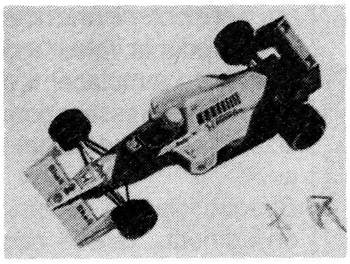
APPROCHE DU NOMBRE DERIVE

S.D.E.A.C.P. - Abidjan

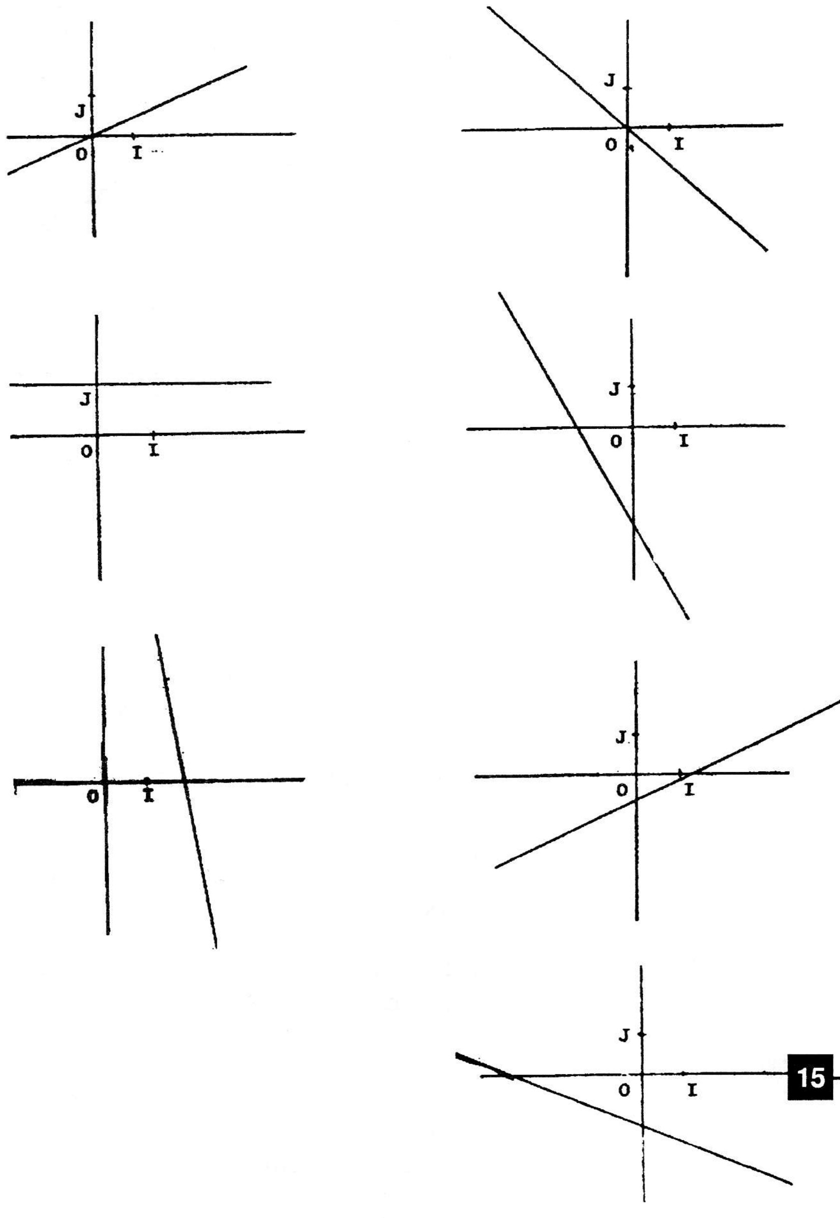


Comment approcher la notion de nombre dérivé avec des élèves de première A? Voilà un problème toujours remis sur le tapis. L'équipe pédagogique ivoirienne du S.D.E.A.C.P. propose ici un ensemble d'activités où l'outil graphique est fortement mis en avant.

