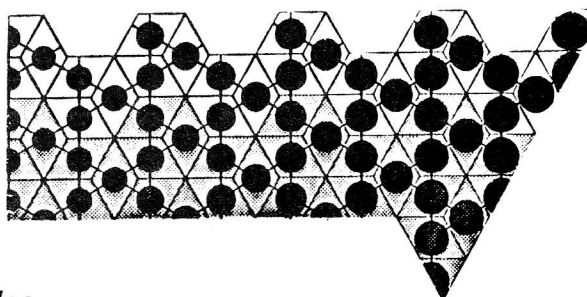


PERCEPTION SPATIALE DE POLYEDRES

Groupe de Recherche en Topologie Structurale - Montréal

Fin juin, début juillet se tient en France un congrès international intitulé "Computer-aided geometry reasoning". Du 22 au 26 juin à Sophia Antipolis, du 29 juin au 3 juillet à La Villette à Paris (pour tout renseignement s'adresser à Henry Crapo - Bt 24 - INRIA - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex).

En avant-première voici un texte présenté par une équipe québécoise bien connue dans les IREM (D. Dion, R. Pallascio et V. Papillon) extrait du bulletin de l'AMQ d'Octobre 1985. Ils proposent cinq étapes dans la construction de la perception spatiale chez l'enfant : visualisation, structuration, transfiguration, détermination et classification.



Introduction

Les polyèdres constituent des modèles d'organisation spatiale dont les propriétés géométriques sont bien définies. Les connaissances que nous en avons ont permis à notre groupe de recherche de voir les polyèdres, en tant qu'objets, comme des figures de base dans l'étude du développement de la *perception spatiale*.

Nous pensons que les diverses actions menant à une perception développée se font en cinq étapes: la *visualisation*, la *structuration*, la *transfiguration*, la *détermination* et la *classification*. Chacune de ces étapes inclut des actions qui vont de l'opération mentale jusqu'à l'application; par exemple, de la reconnaissance des objets à la réalisation de ceux-ci. Le niveau de difficulté dans les tâches à accomplir augmente en passant d'une étape à l'autre et ce développement suppose, à chaque étape, une maîtrise des actions précédentes.

En vue d'un entraînement éventuel, nous avons expérimenté le contenu et le déroulement de ces étapes. Un test comprenant plusieurs activités, effectuées avec de véritables solides, a été présenté à 40 élèves de secondaire V (14-18 ans).

Le texte illustré qui suit est divisé en fonction des cinq étapes. Chaque partie contient, en tête, une définition de l'étape, puis une description des activités qui s'y rattachent, accompagnées de commentaires sur les résultats obtenus après l'expérimentation. Les dernières lignes sont consacrées à des observations à propos des activités et des modèles que nous avons utilisés.

DÉFINITION DES ÉTAPES, DESCRIPTIONS ET RÉSULTATS DES ACTIVITÉS

1^{re} étape:

VISUALISATION

a. Définition

Après avoir observé un objet, sa «visualisation» consiste à pouvoir en mémoriser suffisamment d'images partielles, pour pouvoir reconnaître des objets semblables à celui-ci, c'est-à-dire à isométrie ou homothétie près, parmi un ensemble d'objets de complexité topologique équivalente.

