L'HETEROGENEITE EN SECONDE

François Boucher, Saint-Paul de la Réunion

INTENTIONS

• Organiser une activité permettant à chacun de faire un peu de mathématiques à son rythme, à son niveau tout en ayant la satisfaction d'avancer, de progresser ou de trouver quelque chose.
• Créer une situation permettant d'observer les comportements des élèves, leurs difficultés, leurs erreurs, leurs représentations.

Objectifs plus spécifiques

• Développer une certaines habileté calculatoire, une connaissance du vocabulaire courant de l'algèbre et des règles de calcul usuelles.
• Développer l'auto-contrôle voire l'auto-questionnement, la capacité à formuler des conjectures et à les tester.
• Faire mémoriser quelques identités remarquables (disons $(a \pm b)^2$).

L'activité proposée peut prendre une séance ou plus (classe dédoublée, période d'une heure et demi).
La séance commence par une discussion sur les identités remarquables. Occasion pour chacun d'exprimer les souvenirs parfois pénibles qu'évoque l'expression. C'est quoi, ça fonctionne comment, ça sert à quoi... bref, les trois identités classiques sont écrites au tableau. La question est alors : «en connaissez-vous d'autres?», puis : «en existe-t-il d'autres?». L'activité peut alors démarrer.

Consignes de travail

(écrites au tableau puis données oralement)

1) Seule écrite au tableau :
Trouvez une identité remarquable pour $(a + b)^3$, puis pour $(a + b)4$, puis pour $(a + b)^5$ et $(a + b)^6$.
2) Puis lorsque le travail est bien lancé et que les plus rapides ont achevé le 1) :
Trouvez sans calcul une identité remarquable pour $(a + b)^7$, puis pour $(a + b)^8$.
3) Les consignes suivantes sont personnalisées; je choisis ce qui convient de demander pour la poursuite du travail en fonction des capacités de chacun :
3.1 Essayez d'expliquer (avec des mots, des dessins ou tout moyen qui vous semble utile) la règle que vous avez trouvée.
3.2 Trouvez une identité remarquable pour $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$...; expliquez.
3.3 Trouvez une identité remarquable pour $(a + b)^{15}$, puis $(a + b)^n$.

Déroulement de la première séance

Pas de consignes spécifiques sur l'organisation du travail; chacun démarre le travail individuellement, les échanges s'instaurant très vite. Les difficultés, les différences de vitesse d'exécution apparaissent immédiatement. Mon rôle est :
— d'observer, si possible enregistrer :
• les comportements (découragement, enthousiasme, travail en solitaire...),
• les difficultés diverses (compréhension des consignes, problèmes de calcul...),
• le réseau de communication qui s'installe dans la classe (nature des échanges, type de questions que les élèves se posent entre eux, la façon dont ils y répondent, argumentent...),
— apporter une aide adaptée permettant aux élèves de surmonter leurs difficultés,
— apporter des informations (vocabulaire algébrique, notations, conventions, règles de calcul...),
— donner les consignes suivantes au fur et à mesure de l'avancement du travail.
Modulo des différences de vitesse d'exécution, les trajectoires des élèves sont assez semblables. On peut en décrire une «moyenne» :
1) calcul de $(a + b)^3$:
$\mathbf{(a + b)^3} = (a + b)(a + b)(a + b)$
$= (a^2 + ba + ab + b^2)(a + b)$
$= \ldots\ldots\ldots$
2) calcul de $(a + b)^4$:
$\mathbf{(a + b)^4} = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$
$= (a^2 + ba + ab + b^2)(a^2 + ba + ab + b^2)$
$= \ldots\ldots\ldots$

ou

$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$
$= (a^2 + ba + ab + b^2)(a + b)(a + b)$
$= (a^3 + ...) (a + b)$

• nombreuses erreurs de calcul de toute nature,
• non-fonctionnement de règles simples (par exemple ba et ab sont conservés tels quels),
• c'est l'occasion, au coup par coup, de rappeler quelques règles de calcul, ce qu'est une règle de calcul, comment on s'en sert, du vocabulaire (terme, exposant, coefficient, développer, distributivité...),
• c'est l'occasion d'inciter :
- à la bonne présentation des calculs,
- à la relecture systématique de chaque ligne de calcul,
- à l'auto-contrôle en vérifiant à l'aide de valeurs simples 1, 0, —1,
- au contrôle de l'homogénéité pour ceux qui sont à même de comprendre l'argument,
- à l'écriture des expressions obtenues sous une forme «régulière», «ordonnée»,

Je place en général ici une intervention pour inciter à la réflexion sur les moyens de gagner du temps, de simplifier les calculs, d'éviter de refaire des calculs déjà faits. L'écriture $(a + b)^5 = (a + b)^4(a + b)$ et son utilisation ne sont pas évidentes, pas même spontanément réinvesties en $(a + b)^6 = (a + b)^5(a + b)$.

3) calcul de
$(a + b)^5 = (a + b)^4(a + b)$
puis de
$(a + b)^6 = (a + b)^5(a + b)$

• moins d'erreurs de calcul d'origine algébrique mais beaucoup d'omissions dans le développement (des termes, des exposants), d'où nouvelle incitation à l'auto-contrôle par exemple en vérifiant le nombre de termes obtenus dans un développement par l'application de la distributivité.

