QUAND LES PROFS TRONQUENT c'est Gauss qui trinque!

Y. Bouteiller, G. Chauvat - Tours

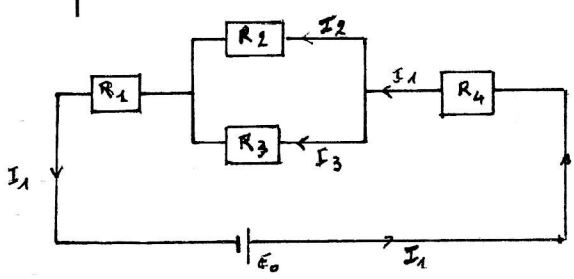
LES SYSTEMES, T'AIMES?

Les occasions de rencontrer des systèmes de ρ équations à η inconnues sont nombreuses et variées, tant en mathématiques que dans leurs domaines d'application :

• Soit ρ la fonction polynôme définie par :
ρ : $R \to R$
$x \to ax^2 + bx + c$
où (a, b, c) désigne un triplet de R^3.
Déterminer ce triplet pour que l'on ait :
$\rho(1) = 2$, $\rho(2) = 3$ et $\rho(3) = 1$.

• Monsieur G. Konomiz a noté lors de ses trois derniers voyages la consommation de son automobile. Au premier voyage, il a parcouru 15 km en ville, 60 km sur route, 120 km sur autoroute et a consommé 18,45 litres de super. Au second, il a parcouru 25 km en ville, 200 km sur route, 360 km sur autoroute et a consommé 55,05 litres. Au troisième, il a parcouru 40 km en ville, 250 km sur route et a consommé 22,35 litres. Quelle est la consommation de la voiture de Monsieur G. Konomiz en ville? sur route? sur autoroute?

• Déterminer les courants I1, I2, I3 qui parcourent le circuit suivant, en fonction de R1, R2, R3, R4 et E0



GAUSS ET PIVOT
(rien à voir avec Bernard!...)

Les exemples précédents conduisent à des systèmes 3 x 3. Une des méthodes, que l'on peut enseigner en lycée, pour les résoudre est connue sous le nom de « méthode du pivot de Gauss ».

Si on écrit le système (S) de ρ équations linéaires à η inconnues sous la forme (dite abréviative) :

$$(S)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1\eta} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2\eta} & b_2 \\ \lozenge & \lozenge & \lozenge & \lozenge \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \dots a_{\rho\eta} & b\rho \end{bmatrix}\begin{matrix}(L_1)\\(L_2)\\ \lozenge \\ (L\rho)\end{matrix}$$

où L_i ($i = 1 \dots p$) désigne la i-ème ligne du système, cette méthode repose sur les propriétés suivantes :

On ne change pas les solutions du système (S)
i) en échangeant les lignes L_i et L_j
ii) en remplaçant la ligne L_i par une « combinaison linéaire » des lignes L_i et L_j du type $kL_i + k'L_j$ où $k, k' \in R^*$.
On en déduit un algorithme élémentaire de résolution (qui peut être amélioré : voir la méthode du pivot maximum par exemple) transformant le système (S) en un système équivalent et échelonné dont la solution s'obtient facilement :

1 - Echanger les lignes de façon que la première inconnue, x_1, ait un coefficient non nul dans la première équation.

2 - Eliminer x_1 des (ρ—1) équations linéaires restant en appliquant, pour chaque $i > 1$, l'opération de substitution :