b. Activités

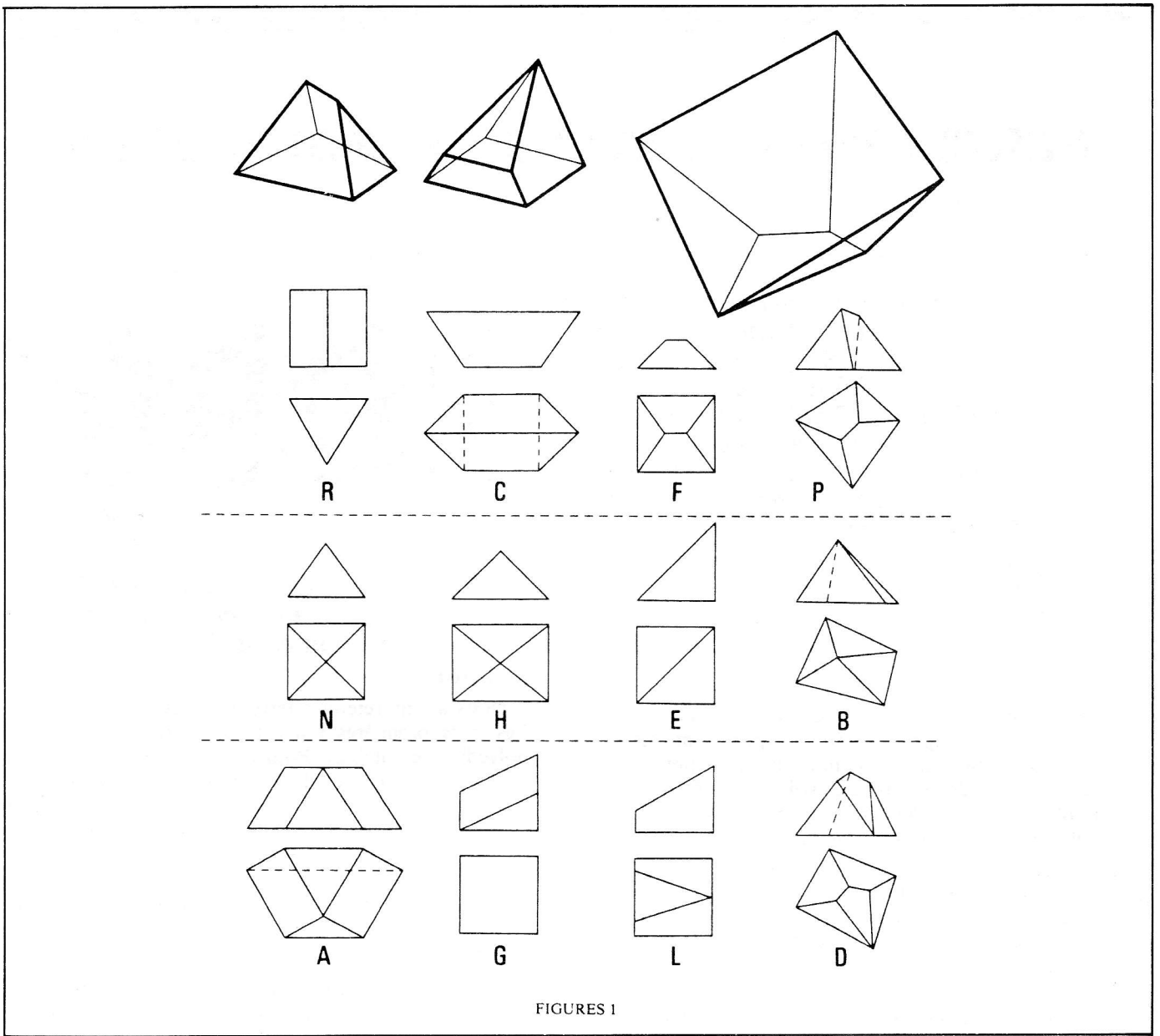
Nous avons retenu quatre activités de visualisation. Les trois premières portent sur la reconnaissance de polyèdres semblables. Pour ce faire, nous avons utilisé du matériel qui avait déjà servi pour des expérimentations comparables auprès de jeunes élèves. Il s'agit d'un ensemble de douze polyèdres, aux faces ajourées, divisés en trois familles de structures topologiques distinctes, comme le montrent leurs projections des figures 1, se rattachant au prisme triangulaire (R), à la pyramide carrée (N) et à un hexaèdre (A). (Les lettres sont des identifications tout à fait arbitraires).