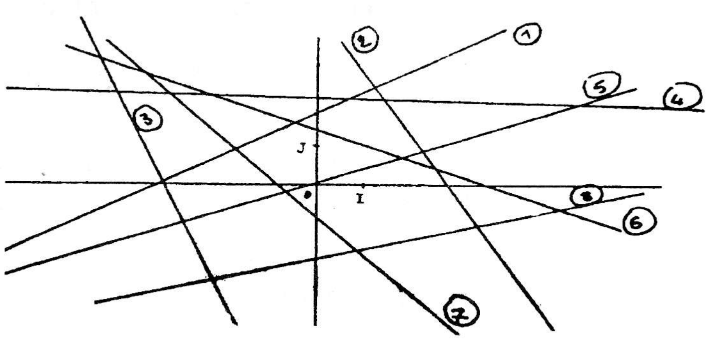
Pas d'excès de vitesse!

Un automobiliste entre dans un village. A 600 m de l'entrée de ce village un radar effectue un contrôle de vitesse (la vitesse maximum autorisée est 60 km/h).
On exprime la distance en mètres parcourue par l'automobiliste en fonction de la durée en secondes écoulée depuis son entrée dans le village. Cette fonction est représentée graphiquement sur les figures 1, 2 et 3.
Essayer de dire si l'automobiliste est en excès de vitesse à son passage devant le radar en utilisant des données numériques lues sur la figure 1, puis sur la figure 2, enfin sur la figure 3.
Quel lien peut-on réaliser entre la droite (AB) et la vitesse moyenne de l'automobiliste sur le trajet entrée du village-radar?

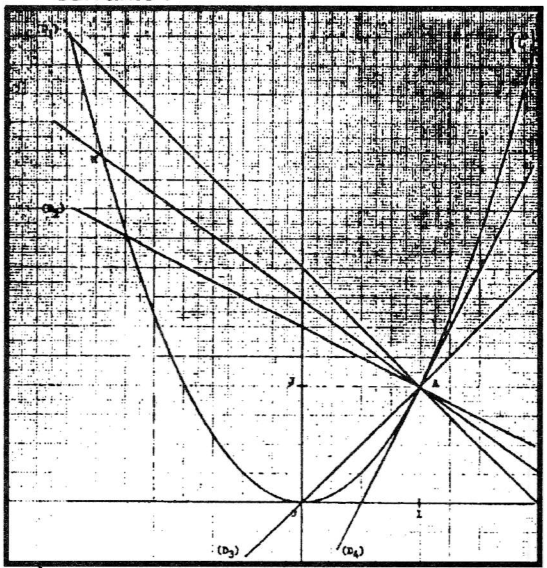
Activité 1 :
Indiquer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes représentées par une droite dans un repère orthonormé. Trouver le coefficient directeur de la droite.



Activité 2 :
1. Indiquer les droites qui ont un coefficient directeur positif.
2. Classer les droites par ordre de coefficients directeurs croissant.



Activité 3 :
A partir de la représentation graphique suivante :



1. Indiquer à partir des équations données ci-après, quelle est l'équation qui caractérise chacune des droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4).
$y = x$
$y = 2x - 1$
$y = -x + 2$
$y = -1/2\,x + 3/2$

2. On considère un nombre réel α 1 et sur la courbe un point M de coordonnées (α, α^2).
Montrer que le coefficient directeur de la droite (AM) est $\alpha + 1$.

3. Indiquer le coefficient directeur de chacune des droites du 1).

4. Que devient le coefficient directeur $\alpha + 1$ de la droite (AM) lorsque M est en A? Représente-t-il le coefficient directeur d'une des droites données?
On dira que (D_4) est la tangente en A à la courbe (ζ).
Plus généralement, si on a une courbe (τ) représentation d'une fonction f, un point A de (τ) dont les coordonnées sont (a, f(a)), une droite passant par A recoupe en général la courbe en un point M proche de A.
Une telle droite a pour coefficient directeur $(f(x) - f(a)) / (x - a)$.

Lorsque M s'approche de A, cette sécante aura comme position limite la tangente à la courbe en A.
Pour trouver le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A (a,f(a)) on calculera le rapport $(f(x) - f(a)) : (x - a)$.
Généralement, la simplification par $x - a$ permet d'obtenir une nouvelle expression définie pour la valeur a de x.
Il suffit de remplacer x par a dans cette nouvelle expression pour obtenir le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A.
Chaque fois que ce calcul sera réalisable on admettra que la courbe admet une tangente au point A.

