DES COMPLEXES SANS COMPLEXES

E.N.S. d'Atakpamé - Togo

Un secret mal gardé

L'histoire des nombres complexes commence en Italie à la fin du XVe siècle, en même temps que celle des nombres négatifs, avec la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 + px = q$ $(p, q) \in R^2$ par SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526). Il ne la publie pas et la confie à quelques amis dont ANTONE MARIA FIOR.

En 1535, FIOR provoque TARTAGLIA à un tournoi de mathématique au cours duquel il lui propose l'équation de DEL FERRO. TARTAGLIA arrive à résoudre l'équation et l'étend à $x^3 = px + q$. Chose curieuse il en garde lui aussi le secret.

1538 : Jerôme CARDAN (médecin, mathématicien, physicien, poète, astrologue et même un peu magicien, dit-on) demande à TARTAGLIA de lui communiquer son secret en lui promettant de ne le publier qu'avec le nom de son inventeur. TARTAGLIA refuse. Cardan relance TARTAGLIA qui finit par lui livrer quelques informations lui permettant de découvrir la fameuse formule de CARDAN donnant la solution sous la forme :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

CARDAN n'hésite pas à utiliser la racine carrée d'un nombre négatif! Suit toute une série de « querelles de clocher » qui n'avance pas le problème.

La formule de CARDAN

Elle prouve qu'une équation du 3e degré peut avoir trois ou une racine (dans R). De nos jours un raisonnement basé sur la représentation d'une fonction de ce type et de son intersection avec l'axe des abscisses, le prouve plus simplement.

La formule dite de Cardan a cela de paradoxal qu'elle n'est applicable que dans le cas d'une racine réelle. La technique de résolution est de Scipione del Ferro.
Cardan s'aperçoit du paradoxe et le signale dans l'Ars Magna paru en 1545.

Voici cette méthode :
Elle est basée sur l'identité
$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$.
Partant de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (on peut toujours moyennant un changement de variable affine ramener une équation générale du 3e degré à une équation de ce type), on pose $x = u + v$
d'où $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = x^3$
l'équation devient alors

$$[u^3 + v^3 + q] + (u + v)[3uv + p] = 0.$$

u et v étant généraux on annule chaque crochet! ce qui donne le système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \text{et} \\ uv = p/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \text{et} \\ u^3v3 = -p^3/27 \end{cases}$$

d'où u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré :
$U^2 + qU - p^3/27 = 0$
d'où

$$x = [(-1/2)q + (q^2/4) + (p^3/27)]^{1/3} + [(-1/2)q - (p^2/4) + (q^3/27)]^{1/3}$$

Ceci était la formule dite de Cardan. La résolution se termine par la factorisation du polynôme du 3e degré.
Cardan a eu égard pour les racines négatives, les appelant moins pures. Il appelle les racines imaginaires : racine de moins ou de moins sophistique.
En effet cette formule ne peut s'appliquer si $4p^3 + 27q^2$ est négatif (ce qui est le cas où il y a trois racines réelles!!).

La naissance de $\sqrt{-1}$

Il semble que Bombelli (Algebra, 1572) ait osé utiliser ce genre de nombres imaginaires. Signalons que l'on a retrouvé une

Ce texte, commenté et illustré par les élèves de l'E.N.S. d'Atakpamé, a déjà servi de base, à quelques mots près, à un cours-TD en terminale C à Blois pour introduire les nombres complexes. Furent ensuite proposées des démonstrations des propriétés de ces complexes. Cette présentation peu habituelle a reçu un écho, jugé favorable, auprès des élèves.

$$i^2 = -1 \,!$$

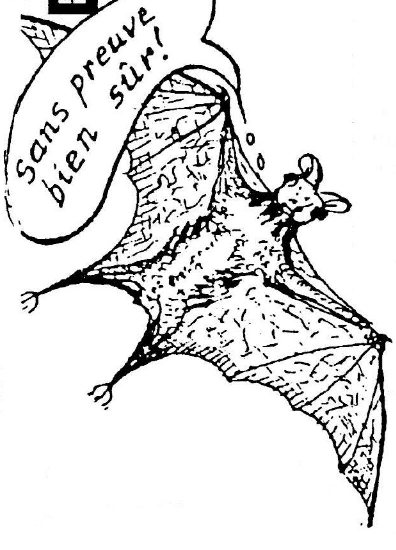
ébauche de son manuscrit datant de 1556 ce qui le place en précurseur.
Il résout le paradoxe par l'introduction d'une unité imaginaire appelée piu di meno (notre i). Il en édicte les règles de calcul pour l'addition et les produits telles que $i^2 = -1$ ......
Il prend de nombreux exemples dont en voix deux :

