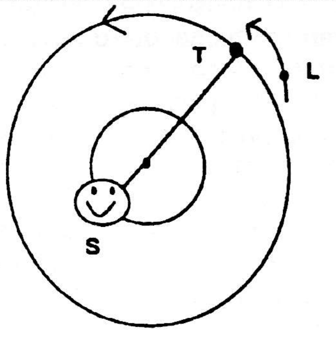
LE CHAOS A LA VILLETTE

Michel Darche. Orléans

Dans la mythologie grecque, le chaos:"Vide primordial" à partir duquel tout a été engendré .
Pour l'Encyclopédie Larousse : «Etat de confusion générale, grand désordre, trouble complet»

Depuis toujours, les hommes de science essaient de mettre de l'ordre là où règne le désordre qui paraît être dû au hasard ou à la vanité des hommes.



Le Soleil, la Terre et la Lune

Un déterminisme vieux comme le monde

Deux corps en présence, un grand qui sert de repère, un petit qui tourne autour.
Depuis Newton, astronomes et mathématiciens savent parfaitement décrire ce qui va se passer au fil du temps: suivant sa position initiale et sa vitesse initiale, la petite boule va être attirée par la grosse et s'en approcher en décrivant une trajectoire elliptique ou, au contraire, s'en éloigner définitivement. C'est l'orbitogramme de la Cité.
L'avenir de ce système clos es t entièrement déterminé par les conditions initiales.
Depuis Newton, l'Univers, malgré sa complexité, paraît être un gigantesque mouvement d'horlogerie. C'est le déterminisme entièrement prévisible des systèmes linéaires et de la mécanique rationnelle.

2 corps ça va , 3 corps bonjour les dégats

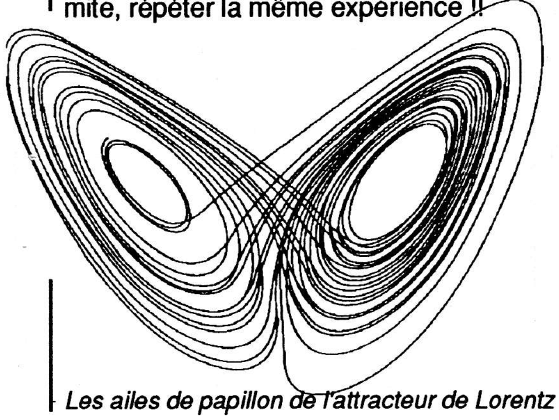
Introduisez un tiers dans ce système fermé et tout change !!!
Le désordre apparaît, c'est le chaos!! Autrement dit, l'impossibilité de prévoir ce qu'il adviendra de chacun de ces objets au cours du temps, surtout s'il est très long, bien que toutes les conditions initiales soient connues et que le système puisse être mis en équations (différentielles).
Le système est déterministe mais ... imprévisible: à deux états initiaux très voisins peuvent correspondre, à plus long terme, des comportements totalement différents, irréguliers et imprévisibles. Le système est trop sensible ... aux conditions initiales.
Ces phénomènes, déjà entrevus par Poincaré au début du siècle, sont aujourd'hui étudiés par de nombreux scientifiques comme le météorologiste Lorenz, le biologiste May, l'astrophysicien Michel Hénon, les mathématiciens ou physiciens Arnold, Bergé, Ruelle, Takens .
C'est le domaine des «systèmes dynamiques».

Le chaos à La Villette

Ces modèles chaotiques sont en effet utilisés pour étudier des phénomènes complexes dépendant d'un grand nombre de paramètres comme les prévisions météorologistes sur le court terme, l'évolution d'une épidémie ou d'une population de microbes sur un moyen terme, ou, sur un plus long terme, la circulation des planètes.
Mais on sait aussi fabriquer des situations chaotiques avec des systèmes dépendant d'un petit nombre de paramètres. C'est la Fontaine Turbulente de la Cité des Sciences: 14 degrés de liberté, 12 avec les 12 godets dans lesquelles l'eau coule à débit constant et 2 avec l'inclinason et la vitesse de rotation de la roue. Suivant les valeurs de ces 2 derniers paramètres, les mathématiciens savent prévoir que cette roue va tourner régulièrement, rester immobile ou se mettre à tourner de façon étrange: tourner dans un sens, s'arréter, se remettre à tourner dans l'autre sens, et cela de façon totalement chaotique.
A la Villette on sait prévoir l'imprévisible ou plutôt prévoir que le phénomène va devenir imprévisible !!!