Exercice :

1. On considère la courbe d'équation :
$y = -(1/3)\,x^2 + 2x - 1$.

Trouver le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $(-1/2)$

Vérifier que si on donne la courbe d'équation :
$y = ax^2 + bx + c$
La tangente à cette courbe au point de coordonnées $(\alpha, a\alpha^2 + b\alpha + c)$ a pour coefficient directeur $2a\alpha + b$.

2. On donne la courbe d'équation :
$y = 1/x$.

Trouver le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $(-3/2)$, puis au point d'abscisse α. élément de $\mathbb{R}^*$.

3. On donne la courbe d'équation :
$y = (x - 1)/(x - 2)$.

Trouver le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2/7.

Activité 4 :
Observer les courbes ci-dessous et indiquer le signe du coefficient directeur de la tangente si elle existe en chaque point de la courbe lorsque l'abscisse du point considéré augmente de -2 à 3.

Définition : *Lorsque la représentation graphique d'une fonction admet une tangente en un point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$, on dit que la fonction f est dérivable en α. Le coefficient directeur de cette tangente s'appelle le nombre dérivé de f en α; on le note $f'(\alpha)$.*

Nous admettrons que les droites représentant graphiquement les fonctions constantes :
$x \longrightarrow c$ et plus généralement les fonctions affines :
$x \longrightarrow ax + b$
sont leurs propres tangentes et que ces fonctions sont donc dérivables en tout élément α de IR (on dira dérivable sur IR).

On considère la fonction $f : x \longrightarrow ax + b$.
Calculer $f'(\alpha)$
Les fonctions $x \longrightarrow ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur IR
$x \longrightarrow (ax + b) / (cx + d)$ sont dérivables sur IR — {— d/c}

Exercices :
Soit α un nombre réel quelconque.

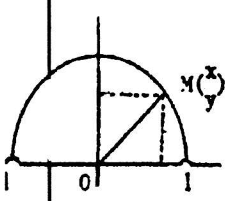
1. Donner le nombre dérivé de la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ en α.
La fonction qui a tout nombre réel a associe $f'(\alpha)$ est appelée fonction dérivée de f et se note f ' telle que :
$f' : \alpha \longrightarrow f'(\alpha)$

2. Donner le nombre dérivé en α de
$g : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$
Trouver la fonction dérivée de g.

3. Compléter le tableau :

$f : x \longrightarrow ax + b$	$f' : x \longrightarrow$
$f : x \longrightarrow$	$f' : x \longrightarrow 0$
$f : x \longrightarrow ax^2$	$f' : x \longrightarrow$
$f : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$	$f' : x \longrightarrow$

4.



Montrer que les coordonnées de M vérifient l'équation :
$x \in]-1,1[, y = \sqrt{1 - x^2}$
En déduire que la fonction $x \longrightarrow \sqrt{1 - x^2}$ est dérivable sur]—1,1[

5. On considère $f : x \longrightarrow 3x^2$
$g : x \longrightarrow -2x + 1$
$h : x \longrightarrow f(x) + g(x)$
Trouver f', g' et h'.

On remarque que $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
On admettra que si $h(x) = f(x) + g(x)$ alors $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
On notera plus simplement :

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

b) On considère $f : x \longrightarrow 2x$
$g : x \longrightarrow 3x + 1$
$h : x \longrightarrow f(x) \cdot g(x)$
Calculer les fonctions dérivées de f, g et h.
Peut-on affirmer l'égalité entre
$f'(x) \cdot g'(x)$ et $h'(x)$?
Vérifier que : $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.
On admettra que cette formule se généralise et on la notera :

$$\boxed{(fg)' = fg' + gf'}$$

c) On considère $f : x \longrightarrow -x + 1$
$h : x \longrightarrow 3/2x - 3/2$

Calculer les fonctions dérivées de f et h.
Vérifier que $h'(x) = -3/2 \,.\, f'(x)$.
On admettra que cette formule se généralise et on la notera :

$$\boxed{(af)' = af'}$$

d) On considère
$g : x \longrightarrow 1/(5x - 1)$

$f : x \longrightarrow 5x - 1$
Soit α élément de IR — {1/5}, calculer $g'(\alpha)$ et $f'(\alpha)$.

