

VITESSE DE CONVERGENCE ET ACCELERATION

Yves Olivier - Blois

Pour mesurer la rapidité de convergence d'une suite on peut soit calculer le coefficient de convergence $\rho_n = (U_{n+1} - L) / (U_n - L)$ ⁽¹⁾ où L est la limite connue lorsqu'elle existe, soit calculer $V_n = (U_{n+1} - U_n) / (U_n - U_{n-1})$. Ces deux suites doivent converger vers la même valeur appelée vitesse de convergence.

Un exemple

Prenons l'exemple de la suite définie par :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} \text{ avec } u_0 = 3.$$

Elle est convergente vers 1 et sa vitesse de convergence est 1/2. On peut le prouver de différentes façons :

soit $f'(1) = 1/2$ où $f(x) = \sqrt{x}$

soit $\rho_n = 1/(\sqrt{u_n} + 1)$ qui tend vers 1/2 du fait de la limite du u_n ou bien encore de

$$V_n = 1/(\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}})$$

qui tend aussi vers 1/2 pour la même raison.

Nous avons simplifié les expressions de ρ_n et V_n afin de lever l'indétermination et d'éviter dans les calculs des différences évanescentes (valeurs très proches de zéro) qui donneraient des erreurs dans les calculs!

Faites les essais avec les expressions initiales de ρ_n et de V_n pour n assez grand! Vous pouvez passer également en revue l'exemple suivant :

$$u_{n+1} = \sqrt[5]{u_n}$$

Sa vitesse de convergence est 1/4.

Pour le premier exemple, avec une calculatrice, on trouve :

n	u_n	ρ_n	V_n
0	3	0.4317651	0.4189097
1	1.316074	0.4828409	0.4788379
2	1.0710755	0.4957087	0.4946541
3	1.017314	0.4989271	0.4986601
4	1.0043007	0.4997318	
5	1.0010734		

Remarques :

On pourrait tout aussi bien utiliser un tableur pour avoir ces données.

Sur cet exemple tout se passe bien car on connaît la limite. De plus les indéterminations se lèvent bien.

Que dire des exemples suivants à vérifier $u_{n+1} = \sqrt[3]{a u_n}$, où a est un réel positif, converge vers $\sqrt[3]{a}$ à la vitesse de 1/4.

$$u_{n+1} = \sqrt[5]{a \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} u_n}$$

converge vers $\sqrt[5]{a}$ à la vitesse de 1/16

De l'intérêt de connaître les vitesses de convergence

— Dans les deux exemples précédents nous pouvons affirmer être proche de la racine cubique de a à 10^{-6} près au bout de la 11^e itération car $1/4^{11} \approx 10^{-6}$ et proche de la racine cinquième de a à 10^{-8} près car $1/16^8 \approx 10^{-8}$ au bout de la 8^e itération!

— On peut **accélérer la vitesse de convergence** dans certains cas avec par exemple le :

PROCEDE DE ROMBERG-RICHARDSON

Dans le cas où la vitesse λ est connue, le procédé de Romberg (1955) (2) permet de définir une nouvelle suite convergente vers L plus vite que la précédente :

$$v_n = (u_{n+1} - \lambda u_n) / (1 - \lambda).$$

On peut réitérer le procédé en cherchant la nouvelle vitesse de convergence μ de cette suite v et construire la suite w définie par $w_n = (v_{n+1} - \mu v_n) / (1 - \mu)$.

Cela revient, en fait, à pouvoir écrire que : $u_n - L = \alpha \lambda^n + \beta \mu^n + \dots$ avec $\mu < \lambda < 1$.

Tout dépend donc de l'existence du développement asymptotique de $u_n - L$.
Souvent il y a un lien entre λ et μ :
par exemple $\mu = \lambda^2$.

Ainsi supposons que l'on ait :

$u_n - L = \alpha_1 \lambda^n + \alpha_2 \lambda^{2n} + \alpha_3 \lambda^{3n} + o(\lambda^{4n})$ alors le principe de Richardson permet de construire les suites définies par :

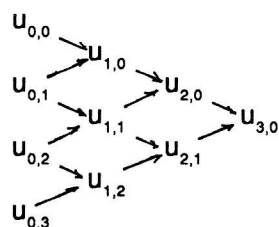
$$u_{0,n} = u_n \quad u_{1,n} = (u_{0,n+1} - \lambda u_{0,n}) / (1 - \lambda)$$

$$u_{2,n} = (u_{1,n+1} - \lambda^2 u_{1,n}) / (1 - \lambda^2)$$

Chaque suite $u_{i,n}$ converge à la vitesse $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$.

Remarque : Il en va ainsi de la méthode de Romberg appliquée aux calculs d'intégrales approchées par la méthode des trapèzes : cela se passe dans le cas où $\lambda = 1/2$.

On a alors le schéma associé :



Par exemple, on peut appliquer cette méthode à la suite convergente vers π issue de la méthode d'Archimède (on rappelle que l'on a $S_{n+1} = (S_n) / (C_{n+1})$)

$$\text{où } S_0 = 2, c_0 = 0 \text{ et } c_{n+1} = \sqrt{1 + C_n/2}$$

On applique le procédé à la suite S et on peut montrer que $\lambda = 1/4$.