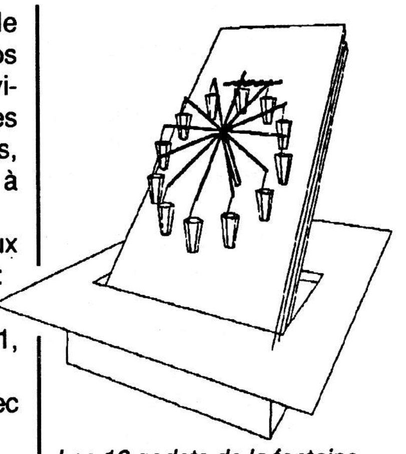
De l'aléa au chaos

Jusqu'à présent, en dehors des systèmes déterministes, il n'y avait qu'un autre type de système, les modèles aléatoires pour lesquels on utilise les méthodes statistiques ou stochastiques.
Mais comment prouver scientifiquement qu'un phénomène est aléatoire?
Il faudrait pouvoir partir de conditions initiales rigoureusement identiques. Essayez avec un simple dé ! Le lieu, le moment du lancé sont nécessairement différents, sans parler des autres conditions initiales. Avoir des conditions identiques serait, à la limite, répéter la même expérience !!



Les ailes de papillon de l'attracteur de Lorentz

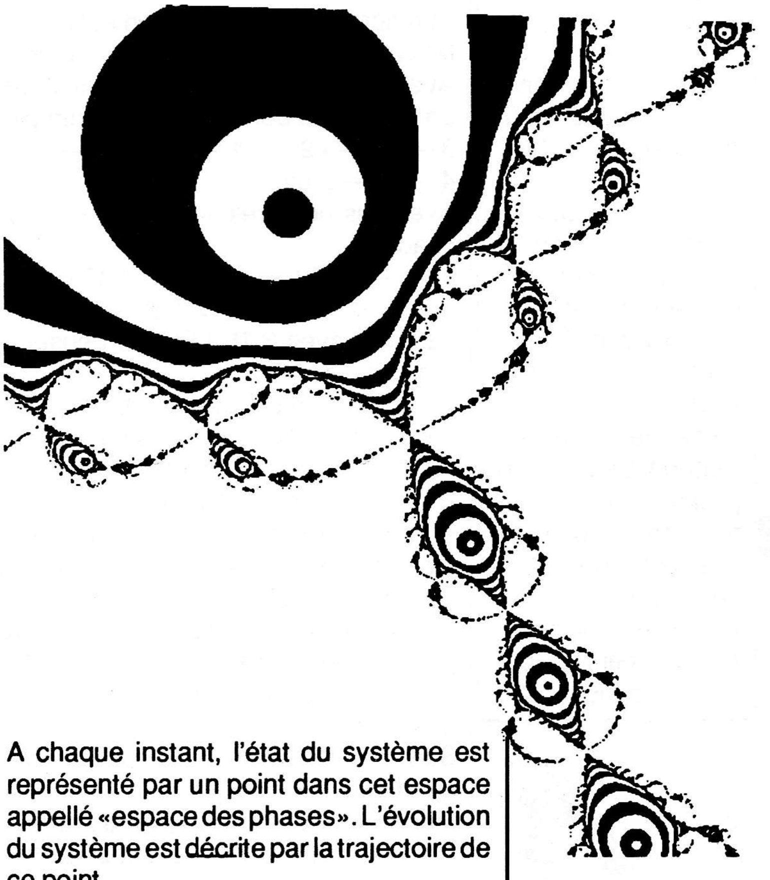
Entre le modèle déterministe et le modèle aléatoire, on trouve aujourd'hui le chaos déterministe. Chaotique parce qu'imprévisible, déterministe parce que régit par des équations qui, quoique non linéaires, dépendent uniquement des conditions à un instant donné.
Ces systèmes se révèlent sensibles aux conditions initiales de plusieurs façons :
- quasi-périodicité du phénomène,
- cascades de doublement de périodes (1, 2, 4, 8, 16, ...)
- intermittences du régime périodique avec changements de régime périodique.



Les 12 godets de la fontaine turbulente

D'étranges attracteurs

Comment sont décrits géométriquement ces phénomènes dynamiques?
Les topologistes les représentent par une trajectoire, un écoulement dans un espace dont la dimenson dépend du nombre de paramètres choisis.

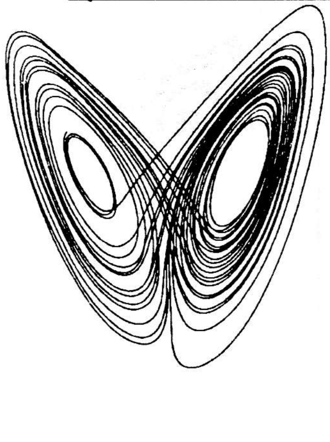


A chaque instant, l'état du système est représenté par un point dans cet espace appellé «espace des phases». L'évolution du système est décrite par la trajectoire de ce point.
Pour les systèmes les plus simples, ce point est attiré vers un point d'équilibre ou une courbe près de laquelle il repasse périodiquement. Les mathématiciens appelent ces courbes limites des attracteurs.