Faire apparaître si possible une relation entre $g'(\alpha)$, $f(\alpha)$ et $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$.
On admettra et on notera :

$$\boxed{(1/f)' = -(f'/f^2)}$$

e) Trouver la fonction dérivée de la fonction f :
$f : x \longrightarrow x^4$
On admettra que :
$\forall n \in IN^*$ $f : x \longrightarrow x^n$
la fonction f a pour fonction dérivée

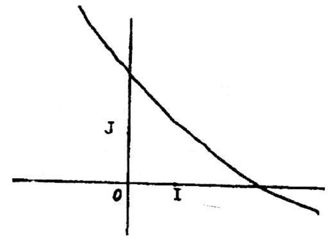
$f' : x \longrightarrow nx^{n-1}$

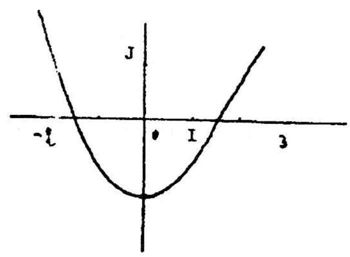
6. Trouver la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

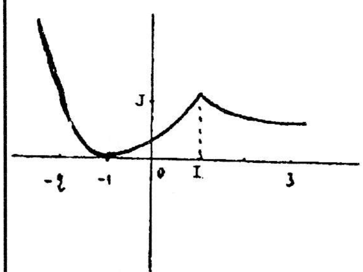
$f : x \longrightarrow (3x^4 + 1)/(x + 2)$
$f : x \longrightarrow x^7$

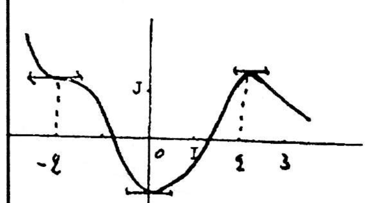
7. Soit g une fonction polynome
f une fonction polynome qui ne s'annule pas sur l'intervalle A.
A l'aide des résultats trouvés dans l'exercice 5 trouver la fonction dérivée de la fonction h :

$h : A \longrightarrow IR$
$x \longrightarrow g(x) / f(x)$









On admettra et on notera :

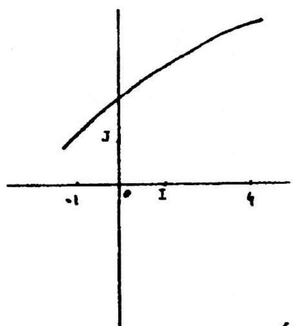
$$\boxed{(g/f)' = (f.g' - f'g)/(f^2)}$$

Tableau récapitulatif :

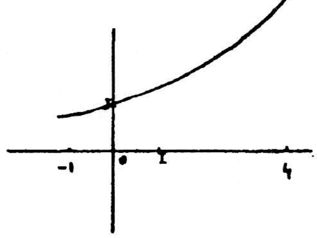
(a, b, c sont des nombres réels non nuls)

	Fonctions	Fonctions dérivés
	$x \longrightarrow ax + b$	$x \longrightarrow a$
	$x \longrightarrow ax^2 + b + c$	$x \longrightarrow 2ax + b$
	$x \longrightarrow c$	$x \longrightarrow 0$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$	$x \longrightarrow x^n$	$x \longrightarrow nx^{n-1}$
f et g sont des fonctions polynomes.		
	$f + g$	$f' + g'$
	af	af'
	$f . g$	$fg' + gf'$
On suppose que f ne s'annule pas sur son ensemble de définition		
	$1/f$	$-f'/f^2$
	g/f	$(g'f - f'g)/f^2$

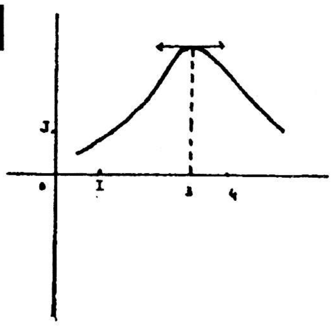
Activité 5 :
Complétez le tableau sur le modèle de la première ligne



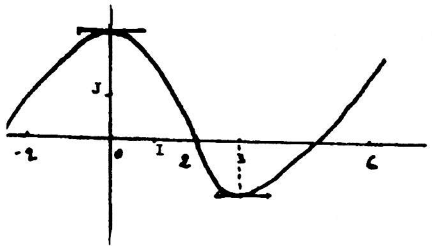
x	-1		4
f'(x)		+	
f(x)		↗	



x	-1	4
f'(x)		
f(x)		



x	1	3	4
f'(x)			
f(x)			



x	-2	0	2	3	6
f'(x)					
f(x)					

Il semble donc, que pour une fonction f dérivable sur un intervalle]a,b[,
— si f'(x) est positif sur]a,b[alors f est croissante sur]a,b[,
— si f'(x) est négatif sur]a,b[alors f est décroissante sur]a,b[,
et que si f présente un maximum ou un minimum en c alors f' (c) = 0.