Nous obtenons l'algorithme suivant :

```

Début
n = 0  s = 2  c = 0
répète
  début
    n = n + 1
    afficher n
    c = √(1 + c)/2
    t = s/c
    afficher t
    u = (4*t - s)/3
    afficher u
  fin
  s = t
fin
fin

```

Programme CASIO FX7500G

```

Ø → n : 2 → s : Ø → c : Lbl Ø : n + 1 → n
√((1 + c) : 2) → c : s : c → t ■
(4 x t - s) : 3 → u ■
t → s : Goto Ø

```

On obtient les valeurs suivantes :

n	s	u
0	2	3,1045695
1	2,828427125	3,13914757
2	3,061467459	3,141437717
3	3,121445152	3,141582937
4	3,136548491	3,141592046
5	3,140331157	3,141592616
6	3,141277251	3,141592651
7	3,141513801	3,141592653
8	3,14157294	3,141592654
15	3,141592652	
16	3,141592653	
17	3,141592654	

METHODE D'AITKEN-STEFFENSEN

Elle s'utilise dans le cas d'une part où la **convergence de u est linéaire** (d'ordre 1) et d'autre part où la **vitesse de convergence λ est non connue**.

Cette méthode, dite du Δ^2 d'Aitken, consiste à considérer la suite v définie par :

$$v_n = u_n - (u_{n+1} - u_n)^2 / (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n)$$

On peut montrer que cette suite est convergente d'ordre supérieur à 1.

La **méthode de Steffensen** consiste à itérer la méthode d'Aitken. On peut montrer qu'elle est au moins quadratique (d'ordre supérieur ou égal à deux). Elle n'a de sens que si la **suite** est telle que $u_{n+1} = g(u_n)$ où g est une fonction **contractante**.

En effet, puisque v_n est une meilleure approximation de l , on calcule w_n égal à $g(v_n)$ puis $g(w_n)$ et on applique l'accélération d'Aitken. On obtient ainsi une nouvelle valeur v'_n encore plus proche de l .

En fait dans la pratique on ne calcule que les premières valeurs de chaque suite pour améliorer sans arrêt la valeur initiale.

On montre que si g est d'ordre 1 alors la méthode de Steffensen est d'ordre 2. Si par contre g est d'ordre $p > 1$ alors la méthode de Steffensen est d'ordre $2p-1$. Prenons l'exemple de la résolution de l'équation $\tan x = x$ dans $]\pi/2, 3\pi/2[$:

On ne peut pas utiliser la méthode itérative avec $g = \tan$ car $g'(x) > 1$. On considère alors l'équation $y = \pi + \arctan y$ en posant $y = \tan x$. Dans ce cas on a $g(y) = \pi + \arctan y$ et $g'(y) = 1/(1+y^2)$ donc $g'(y) < 1$. On peut donc appliquer la méthode itérative sur g et donc aussi la méthode d'AITKEN et de surcroît celle de STEFFENSEN.

On trouve :

méthode d'AITKEN :

Programme CASIO FX7500G

```
Rad : Ø → n : Ø → u : π + tan-1u → t ■
Lbl Ø : n + 1 → n ■
π + tan-1t → r ■
u - (t - u)2 : (r - 2t + u) → v ■
t → u : r → t : Goto Ø
```

u , t et r sont 3 termes consécutifs de la suite
 v est le terme de la suite d'Aitken obtenu à partir u , t et r

méthode de STEFFENSEN :

programme CASIO FX7500G

```
Rad : Ø → n : Ø → u : π + tan-1u → t ■
Lbl Ø : n + 1 → n ■
π + tan-1t → r ■
u - (t - u)2 : (r - 2t + u) → w ■
π + tan-1w → v ■
w → u : v → t : Goto Ø
```

au bout d'une itération $v = g(w)$ et
 $r = g(g(w))$
le w suivant sera le terme de la suite de Steffensen.

avec l'itération : $u_9 = 4,493409458$
avec le Δ^2 : $v_5 = 4,493409458$
avec STEFFENSEN : $w_3 = 4,493409458$

Pour aller plus loin

Méthodes numériques	N. Bakhvalov	Ed. Mir Moscou 84
Eléments de calcul numérique	B. Démidovitch	Ed. Mir Moscou 87
	I. Maron	
Méthodes de calcul numérique	J.P. Nougier	Ed. Masson 87
Initiation à l'analyse numérique	R. Théodor	Ed. Masson 86
Méthodes de calcul numérique		
programmes en Basic et Pasca I	Cl. Nowakowski	Ed. du PSI 84
Mathématiques et informatique	D. Monasse	Ed. Vuibert 88
Calcul par l'informatique	M.J. Bertin	Ed. Hermann 83
Introduction à l'analyse numérique	J. Baranger	Ed. Hermann 77

(1) Plus généralement : soit u une suite convergente vers L . Désignons par $e_n = u_n - L$. On dit que la suite est convergente d'ordre p à la vitesse λ si $L_{n+1}/(L_n)^p$ converge vers λ . Si $p = 1$ alors la convergence est dite linéaire. Si $p = 2$ alors la convergence est dite quadratique.

(2) Ce procédé était déjà énoncé en 1927 par Richardson.