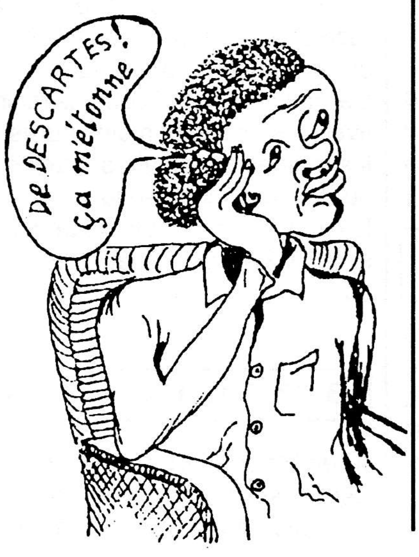
**** $x^3 = 51x + 104$**

On se ramène à :
$x^2 - 104x + 17^3 = 0$
$\Delta' = 2704 - 4913 = -2209 = -47^2$
les racines carrées de Δ' sont :
pui di meno 47 soit 47i et meno di meno 47 soit $-47i$
d'où il reste à extraire les racines cubiques de $52 + 47i$ et de $52 - 47i$.
Ce genre d'exercices sera une obsession pour tous les algébristes du XVIIe y compris Newton (1670).
Or ici grâce au bon choix de l'exemple on trouve :
4 pui di meno 1 et 4 meno di meno 1
$(4 + i)$ $(4 - i)$
Il suffit de vérifier que
$(4 + i)^3 = 52 + 47i$ et que $(4 - i)^3 = 52 - 47i$.
D'où la racine 8 puis les autres qui ont pour somme -8 et pour produit 13 ce sont :
$-4 + \sqrt{3}$ et $-4 - \sqrt{3}$

**** $x^3 - 15x = 4$**

On obtient $\Delta = -121$ à extraire les racines cubiques de $2 + 11i$ et $2 - 11i$ on trouve $2 + i$ et $2 - i$ d'où la solution 4 et les autres ont pour somme -4 et pour produit 1.
Ce sont : $-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$





Au XVIIe siècle Descartes admet, sans le démontrer, que toute équation de degré n peut avoir n racines au plus. Il admet en 1637 qu'elle en a exactement n dont certaines peuvent être IMAGINAIRES. Le mot est lancé!

Complexes et trigonométrie

Viète montre que le cas irréductible des équations du troisième degré se ramène à un problème de trisection de l'angle (le cas irréductible appelé casus irreducibilis est celui où la formule de Cardan ne marche pas) :
cela découle de la relation trigonométrique :
$\cos 3x + 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ donc si on connaît $\cos 3x$ pour trouver $\cos x$ il suffit de résoudre une équation du type :
$x^3 - 3x/4 - a/4 = 0$ où a désigne $\cos 3x$
cette équation est de la forme étudiée
$p = -3/4$ et $q = -a/4$ on remarquera que
$27 q^2 + 4 p^3 = 27(a-1)/16 < 0$
Réciproquement si cette quantité est négative on montre que nécessairement $p < 0$ et faisant un changement de variable n posant $x = ry$ on transforme l'équation générale en :

$y^3 + (p/r^2) y + q/r^3 = o$ d'où si $r = \sqrt{-(p/3)}$

et si on pose $a = 3q/p \sqrt{-3/4p}$
(on a : $-1 < a < 1$)

alors l'équation devient
$y^3 - 3y/4 - a/4 = 0$
d'où $\cos 3t = a$ soit $3t = \mathrm{Arccos}(a) + k2\pi$
soit $t = \mathrm{Arccos}(a)/3 + k2\pi/3$

d'où «trois» valeurs pour t, donc trois valeurs pour y et donc trois valeurs pour x de la forme :
$r \cos(t_1)$, $r \cos(t_1 + 2\pi/3)$ et
$r \cos(t_1 + 4\pi/3)$

dont l'interprétation à partir des formes trigonométriques des complexes est facile à envisager.
soit pour l'exemple suivant :
$x^3 - 3x + 1 = 0$ on a $\Delta' = -3/4 < 0$ $(x = ry)$

