère et d'autres (p.e. par Renouvier vers la fin du siècle). Mais elle n'a jamais eu en France la même importance qu'en Allemagne.

Le problème épistémologique évoqué par l'apparition de la nouvelle géométrie est la multiplicité des géométries possibles : il n'y a plus une seule géométrie mais plusieurs ! Mais alors, quelle est celle de la réalité ? Ce problème n'était pas tellement important pour l'empirisme qui était assez fréquent parmi les philosophes français : pour l'empirisme la décision entre les géométries possibles se fait par l'expérience (l'empirisme en géométrie était défendu en Allemagne par Gauss et Riemann).



Il semble qu'on était convaincu que la géométrie euclidienne était la seule géométrie applicable à l'espace physique.

Thèse 1 : Un scandale ?!

L'épistémologie dominante en France était plus favorable à la géométrie non-euclidienne que le Kantisme allemand. La géométrie non-euclidienne ne faisait pas scandale en France.

Le premier à propager cette nouvelle

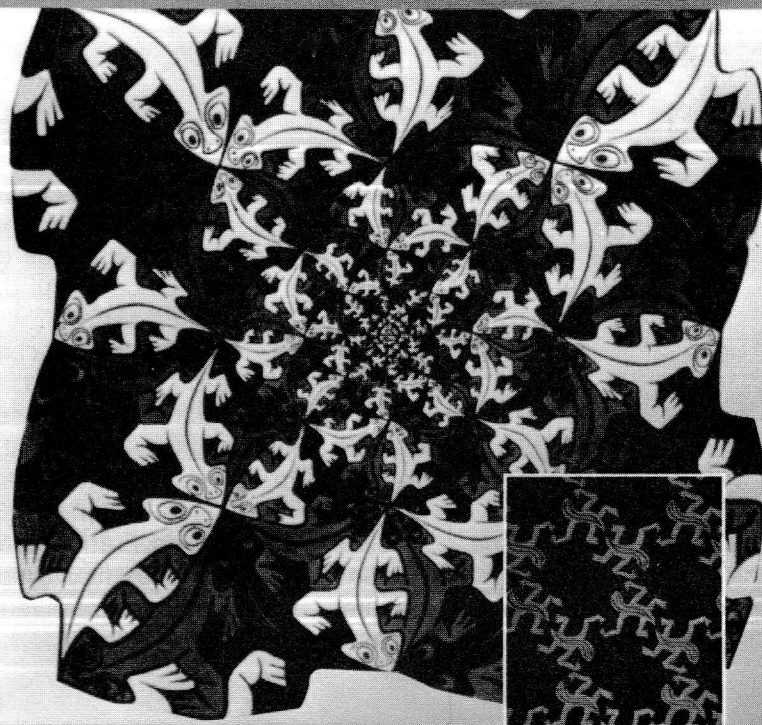
géométrie en France fut J. Houël. Ce qui n'est pas clair pour moi c'est de savoir par qui il a appris l'existence de la géométrie non-euclidienne (peut-être par R. Baltzer, avec lequel il était en correspondance ; Houël a traduit un livre de Baltzer sur les déterminants. Baltzer était un disciple de A.-F. Möbius qui était un géomètre éminent et un disciple de Gauss). Houël commença à publier des textes sur la géométrie non-euclidienne en 1866 (c'était une traduction d'un mémoire de Lobatchevski suivie des extraits de la correspondance de Gauss et Schumacher). Mais il semble qu'en France l'intérêt en fut faible. On peut imaginer plusieurs raisons à cela :

La mathématique française ne s'intéressait pas aux fondements de la géométrie ; elle était d'abord analyse — y compris dans des disciplines comme la théorie des fonctions (alors en plein développement), la géométrie et la mécanique analytique (cf. l'article de H. Gispert : "La France mathématique"). A cette époque les mathématiques françaises étaient dominées par l'école analytique des professeurs de l'Ecole Polytechnique (Sturm, Serret, Hermite, Bertrand, Duhamel). Il est vrai qu'il y avait aussi une école de géométrie sous l'autorité de Chasles et complétée par les traditions soit de la géométrie descriptive (Monge, Carnot), soit de la géométrie projective (Poncelet, Chasles). Mais cette école ne s'intéressait pas tellement aux questions des fondements — à la seule exception des controverses sur la question "analytique ou synthétique". Il semble que Poincaré ait été le premier grand mathématicien français à s'occuper des fondements de la géométrie dans la deuxième moitié du 19e siècle. Même Darboux, le confident de Houël, ne s'engagea pas pour la nouvelle géométrie (sauf par le contenu du "Bulletin des sciences mathématiques" qu'il dirigeait avec Houël).

Thèse 2 : Propagation en Allemagne

Houël n'était pas une autorité dans le monde mathématique français à son époque. Au contraire la géométrie non-euclidienne fut propagée en Allemagne par H. Helmholtz, alors la plus grande

SPACES AND SYMMETRIES



Hyperbolic and Euclidian drawings.

