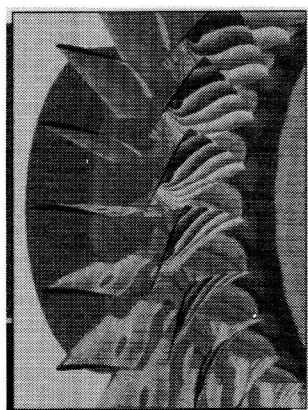


DES PROGRAMMES POUR S'EVADER DES PROGRAMMES!

Marcel Dumont - Rouen



Le texte, publié intégralement dans les Actes de la Rencontre C.I.E.A.E.M. Bruxelles 89, a pour but :

- d'arracher l'enseignement des mathématiques à ses usages, à ses idées fixes, à ses croyances, pour le réadapter aux connaissances contemporaines;
- de redonner à cet enseignement un visage plus ouvert, plus tolérant, plus lucide, plus créateur...;
- de redonner au rêve la place qu'il n'aurait jamais dû perdre dans l'enseignement scientifique;
- de susciter la recherche de programmes reflétant un humanisme ouvert sur le monde actuel.

GENERALITES

Nous sommes peut être à l'aube d'une époque où, comme Lavoisier, il faudra proclamer haut et fort :

« RIEN N'EST VIDE,
RIEN N'EST PLEIN,
TOUT SE TRAVERSE.

(Il suffit de changer d'échelle, d'élargir ou de rétrécir le contexte!)

Que ce soit à l'échelle de l'univers, d'une planète, de l'atome, du noyau, et même d'une « particule », qu'il s'agisse de frontières politiques, économiques, raciales, religieuses, etc., qu'il s'agisse de cloisons en tous genres, de bords qui ne bordent rien, d'interfaces sans faces, de matériaux qui n'appartiennent à aucun des trois états de la matière, quasi-cristaux qui sans être amorphes ne sont pas tout à fait des cristallins, pavages dont les « régularités » ne sont pas tout à fait « régulières », isolants qui deviennent supraconducteurs, de photons même très éloignés l'un de l'autre que la mécanique quantique nous interdit de considérer comme des « entités » séparées (1), corpuscules qui sont aussi des ondes, de fractales qui « remplissent un espace » sans être ni une ligne, ni une surface, ni un volume, etc., etc. TOUT SE TRAVERSE : y compris les limites d'un programme scolaire.

Les programmes scolaires sont le reflet des incohérences d'une culture en pleine

explosion, culture qui est à redéfinir pour les démocraties de demain. Car les programmes sont une production de la société, et, comme tous les phénomènes sociaux, ils sont assujettis aux mêmes contraintes : le poids des habitudes, le poids des modes, des engouements, le poids des privilèges, d'une hiérarchie culturelle plus ou moins explicite, le poids d'une économie plus ou moins malade à l'échelle mondiale, etc.; en bref, ils sont soumis à des rapports de force beaucoup plus qu'à des rapports d'intelligence. Pourquoi est-il impossible de les confiner, comme un plasma, dans un champ clos aux bords infranchissables? Parce que tout ce qui concerne l'être humain se heurte à un caractère spécifique que les machines n'ont pas et n'auront pas avant longtemps : IL EST IMPOSSIBLE D'EMPRISSONNER LA PENSEE DES AUTRES. (Elle finit toujours par se réveiller un jour ou l'autre et c'est heureux pour la démocratie!) Tout enseignement qui oublie les deux préceptes suivants, ne peut se prétendre éducatif :

— nul ne peut empêcher quelqu'un de penser quand il en a envie;

— nul ne peut obliger quelqu'un à penser quand il n'en a pas envie.

Encore faut-il préciser que « penser » ce n'est pas « répéter la pensée des autres », sinon toutes les machines à traiter l'information seraient des « penseurs ».

(1) Cf. numéro spécial C.N.R.S. « Aux frontières de la Science », Ed. La Recherche.