$$L_i \leftarrow a_{11} L_i - a_{i1} L_1$$

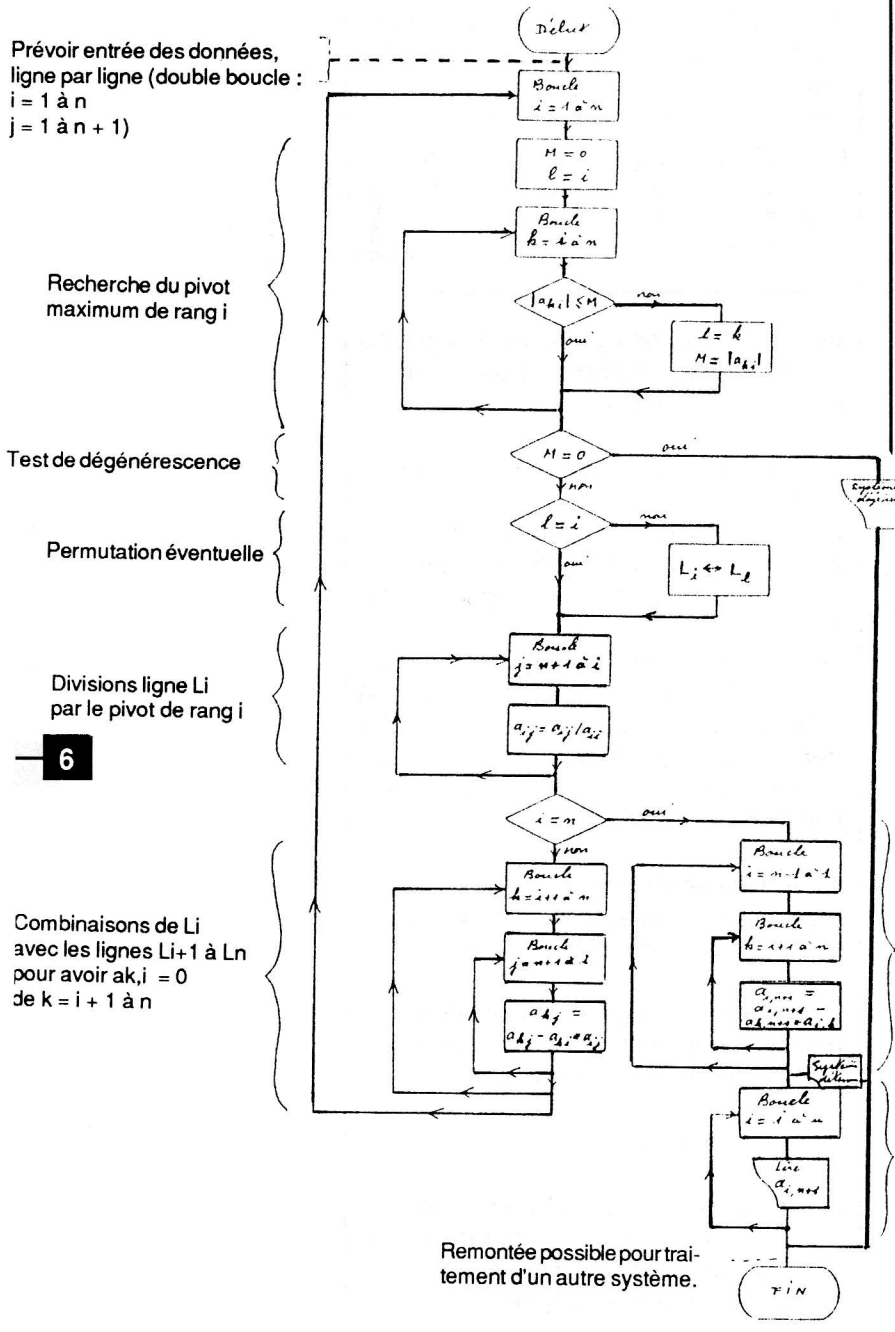
3 - Recommencer les deux étapes précédentes avec le sous-système de (ρ—1) équations à (η—1) inconnues obtenu en supprimant la première ligne.

GO GAUSS

Un des gros avantages de cette méthode est sa facilité de mise en œuvre et de programmation sur calculatrice de poche (surtout si elle possède un langage acceptant la définition de tableaux à deux dimensions!).
Mais au royaume des calculatrices tout n'est pas rose et l'arithmétique discrète des micro-processeurs engendre bien des surprises et parfois Gauss cloche... normal!
On peut prendre conscience des déboires possibles avec l'exemple suivant : résolvez avec l'algorithme décrit précédemment le système suivant :

$$\begin{aligned} x + (1/2)\,y + (1/3)\,z &= 298 \\ (1/2)\,x + (1/3)\,y + (1/4)\,z &= 172 \\ (1/3)\,x + (1/4)\,y + (1/5)\,z &= 123 \end{aligned}$$

Mais pour une calculatrice qui tronquerait les réels à la deuxième décimale 1/3 vaut 0,33. Résolvez alors le système suivant par la même méthode (toujours *à la main)*

$$\begin{aligned} x + 0{,}5\,y + 0{,}33\,z &= 298 \\ 0{,}5\,x + 0{,}33\,y + 0{,}25\,z &= 172 \\ 0{,}33\,x + 0{,}25\,y + 0{,}2\,z &= 123 \end{aligned}$$

Enfin, résolvez à nouveau ce dernier système mais, cette fois-ci, en tronquant les résultats des opérations intermédiaires à l'ordre 2.