avec $r = \sqrt{-4p/3} = 2$
d'où $4y^3 - 3y = -1/2$

soit avec $y = \cos t$ $\cos 3t = -1/2$

$3t = 2\pi/3 + k2\pi$ soit $t = 2\pi/9 + k2\pi/3$

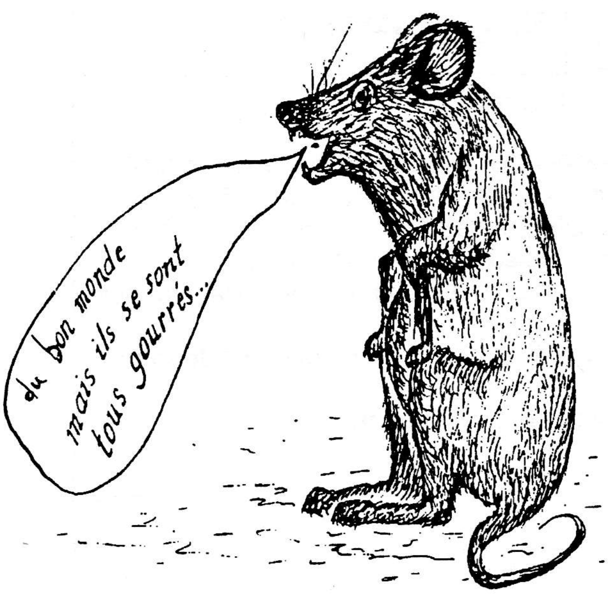
ainsi :
$x_1 = 2\cos(2\pi/9)$, $x_2 = 2\cos(8\pi/9)$ et
$x_3 = 2\cos(14\pi/9)$

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

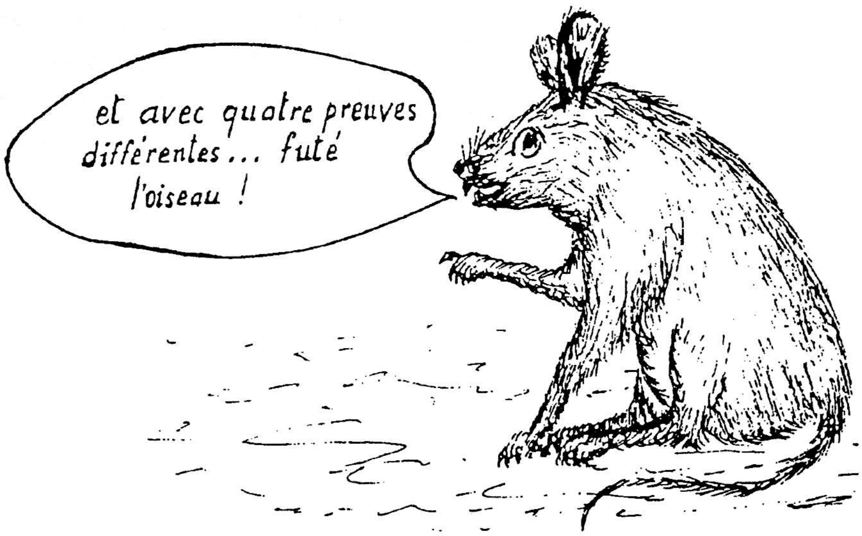
Moivre (1667-1754) en exil à Londres, ami de Newton, a prouvé une formule qui n'est pas tout à fait celle que l'on nomme actuellement formule de Moivre :
$1/2\ (\cos x + i \sin x)^{1/n} +$
$1/2\ (\cos x - i \sin x)^{1/n} = \cos x/n$

La notation i est très tardive et est due à Euler (1777) et a été reprise ensuite par Gauss. Avant c'était la notation $\sqrt{-1}$ qui était utilisée.
D'Alembert «démontre» en 1746 que tous les nombres «imaginaires» sont de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et prouve le principe de Descartes sur les racines des équations.

La preuve est jugée correcte par ses contemporains. Elle est ensuite améliorée par François Davret de Foncenex 1734-1799, Louis Lagrange 1736-1813, Simon de Laplace 1749-1827.



1799 : GAUSS CARL FRIEDICH (astronome, mathématicien, physicien) flaire un cercle vicieux dans les preuves formulées jusque-là et entreprend dans sa thèse soutenue en 1799 devant l'université d'Helmsted de démontrer que les racines existent et sont de la forme : a + b — 1



Il en donne une démonstration rigoureuse (1831). Tout nombre complexe (le mot est de lui) est de la forme a + ib. Gauss fait apparaître la notion de norme de complexes et sa notation N(z). C'est K. Weierstrass qui impose la notion | z |.
La notion de module avait été apporté par Argand (1768-1822) lorsqu'il rechercha une interprétation géométrique des complexes (1806). Cauchy confirma cette interprétation dans un mémoire en 1847.

Pour aller plus loin :

Dedron et Itard : Mathématiques et mathématiciens, ch. VII, Gloires italiennes, éd. Magnard.
Itard : Matériaux pour l'histoire des nombres complexes publication de l'APMEP.
Dahan-Dalmedico : Routes et dédales, ch. VII, éd. Etudes vivantes.
N. Dimathème : tome Activités TC, ch. I, éd. Didier.
Cl. Tisseran : Histoire des complexes comme si vous y étiez, Irem de Lyon.