(2) Cf. « Le Calcul et l'Imprévu », Ivar Ekeland, Ed. du Seuil, Paris.

C'est bien là l'étrange paradoxe de l'enseignement des mathématiques qui se veut aussi éducatif : transmettre un savoir et un savoir-faire avec des méthodes voisines de la programmation d'une machine en oubliant que l'être humain n'est pas une machine.

C'est sans doute pour échapper à ce malaise que, depuis quelques années, les concepteurs de programmes soulignent l'importance de la «résolution de problèmes» (expression très ambiguë confondant la recherche de méthodes de résolution et l'application de méthodes de résolution éventuellement suggérées ou imposées par d'autres). Si on tient compte du prestige, du pouvoir que confère la capacité de résoudre tel ou tel type de problème, on comprend mieux pourquoi la plupart des problèmes posés à l'école sont des problèmes standards ou qui deviennent très vite standards, c'est-à-dire des problèmes pour lesquels l'autorité qui les pose, connaît d'avance une méthode au moins de résolution. A quand la liberté de se poser, soi-même, ses propres questions, ses propres problèmes et de les confronter à ceux des autres?

Les pouvoirs cachés.

En effet, l'exercice d'un pouvoir quelconque déforme à la longue, autant ceux qui l'exercent que ceux qui le subissent. (C'est pourquoi, dans une bonne démocratie, il serait bon de permuer souvent les uns et les autres.) Mais de toutes les formes de pouvoir, le plus pernicieux — car il confond celui qui l'exerce avec celui qui le subit — c'est celui que nous portons tous au plus profond de notre être : c'est le pouvoir des usages, des habitudes, du langage, des écritures, des façons de penser, des idées fixes, des tabous, des croyances, etc. Toute l'histoire de l'humanité est jalonnée par des bouleversements d'usages ou de croyances; bouleversements qui, comme un rayon de lumière, viennent donner aux ténèbres, si usuelles qu'on les croyait claires, un aspect inattendu, en apportant le plus souvent un «progrès» respectable. Alors s'installent de longues périodes pendant lesquelles le respect des nouveaux usages ne permet que des perfectionnements, des raffinements qui conduisent à des progrès de plus en plus lents, tendant asymptotiquement vers une limite. C'est à la «fin» de ces périodes qu'il faut dépenser une

énergie considérable pour obtenir des progrès insignifiants. Seule l'audace de s'évader de la prison des usages permet un nouveau bond.

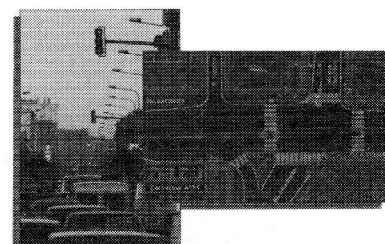
L'enseignement des mathématiques, comme l'enseignement des sciences et techniques en général, se trouve donc placé devant ce dilemme :

- emprisonner la pensée dans des usages de plus en plus sophistiqués, usages que les hommes mettent parfois des siècles à découvrir, ou
- libérer l'imagination pour essayer de sauter par-dessus des limites qui paraissent infranchissables.

Ouvrir les programmes

L'analyse de l'échec de diverses «réformes» devrait nous inciter à poser quelques questions :

- La conception de programmes peut-elle être séparée de la conception de l'évaluation, de ses critères, des examens et diplômes? Lesquels sont des objectifs? Lesquels sont des moyens pour y parvenir?
 - Qu'appelle-t-on «connaissances de base» (autres que les «bases de connaissances» datant de 1,2 ou 3 siècles et parfois bien davantage)?
 - La hiérarchisation du savoir ou plus précisément la hiérarchisation des moyens pour l'acquérir est-elle une nécessité ou simplement une habitude, le plus souvent protectrice de privilèges?
 - Qui peut dire aujourd'hui ce que devront être les «connaissances de base» pour l'homme du troisième millénaire?
 - Quelle place les programmes actuels accordent-ils : à la critique, au doute, à l'interrogation, à la curiosité, à la recherche des connaissances contemporaines, aux nouveaux usages, aux nouvelles modes, à la création, l'invention, à l'imagination, à l'originalité au «rêve»
 - Pourquoi n'y a-t-il presque jamais de bibliographie dans les manuels scolaires, ni dans les programmes d'ailleurs?
 - Pourquoi les programmes font-ils rarement appel à la «vulgarisation» des connaissances, c'est-à-dire une information destinée à donner envie d'en savoir plus et non à faire des spécialistes.
- Le problème n'est pas de déstabiliser des institutions si bien rodées qu'elles pourraient fonctionner toutes seules, sans autres directives. Faute de connaître de «meilleurs» systèmes, de pouvoir définir