M. C. Escher

ESPACES ET SYMÉTRIES

Pavages Eucliden et hyperbolique.

M. C. Escher

autorité scientifique de son pays.

Houël travaillait en province (à Bordeaux) ; il n'était pas membre de l'Académie des Sciences (devant laquelle Bertrand défendait une fausse démonstration du postulat des parallèles en 1869 : c'est l'affaire Carton) ni de l'Ecole Polytechnique ou de l'Ecole normale supérieure. Par contre la géométrie nouvelle était également défendue en Allemagne par des mathématiciens importants comme F. Klein et W. Killing.

Thèse 3 : Tous prêts à tout contre

Le monde mathématique français ne s'intéressait pas à la géométrie non-euclidienne. Sa structure autoritaire ne donnait aucune chance à des gens comme Houël.

La parution de la géométrie non-euclidienne fit vite scandale en Allemagne. Il y eut une foule de traités et de pamphlets contre la nouvelle géométrie — souvent sous le prétexte de défendre la philosophie kantienne (ou simplement le sens commun). Cette discussion n'eut pas lieu au niveau mathématique le plus élevé, mais dans tout le monde cultivé. Il

Panneau de l'exposition
"Horizons maths"

semble que le pluralisme allemand ait été plus favorable à de telles discussions que le centralisme français.

Les controverses

Les controverses en France commencèrent avec un retard considérable dans les années quatre-vingt-dix. Les combattants en furent Poincaré, qui développa son conventionnalisme en réaction à la géométrie non-euclidienne : "Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode". Couturat, qui défendit les idées logicistes, et Renouvier, qui voulut défendre Kant. Ainsi la discussion en France connaît dès son début des idées nouvelles qui n'avaient pas eu cours auparavant en Allemagne.

ANNEXE 1 Les grandes étapes

1° - Essais pour démontrer directement le postulat des parallèles à partir de la géométrie absolue.

Problème : il n'est pas permis d'utiliser des propositions qui sont équivalentes au postulat des parallèles.

Par exemple : La ligne des points qui sont équidistants à une droite, est elle-même une droite ; théorème de Thalès modifié : Simplicius.

2° - Essais pour démontrer le postulat des parallèles par réduction à l'absurde des géométries qui sont fondées sur une des négations du postulat des parallèles :

— il n'existe aucune parallèle (en prin-

cipe, cette hypothèse est réfutée par Euclide lui-même : I, 31 qui affirme l'existence d'une parallèle) ;

— il existe plusieurs parallèles.

Cette voie conduit à un travail en géométrie non-euclidienne, parce qu'il faut déduire des "théorèmes" pour en chercher une contradiction : Lambert, Saccheri.

3° - Parce qu'on n'a pas trouvé de contradiction dans la géométrie non-euclidienne, on commence à l'accepter dans le sens d'une théorie supposée consistante. Mais on n'est pas encore sûr qu'il n'y a pas de contradiction en géométrie non-euclidienne ; c'est seulement un fait empirique : Gauss, Lobatchevski, Bolyai.

4° - Démonstration de l'équivalence logique des diverses géométries par la méthode des modèles : Beltrami, Klein, Poincaré.

5° - Acceptation de la géométrie non-euclidienne dans le sens épistémologique comme une théorie saine : Helmholtz, Poincaré, Couturat.

ANNEXE 2 Chronologie de la géométrie non- euclidienne moderne

1733 G. Saccheri : Euclides ab omni naevo vindicatus.

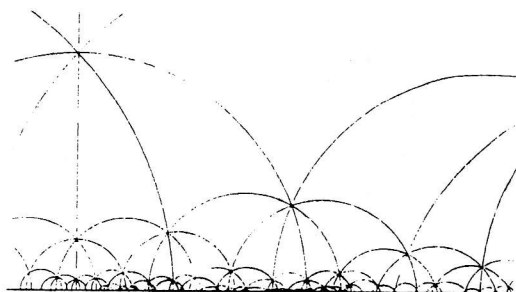
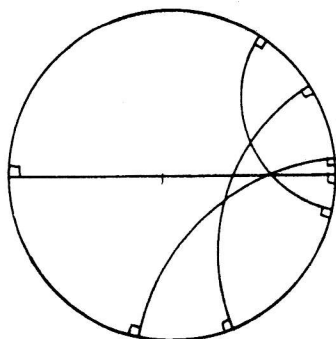
1763 G.-S. Klügel : Conatuum praecipuorum theoriarum parallelarum demonstrandi recensio.