Nous admettons le théorème suivant :

Théorème :

Soit une fonction numérique f dérivable sur un intervalle]a,b[, alors :

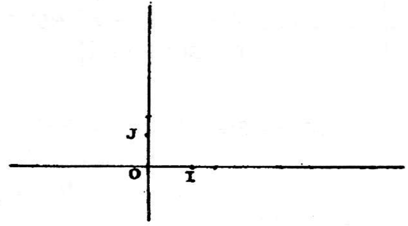
- f est croissante sur]a,b[si et seulement si f' est positive sur]a,b[,
- f est décroissante sur]a,b[si et seulement si f' est négative sur]a,b[,
- f est constante sur]a,b[si et seulement si f' est nulle en tout point de]a,b[.

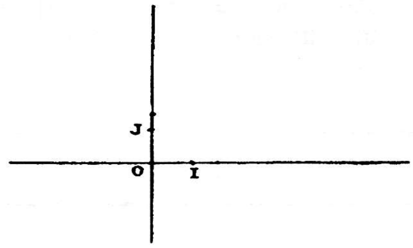
Exercices classiques sur le sens de variation de quelques fonctions.

Activité 6 :
Voici des tableaux de variation de fonctions dérivables sur les intervalles indiqués. Essayer de les compléter et de donner une représentation graphique de ces fonctions.