concrètement objectifs, moyens, critères d'évaluation, programmes en particulier, etc., adaptés au monde d'aujourd'hui et si possible de demain, le problème est d'ouvrir les yeux sur toutes les incohérences que dissimulent nos habitudes, les carences dues à l'absence d'informations. Ce dernier point est essentiel. En effet, pourquoi les programmes concernant les jeunes, programmes qui devraient regarder l'avenir, sont-ils presque toujours orientés vers le passé et à peine vers le présent? Pourquoi n'y a-t-il pas une meilleure communication entre la recherche et l'école? Voici quelques banalités si évidentes qu'on finit par les oublier :

Contemplation critique de la situation actuelle.

Tout d'abord, pour rire un peu, une mise en garde sur les dangers de s'évader du rationnel hypothético-déductif tout en le pratiquant; c'est-à-dire les dangers des interférences entre les ambiguïtés d'une langue naturelle et la rigueur locale d'une démonstration.

— Caricature inspirée par un monologue de Raymond Devos :

«Prenez un morceau de bois, un bâton par exemple. Il a deux "bouts", c'est-à-dire deux extrémités. Coupez un bout. Le morceau qui reste, a encore deux bouts. Donc $2 - 1 = 2$.»

A l'«intérieur» des mathématiques scolaires.

Quelques détails révélateurs :

— Pourquoi juge-t-on indispensable la technique suivante (P) : «Dans une proportion, c'est-à-dire une égalité de 2 quotiens, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens»?

ex : $5/3 = 10/6 \leftrightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10$

Alors qu'on ne parle jamais de l'analogie dans la structure additive :

«Dans une égalité de 2 différences, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens?»

ex : $5 - 3 = 10 - 8 \leftrightarrow 5 + 8 = 3 + 10$

Evidemment ni l'une ni l'autre ne sont utiles si on a pris l'habitude de se servir d'opérateurs c'est-à-dire de fonctions.

Comparaison montrant la complication introduite par P :

$$\begin{array}{ccc} X/3 = 10/6 & & X/3 = 10/6 \\ \downarrow P & & \downarrow \quad \downarrow \\ X \times 6 = 3 \times 10 & & X \times 3 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad X \times 3 \\ :6 \quad :6 & & x = 5 \\ X = 5 & & \end{array}$$

Avec P 2 étapes sont nécessaires; alors qu'en appliquant la même fonction,

$\xrightarrow{\times 3}$ cad le même traitement à 2 nombres égaux, une seule étape suffit.

— De même produit d'une fraction par un entier : technique universelle :

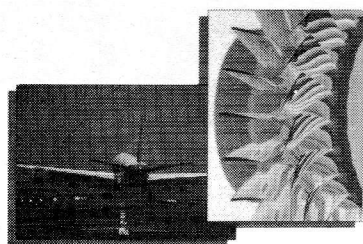
«on multiplie le numérateur par l'entier puis on simplifie éventuellement»

ex : $(25/3) \times 6 = 150/3 = 50$ 2 opérations sont nécessaires, alors qu'en utilisant les fonctions il suffit de multiplier le numérateur par 2.

$$\begin{array}{ccccc} 25 & \xrightarrow{:3} & 25/3 & \xrightarrow{\times 6} & 50 \\ & & \searrow \times 3 & & \nearrow \times 2 \\ & & 25 & & \end{array}$$

(à condition de savoir inverser, composer, décomposer les fonctions!)