Deux activités se font à partir d'une exploration *tactile* de petits polyèdres, figures 1.1 et 1.2, pouvant être manipulés aisément. On passe au sujet un tronç de pyramide, figure 1.1, qui est une reproduction du modèle P de la famille du prisme triangulaire, mais il le reçoit sous la table de manière à ce qu'il puisse le manipuler un certain temps, en tous sens, sans jamais le voir. On présente ensuite le groupe des douze polyèdres afin qu'il identifie lequel est semblable à celui qu'il a eu entre les mains.

L'expérience est répétée avec un modèle un peu plus complexe, le L, figure 1.2, augmentant ainsi la difficulté de mémoriser au toucher les différentes parties de ce polyèdre.

Pour la troisième activité, l'exploration est *visuelle*, mais utilisant cette fois un très gros polyèdre, figure 1.3, d'environ un mètre cube, qu'il faut contourner pour voir toutes ses faces. Après un temps d'observation, le sujet doit reconnaître son modèle semblable, le D, figures 1.

Enfin, la quatrième activité consiste à reconstituer une composition formée d'un groupe de quatre polyèdres, figures 1.4 a, b, c, d. Ces derniers sont tous faits à partir d'un prisme triangulaire auquel est ajouté séparément: un tétraèdre (a), une pyramide carrée (b) ou deux (d) et un autre prisme (c). Ils sont disposés en une rangée compacte, selon le plan des figures 1.4. Le sujet doit mémoriser non pas, comme précédemment, une série d'images partielles d'un polyèdre mais plutôt la position de chaque polyèdre dans la composition. Après quelques minutes d'observation, ils sont mélangés, puis la tâche du sujet est de les replacer exactement comme ils étaient assemblés.



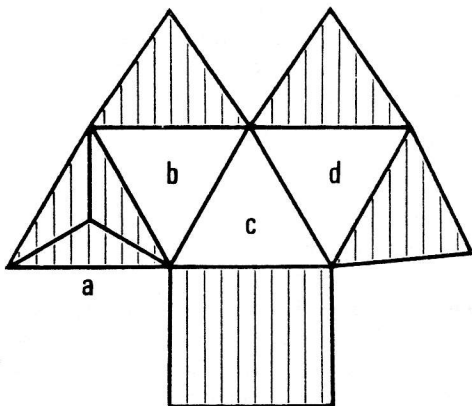
FIGURES 1

Résultats

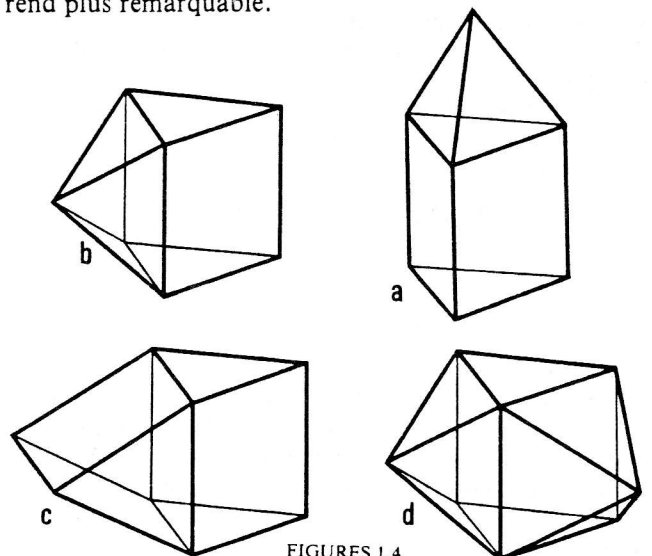
Les résultats des premières activités ont été meilleurs avec l'exploration tactile des polyèdres P et L que pour la reconnaissance visuelle du polyèdre D, où seulement près de la moitié des sujets ont pu le reconnaître. Par ailleurs, il est très étonnant de voir que le P et le L ont été confondus, le plus souvent, avec le modèle D, dont

sept fois il a été choisi à la place du L pour bonne réponse. Notons cependant qu'ils sont de la même famille, figures 1.