Ensuite, il y a en gros trois catégories d'élèves :

1. quelques rares qui trouvent tout tout de suite, ce qui ne pose pas de problème : le sujet est assez vaste pour les alimenter;

2. la majorité qui ayant réécrit les formules trouvées par calcul, découvrent assez vite la règle de formation des exposants des termes et cernent bien la difficulté restante: trouver une règle de formation des coefficients;

3. quelques rares qui ne voient rien, ont du mal à réécrire sans erreur une formule comportant tout de même 36 symboles ($(a + b)^5 = ...$); c'est essentiellement un problème de confiance en soi, il faut les convaincre qu'ils sont capables de trouver.

4. Dans le groupe 2, il y en a toujours pour avoir la bonne idée de ne s'occuper que des coefficients et de les réécrire sous forme de tableaux; fréquemment :

2
3 3
4 6 4
5 10 10 5
6 15 20 15 6

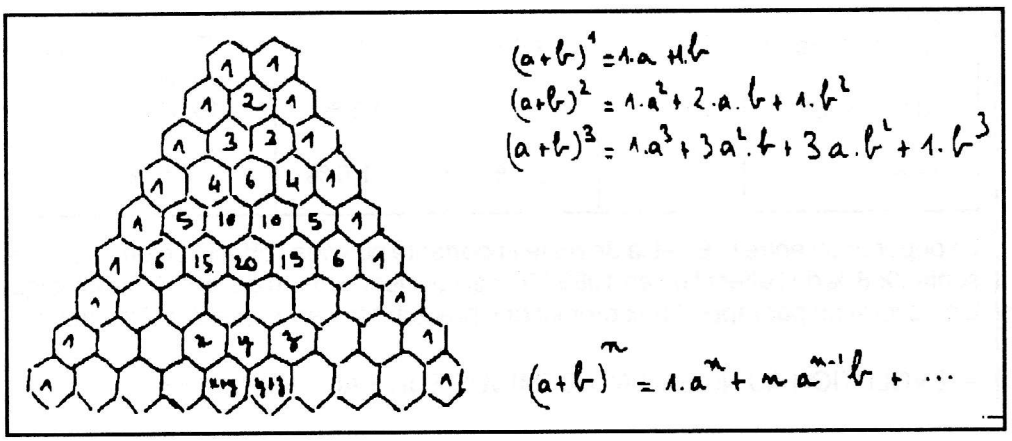
(les coefficients 1 sont souvent omis)

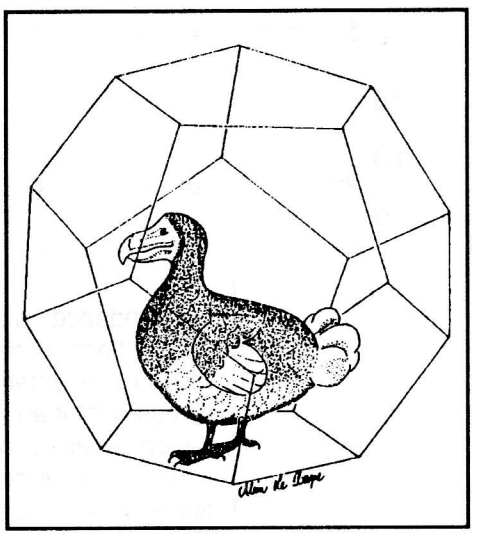
• je me cantonne dans une stricte non-directivité en incitant au débat entre élèves,
• les élèves conjecturent beaucoup; toutes sortes de trouvailles sont formulées, testées, rejetées,
• le prof reste la référence lorsqu'une règle semble tenir la route; le calcul de $(a + b)7$ aux fins de vérification n'est pas une idée spontanée,
• l'écriture en tableau comme ci-contre attire les élèves vers des règles de formation «verticales» avec la chaîne 2—>3—>4—>5—>6 perçue par tous.

Depuis quatre ans que je pratique cette activité avec des classes diverses, tous les élèves finissent par découvrir la règle classique de formation du triangle de Pascal en moins d'une heure et demi, sont capables de développer $(a + b)^7$, $(a + b)^8$; ... et ont conscience d'avoir la possibilité d'écrire autant d'identités remarquables qu'ils le souhaitent. «C'est infini», m'a dit une année une élève. Ces moments sont rares donc précieux.
Pour l'anecdote signalons aussi qu'un seul élève a trouvé une règle de formation des coefficients pour un exposant arbitraire ($C^k_{n+1} = C^k_n \times (n — k) / (k + 1)$); il est actuellement en TD avec de gros problèmes en mathématiques.

Déroulement de la deuxième séance

L'activité peut se poursuivre de façons diverses : topo historique sur le triangle de Pascal, travail sur (a — b)n; cette année j'ai préféré travailler sur la formulation de la règle trouvée. Les élèves sont en groupes de trois ou quatre. La consigne est la 3.1. Le produit fabriqué par groupes doit tenir sur un transparent pour rétroprojecteur. Au bout de 45 minutes, les productions sont projetées, critiquées, comparées. Mon rôle est d'organiser le débat. Un élève avait suffisamment de finesse d'esprit pour jouer le rôle du « bonnet d'âne » interprétant de travers toute explication prêtant à confusion. C'est l'occasion de montrer la fonction d'un vocabulaire précis, re-présenté ici comme réponse à un besoin.
La séance s'achève sur une consigne de mise en forme individuelle à la maison et sur une synthèse de ce qu'il faut retenir.
Six mois plus tard, 63 % des élèves de cette classe se souvenaient très bien de la règle et de son utilité.



Affiche réalisée par un élève

La classe a estimé que c'était joli, mais incompréhensible pour celui qui ne connaîtrait pas la règle.
Un autre élève a écrit un texte explicatif en français; le professeur d'anglais a accepté de jouer le cobaye mais n'a pas réussi à écrire $(a + b)^7$. ■