— calcul usuel : $(7/3) \times 3 = 21/3 = 7$ alors qu'il n'y a aucun calcul à faire à cause des fonctions inverses ou «réciproques» : curieusement d'ailleurs on voit rarement le calcul analogue dans la structure additive

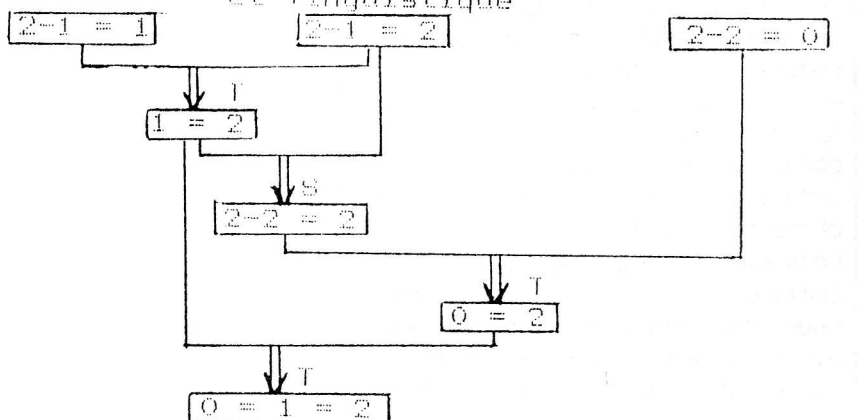


12

Hypothèse classique

Hypothèse tirée d'une expérience matérielle et linguistique

Hypothèse classique



$$(7 - 3) + 3 = 10 - 3 = 7$$

Par contre on verra souvent

$$(7 - 3) + 3 = 4 + 3 = 7$$

à cause sans doute d'une identification précise de l'objet $(7 - 3)$.

— Quelle peine y a-t-il donc à utiliser l'inversibilité des fonctions qui sont inversibles? D'ailleurs quand elles ne le sont pas, le premier effort de l'homme est d'inventer un contexte qui les rendent inversibles. Ceux qui se lancent à l'aventure sur des claviers de machine, savent bien que le premier réflexe est de trouver la touche ou la commande qui permette de revenir en arrière, d'annuler une commande antérieure lorsque la situation l'exige.

— Chacun connaît les difficultés d'introduction et d'utilisation des réels. A cause des exigences de l'analyse, les premiers calculs, dérivées, intégrales portent pourtant sur des fonctions à variable et à valeurs réelles. Alors que cette machinerie élémentaire est presque identique si on travaille sur du discret et du fini : différences finies, cumuls à propos de suites finies. Cette situation est d'autant plus ridicule que les calculateurs, qui s'introduisent lentement mais inexorablement à l'école, ne travaillent que sur du discret. Seulement voilà, il faut changer les habitudes et introduire d'autres idées, par exemple : l'importance des itérations, de la récursivité, de la propagation des erreurs de calcul, de sa «rapidité», de sa «complexité», etc.

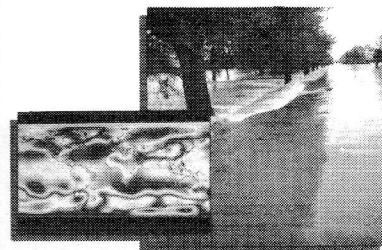
— Que dire enfin de cette vieille dame infiniment respectable, qu'on continue à appeler «géométrie» alors que son champ d'action a complètement oublié ses origines et son étymologie? Respectable pour deux raisons : l'une psychologique due au parallélisme entre l'appel à l'imagination à propos de «figures», cad de «représentations», d'images, et l'appel à la rigueur rendue nécessaire à cause des débordements de la première; l'autre utilitaire due aux services qu'elle a rendus et continue à rendre à échelle locale. Mais comment laisser croire, dans une culture qui se veut générale, qu'une vision globale de l'espace puisse encore s'appuyer uniquement sur les concepts bimillénaires de points, de lignes, de surfaces, de solides, de droites, de plans? Le choc de la découverte de symétries d'ordre 5 n'a pas ébranlé le temple!