Dans la juxtaposition des quatre prismes, le modèle a, figures 1.4, a été beaucoup plus souvent remis dans sa bonne position que les trois autres. Ce prisme, chapeauté d'un tétraèdre, dépasse les autres en hauteur et ceci le rend plus remarquable.



PLAN D'ASSEMBLAGE



FIGURES 1.4

2^e étape:

STRUCTURATION

a. Définition

Après avoir «visualisé» un objet, sa «structuration» consiste à pouvoir reconnaître des objets qui lui sont topologiquement équivalents jusqu'à pouvoir le reconstituer à partir de quelques-uns de ses éléments de base, c'est-à-dire des sommets, arêtes, faces ou des combinaisons de polyèdres.

b. Activités

La structuration comportait deux activités semblables; la seconde ne venant qu'accroître les difficultés de la première. Le sujet doit maintenant, en plus d'observer et manipuler, construire lui-même des polyèdres. À cette fin, le matériel requis à sa disposition sont des triangles, carrés et pentagones réguliers qui s'assemblent à l'aide de rubans élastiques. La tâche à accomplir est de réaliser, avec des faces régulières, un polyèdre dont la structure topologique sera équivalente à celle d'un polyèdre dissymétrique donné.

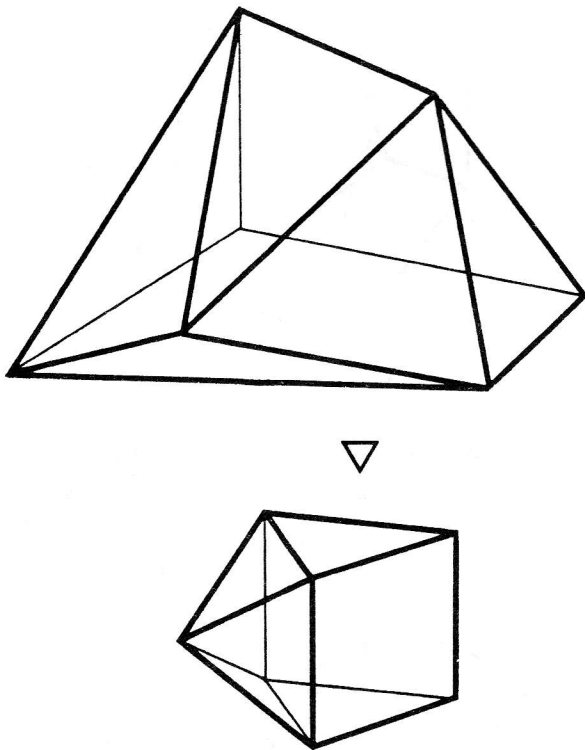


Figure 2.1

Le sujet reçoit pour débiter un tronc de pyramide triangulaire pyramidé sur l'une de ses faces, figure 2.1. Il choisit et agence ensuite les bons polygones pour former une reproduction régulière du modèle. Le tronc de pyramide devient alors un prisme triangulaire régulier et sur l'une de ses faces carrées, pointe une pyramide régulière, figure 2.1 à droite.

Nous reprenons la même activité mais avec un tronc de pyramide pentagonale pyramidé également sur une face quadrilatérale, figure 2.2.