La Loi des corps

1- Deux corps s'attirent avec une force proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.
2-les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers
3- le rayon qui relie planète et Soleil balaie des aires égales en des temps égaux
4- Le cube de la distance planète Terre est proportionnel au carré du temps de révolution
5- Le rythme cardiaque serait un phénomène hautement chaotique pour les jeunes coeurs. En vieillissant ce rythme s'assagirait (Scientific American. 1990)

«On n'a pas besoin de longues observations pour se convaincre que la nature a inventé les mathématiques avant l'homme. Les physiciens dégagent les mathématiques implicites dans la nature en découvrant ses symétries cachées. Les mathématiciens en font systématiquement la théorie.» Largeault. 1985



Pour les systèmes chaotiques, les attracteurs sont des courbes qui, au contraire des courbes précédentes, présentent une symétrie interne: si l'on fait un zoom avant ou arrière sur l'attracteur, on y retrouve la même forme , la même structure. Ces courbes sont des fractales rendues célèbres par von Koch et Mandelbrot. Etrange, n'est-ce pas ?
Le chaos déterministe est caractérisé par ce type d'attracteurs que les mathématiciens appellent attracteurs étranges.

Des chiffres qui s'emballent

Pour les virtuoses de la calculette, de multiplan ou d'Excel, voici deux exemples numériques qui conduisent au chaos.

Premier exemple:
Choisissez un nombre entre 0 et 9.
Multipliez-le par 2 et gardez le chiffre des unités et la partie décimale quand elle apparaît.
Et recommencez l'opération sur ce résultat autant de fois que bon vous semblera.
Avec des nombres entiers, vous obtenez un belle suite périodique, par exemple :
3 —> 6 —> 2 —> 4 —> 8 —> 6 —> 2 —> 4 —> 8 —> etc
Avec des nombres «à virgules», c'est le chaos :
3,14 —> 6,28 —> 2,56 —> 5,12 —> 0,24 —> 0,48 —> 0,96 —> 1,92 —> etc
Essayez avec 3,15 ! Et que penser des irrationnels !!!
Exemple complètement abstrait direz-vous. Pas tout à fait si vous considérez la «transformation du boulanger» :
Une pâte à crèpe que vous étirez, puis pliez en deux, étirez à nouveau, pliez en deux, étirez, ... Imaginez quelle peut être la trajectoire d'un point de cette crêpe après toutes ces manipulations. Ce point peut être repéré par son angle de déplacement dans le disque-crêpe divisé en 10 quartiers.
Suivant la règle ci-dessus, il passe ainsi du quartier 3 aux quartiers 6, 2, 4, 8, ...
Mais si on veut être plus précis et dire qu'il est au départ en 3,14, tout change!!!

Autre exemple
La suite qui permet de calculer chaque terme x_{n+1} en fonction du précédent x_n par la formule $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ où n prend toutes les valeurs entières à partir de 0, x_0 étant donné au départ, par exemple O,20.
Vous obtenez la suite : 0,64 0,922 0,289 0,822 0,586 0,970 0,116 0,406 ...
Une suite qui paraît vraiment aléatoire, un phénomène qui est en fait chaotique: essayez avec 0,21 qui est tout proche de 0,20 et vous obtiendrez une suite qui s'éloigne très vite de la précédente.
Encore une invention des mathématiciens direz-vous. Et non, cette suite et toutes celles de la famille $x_{n+1} = 4kx_n(1-x_n)$ où k est un coefficient constant sont utilisées pour prévoir, ou plutôt essayer de prévoir, la croissance d'une population d'animaux, de microbes et le développement d'épidémies.
Le biologiste Robert May a remarqué, en 1970, que lorsque le coefficient k était voisin de 4, la croissance devenait très sensible aux conditions initiales et donc imprévisible et chaotique.

Derniers exemples pour la classe:
Des suites de calculs impossibles !!!
1- Etudiez la suite définie par
$x_{n+1} = 111 - 1130/x_n x_{n+1}$ avec
$x_0 = 11/2$ et $x_1 = 61/11$.
Programmez votre suite et constatez qu'elle semble converger vers 100. Est-ce possible ? Vérifiez-le autrement.
2- Soit à calculer la dérivée seconde f''(1) en t = 1 de la fonction :
$t \longrightarrow f(t) = (4970\,t - 4923)/(4970\,t^2 - 9799\,t + 4830)$
en l'approchant par
$dh = (f(1+h) - 2f(1) + f(1-h))/h^2$
avec h voisin de zéro.
Ce calcul par différences finies, même en double précision, vous conduira à une valeur archi nulle et archi fausse!! Observez le comportement de dh: des oscillations qui augmentent, une instabilité qui devient explosive, c'est le chaos!!! ■