Face aux mathématiques contemporaines

Ce n'est pas un fossé qui sépare les mathématiques scolaires et les mathématiques contemporaines, c'est un abîme qui ne cesse de se creuser si rien ne change. Dire que ce sont des «connaissances de base» par lesquelles il faut inévitablement passer n'est qu'un faux prétexte pour éluder le problème de fond. Car, en effet, il ne s'agit pas seulement de connaissances nouvelles qu'on pourrait croire cumulables. Il s'agit aussi et surtout de changements d'attitudes, de méthodes, de «visions».

Un seul exemple : la notion de «modélisation» et de «modèle»

Qu'il s'agisse de mathématiques pures ou appliquées, toute l'activité d'un mathématicien pourrait se résumer par une expression : «modélise » pour essayer de comprendre, de prévoir, de résoudre, de s'évader... (modéliser au sens large du terme, cad créer une «représentation», codes ou images, avec un système rationnel de fonctionnement et les interprétations possibles — et ceci soit à l'intérieur d'un modèle déjà existant, soit entièrement nouveau). Or les programmes scolaires se contentent d'imposer l'utilisation de modèles plus ou moins archaïques, plus ou moins sophistiqués, sans même dire le plus souvent qu'il s'agit de modèles avec leurs «limites» plus ou moins floues de validité. Et le respect de ces modèles traditionnels est d'autant plus grand que les progrès qu'ils ont apportés lors de leur création ont été grands. Il en est ainsi de la numération c'est sans doute, avec les livres d'Euclide, un des premiers exemples de modèles. Malheureusement comme l'idée de modélisation n'a pas pénétré l'enseignement, alors l'interprétation officielle ne peut plus changer. Ex : si un nombre représente un cardinal d'ensemble, alors il sera difficile d'introduire les entiers négatifs, alors qu'en l'interprétant comme générateur unique d'un groupe, (translations discrètes à droite ou à gauche, tours de ficelle à l'endroit, à l'envers sur un bâton, etc.) les négatifs deviennent tout aussi naturels que les positifs. Idem pour toutes les extensions nécessitant des transferts d'interprétation. Encore faut-il avoir la liberté de pratiquer des transferts d'interprétations, de représentations, de créer soi-même ses pro-



vérifier leur cohérence, leur efficacité et de les comparer à d'autres, en bref avoir la liberté de penser! Tout un programme!

Dans le domaine des connaissances contemporaines

Dans le chaos des théories nouvelles, des paradoxes actuels, des interrogations et des doutes dans tous les domaines scientifiques, les programmes de mathématiques restent inébranlables, assurés de leur certitude éternelle. Exemple : On sait depuis presque un siècle que la notion d'instant est peut-être commode à une échelle donnée mais qu'elle est dénuée de sens : la relativité nous assure qu'on ne peut pas définir la simultanéité de deux événements. Pourtant on continue à croire qu'une durée peut être bien définie, même en l'absence d'un début et d'une fin précis. Dès lors, comment définir une vitesse si la notion de durée est à redéfinir? Nous n'avons toujours pas tiré les conséquences de l'introduction des intervalles ouverts.

Par analogie, comment croire à la possibilité de définir la coïncidence de deux points? Un point dans l'espace : ça n'existe pas. C'est une fiction commode à une échelle donnée, fiction tellement habituelle qu'on finit par lui donner une réalité. L'idée de remplacer les particules par des supercordes pour résoudre certains paradoxes souligne cette nécessité permanente de remettre en question les certitudes les plus ancrées.