x	-3		-1		0		2		6
f'(x)			-2		0		$+\frac{1}{2}$		
f(x)	5	↘			-1	↗			2

x	-3		-1		1		4
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-3		2		0		6

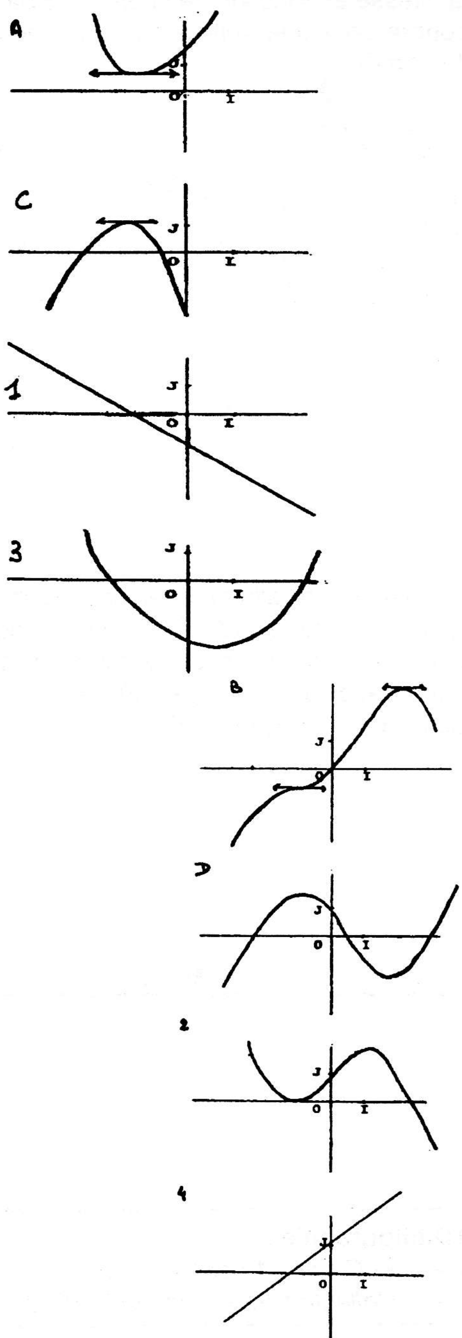




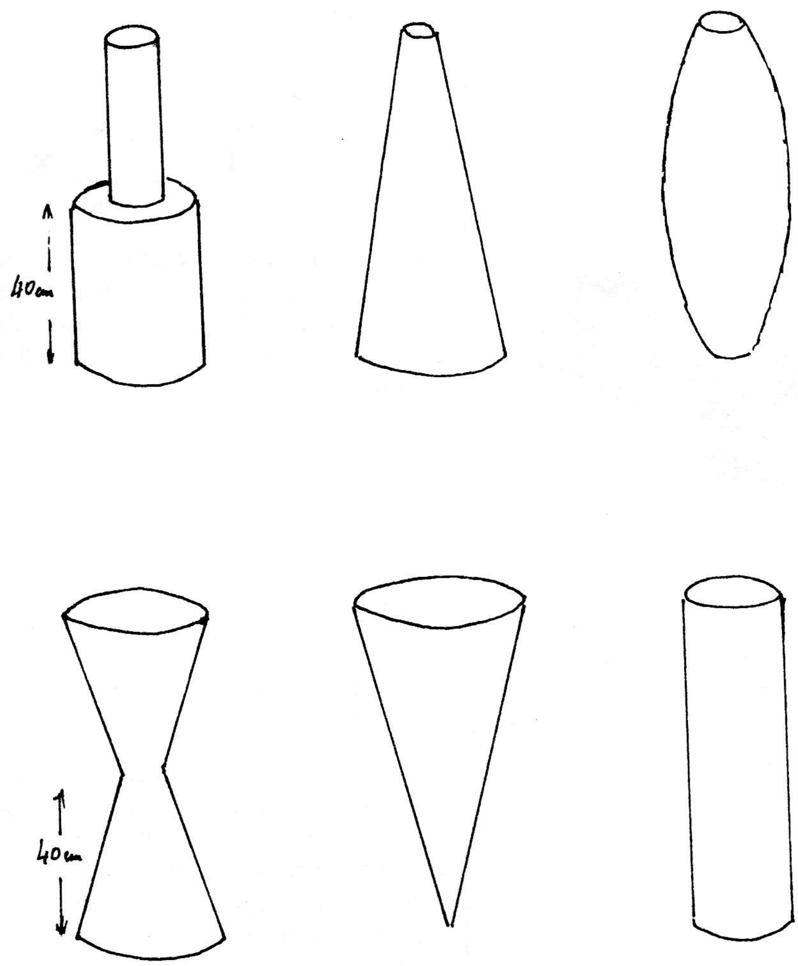
Activité 7 :
Remplir le tableau de variation correspondant à chacune des courbes suivantes :

x	
signe de f'	
variation de f	

Activité de synthèse :
Voici 4 représentations graphiques de fonctions dérivables et 4 autres représentations graphiques qui sont celles des fonctions dérivées des premières.
Associez-les correctement.

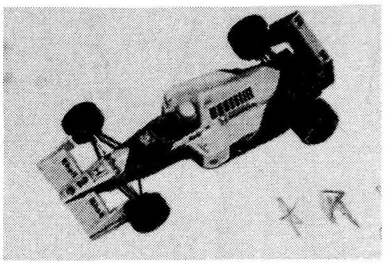


Activité 8 :
On remplit successivement les 6 récipients de même hauteur (80 cm) et de même capacité (100 l) dessinés ci-dessous :

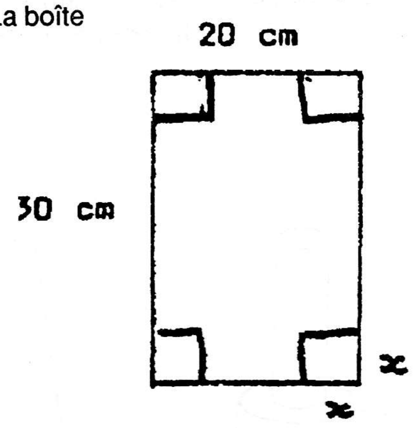


Le robinet a un débit constant de 1 l en 4 secondes. On donne la représentation graphique du niveau de l'eau dans chacun des récipients, entre le début et la fin de remplissage.

1. Indiquer la représentation graphique qui correspond à chaque récipient.
2. Comparer les vitesses de remplissage au début, à la fin, à mi-parcourt :
   — pour chaque récipient,
   — entre les 6 récipients.