1781 I. Kant : Critique de la raison pure.

1786 J.-H. Lambert : Theorie der Parallelinien (écrit en 1776, publié par K.-F. Hindenburg).

1794 A.-M. Legendre : Eléments de géométrie (beaucoup d'éditions avec beaucoup de changements).

1816 Lettres de Gauss à Gerling avec des considérations sur la géométrie non-euclidienne.



1826 N. Lobatchevski : Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles (Kasan - manuscrit perdu).

1829 N. Lobatchevski : Les fondements de la géométrie (Kasan - en russe).

1832 J. Bolyai : Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens (Maros-Vasarhely).

1836 N. Lobatchevski : Application de la géométrie imaginaire à quelques intégrales (Journal de Crelle).

1837 N. Lobatchevski : Géométrie imaginaire (Journal de Crelle).

1840 N. Lobatchevski : Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Berlin).

1851 Traduction allemande de Bolyai 1832 par W. Bolyai.

1856 N. Lobatchevski : Pangéométrie (Kasan) W. Sartorius von Waltershausen : Gauss zum Gedächtnis.

1860 J. Delbœuf : Prolégomènes philosophiques de la géométrie suivie d'une dissertation sur les principes de la géométrie.

La correspondance de Gauss et Schumacher commence à paraître (jusqu'en 1865).

1866 Traduction française de Lobatchevski 1840 par J. Houël.

B. Riemann : Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (discours prononcé en 1854).

1867 J. Houël : Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire.

1868 E. Beltrami : Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea.

H.-V. Helmholtz : Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen.

1869 Traduction française de Beltrami 1868 par H. Houël. J. Bertrand défend une fausse démonstration du théorème sur la somme des angles d'un triangle devant l'Académie (affaire Carton).

1871 F. Klein : Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Mathematische Annalen).

C. Flye Sainte Marie : Etudes analytiques sur la théorie des parallèles.

1875 E. Dühring : Coursus der Philosophie : la géométrie non-euclidienne comme produit des parties dégénérées du cerveau de Gauss.

1876 P. Tannéry : La géométrie imaginaire et la notion de l'espace (Revue philosophique de la France et de l'étranger).

1882 H. Poincaré : Théorie des groupes fuchsien (Acta mathematica) avec le modèle aujourd'hui dit de Poincaré pour la géométrie hyperbolique.

1891 H. Poincaré : Les géométries non-euclidiennes (Revue générale des Sciences pures et appliquées).

Début d'une longue discussion sur les fondements des mathématiques — en particulier de la géométrie — dans la Revue de Métaphysique et de Morale et dans la Revue philosophique (Andrade, Calinon, Couturat, Delbœuf, Lechallas, Mansion, Milhaud, Poincaré, Renouvier, Russell).

Max Simon : Zu den Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie ("Schul-programm" du lycée de Strasbourg) ; destiné aux professeurs des lycées pour les familiariser avec la nouvelle géométrie.

La géométrie non-euclidienne est nécessaire "pour un entendement approfondi des parties les plus élémentaires de la géométrie euclidienne" (E. Study).

	Theory of Parallels.						Foundations of Geom. and Non-Eucl. Geom.						n Dimensions.						Totals.					Grand Totals.
	To 1870.	1871-80.	1881-90.	1891-1900.	1901-10.	Total.	To 1870.	1871-80.	1881-90.	1891-1900.	1901-10.	Total.	To 1870.	1871-80.	1881-90.	1891-1900.	1901-10.	Total.	To 1870.	1871-80.	1881-90.	1891-1900.	1901-10.	
German	152	16	8	11	14	201	36	69	53	110	206	474	14	66	135	142	146	503	194	143	188	259	365	1,149
French	140	11	16	37	35	239	26	15	36	148	157	382	6	15	34	124	117	296	170	35	83	302	294	884
Italian	24	8	7	4	9	52	15	33	35	63	97	263	3	5	141	171	225	545	40	45	182	255	326	848
English	68	4	9	4	12	97	12	29	27	94	152	314	13	33	56	103	166	371	90	62	86	177	308	723
Dutch	3	—	1	—	—	4	—	—	—	1	7	8	—	—	—	16	53	69	3	—	1	16	59	79
Spanish and Portuguese	2	—	—	—	1	3	—	—	2	12	6	20	—	—	1	2	2	5	2	—	3	14	8	27
Danish and Norwegian	—	—	—	—	—	—	—	—	4	2	9	15	—	—	1	1	4	6	—	—	5	3	13	21
Swedish	5	1	—	—	—	6	—	—	2	1	—	3	—	—	2	—	—	2	5	1	4	1	—	11
Russian	2	1	—	1	6	10	6	—	2	43	31	82	1	—	1	6	6	14	8	1	2	47	41	99
Polish	—	—	—	—	—	—	—	2	1	6	4	13	—	1	3	1	6	11	—	2	4	7	9	22
Ruthenian	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
Magyar	—	—	—	1	—	1	1	1	2	8	22	34	—	—	—	—	2	2	1	1	2	9	24	37
Czech	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	3	6
Croatian	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	7	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	9	9
Rumanian	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Latin	64	—	—	2	—	66	7	—	—	2	3	12	3	—	—	—	1	4	72	—	—	4	4	80
Greek	6	—	—	—	—	6	2	—	—	—	—	2	1	—	—	—	—	1	9	—	—	—	—	9
Arabic	4	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	4
Sanskrit	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Esperanto	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	4	4
Totals	470	41	41	61	79	692	105	149	164	513	708	1,639	41	120	374	566	731	1,832	598	290	560	1,098	1,470	4,016