Si les fractales commencent à pénétrer dans nos classes, elles ne semblent pas avoir modifié beaucoup la conception

euclidienne de l'espace. Pourtant on sait bien maintenant que l'univers n'est pas euclidien. On continue à laisser croire qu'il a 3 dimensions alors que tous les doutes sont permis. Quelques manipulations de variétés, suffiraient à élargir nos visions d'espace; pourtant les seules expériences admises ne portent le plus souvent que sur le traditionnel. Qui peut dire ce qu'est une force? une onde? L'habitude des représentations dissimule notre ignorance. Tout ce qui fait intervenir l'idée d'itération est pratiquement ignoré, alors que c'est une des premières manifestations de curiosité de l'enfant : pas d'attracteurs, pas de chaos, pas de turbulences, pas de fronces, etc. Rien que l'euclidien, le newtonien. Sait-on, par exemple, que la seule présence d'une personne immobile à quelques mètres d'un billard, perturbe la trajectoire de la bille si on suppose que celle-ci peut se réfléchir un peu plus d'une dizaine de fois sur les bandes? que le caractère aléatoire d'un phénomène peut être dû à l'inaccessibilité d'une dimension (transformation du boulanger) (2), etc.

Bref, la seule vision que les programmes donnent de l'espace, repose entièrement sur le concept de ligne, droite de préférence, c'est-à-dire finalement sur notre concept traditionnel de numération, d'où les infinis traditionnels, etc.

Le plus grave, dans cette situation, n'est pas d'ignorer ce qui se passe à l'extérieur; c'est de ne pas laisser la liberté de regarder à l'extérieur, en ouvrant les fenêtres.

Ndlr : Avant de conclure, Marcel Dumont donne un exemple de vision fantastique avec des nombres gigantesques que nous tenons à votre disposition ou que vous pourrez lire dans les actes de la C.I.E.A.E.M.

Conclusion

Nous vivons actuellement une époque extraordinaire, époque qui pourrait s'appeler « NOUVELLE RENAISSANCE », qui s'étalera peut-être sur plusieurs siècles et bouleversera, une fois de plus, l'humanité. Ce qui la caractérisera, outre le traitement automatique de l'information et la robotisation de toute tâche algorithmique, ce sera peut-être, pour l'homme, l'aptitude à changer d'échelle : passer sans complexe de la femtoseconde au milliard d'années par exemple, et l'aptitude à franchir les limites, à traverser les cloisons qu'on croyait étanches, à faire varier ce qu'on croyait constant, à concevoir de nouveaux infinis, etc.

Pourtant, le comportement social de l'humanité évolue à une échelle infiniment plus lente que celle du savoir et du savoir-faire, évolution à peine perceptible sur plusieurs millénaires. Peut-être est-ce dû à cette caractéristique essentielle de la société : seul le rationnel est contrôlable, donc perfectible : or l'être humain n'est pas fait que de rationnel. Il a besoin de rêve; c'est l'aliment de la pensée et aussi de la passion. Le rationnel en est l'antiseptique indispensable. Mais on ne se nourrit pas avec des antiseptiques.

Ceci implique une transformation profonde de l'enseignement, des programmes, du rôle des enseignants, de la documentation, et des critères d'évaluation. (Exemple de mesure qui ne coûterait rien et qui pourrait transformer les mentalités : « dans tout examen ou concours, on accordera la moitié des points aux questions posées par les candidats, concernant le sujet, l'ouverture du sujet, sa transformation, quant à leur originalité, à la pertinence des critiques, etc. » Malheureusement ou heureusement, aucun barème n'est possible!)

Puissent ces quelques banalités déclencher une prise de conscience de ce que sont nos connaissances dites « de base », amorcer des recherches plus rationnelles et plus imaginatives de nouveaux systèmes d'écriture et accorder à chacun, enfants et grands enfants, le droit de rêver parfois. Seules les machines restent prisonnières du rationnel!

Je plaide pour des programmes qui incitent au rêve autant qu'à la rigueur et donnent à l'humanité l'intelligence du cœur et de la raison.