Activités de mathématisation :
La boîte



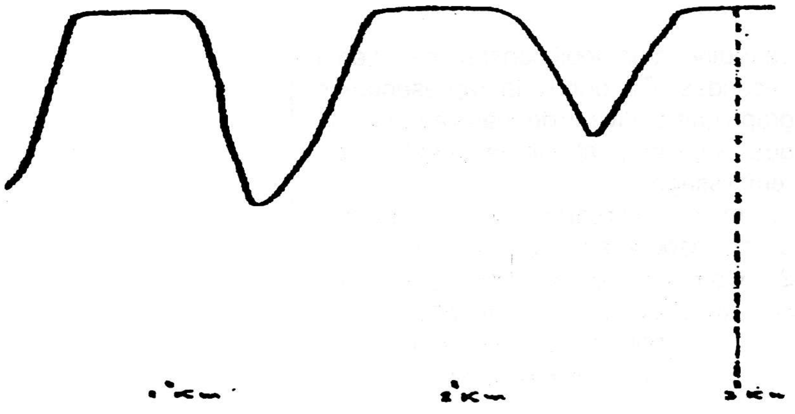
Avec cette plaque, on veut faire une boîte en découpant des carrés dans les coins et en pliant. Quelle doit être la longueur de la découpe pour obtenir une boîte de volume maximum?

Inflation :

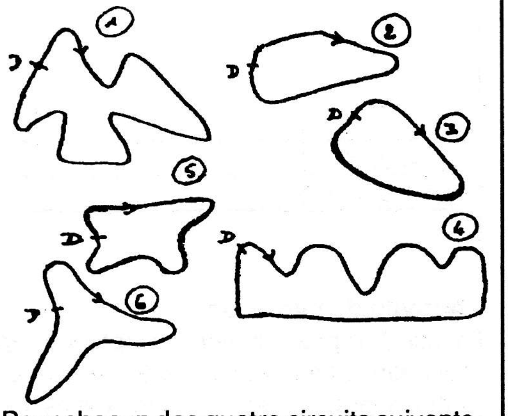
Taux d'inflation en un an	10	20	30	40	50
Pourcentages d'augmentation des prix sur 2 ans					

Trouver une formule donnant le pourcentage d'augmentation des prix sur 2 ans, y, en fonction du taux d'inflation en un an, x. Tracer la représentation graphique.
Quel taux d'inflation fait doubler les prix en 2 ans?

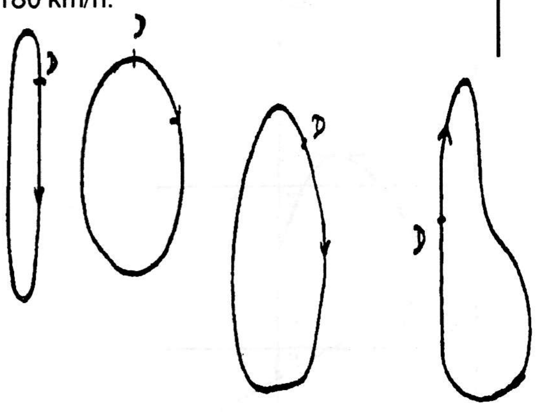
Prost - Senna, Senna - Prost
Voici une représentation graphique donnant la vitesse d'une voiture de course sur un circuit sans côte, de 3 km, lors du second tour entre deux passages de la ligne d'arrivée.



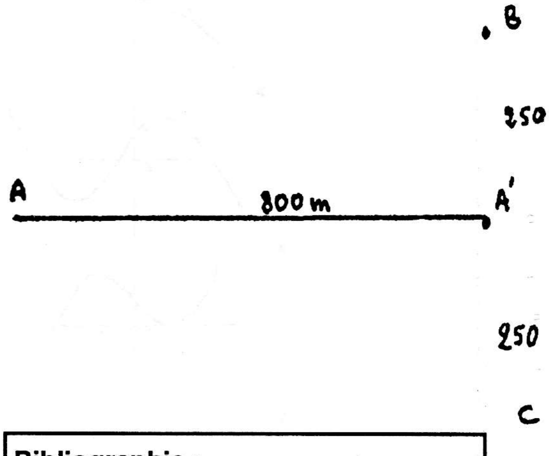
Parmi les circuits suivants, quel est le bon?



Pour chacun des quatre circuits suivants, dessinez la représentation graphique de la vitesse en fonction de la distance parcourue pour une voiture qui plafonne à 180 km/h.



Un éleveur doit alimenter en eau les trois réservoirs situés en ABC. Où doit-il creuser son puits pour avoir le minimum de canalisation à utiliser (il est sûr de trouver de l'eau sur la ligne AA')?



Bibliographie :
— *PLOT nos 13 et 14, 1980.*
— *Collection inter-irem no 3, 1983.*