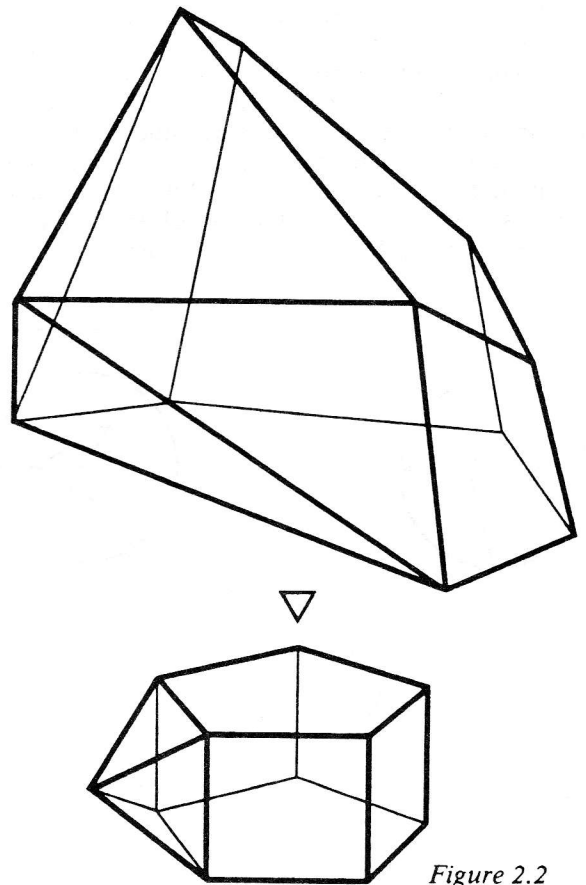


Figure 2.2

c. Résultats

Le taux de réussite de la seconde activité, comparativement à la première (7 bonnes solutions contre 17), confirme le rapport de complexité entre les deux modèles, figures 2.1 et 2.2. Parmi ceux qui ont réussi le prisme pentagonal pyramidé, il s'en est trouvé trois qui n'avaient pas fait le premier polyèdre, figure 2.1. Ce sont pourtant des figures proches l'une de l'autre, mais en ajoutant des faces pentagonales, le sujet cherche à assembler trois faces différentes plutôt que simplement des triangles et des carrés, et le nombre de faces est bien entendu plus élevé.

3^e étape:

TRANSFIGURATION

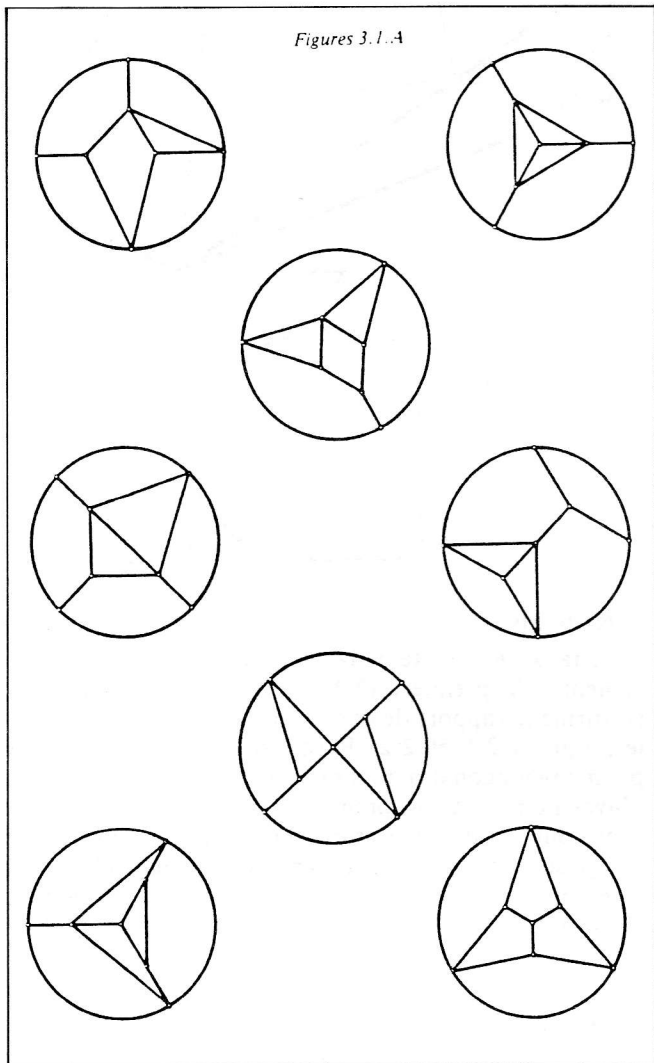
a. Définition

Pouvant «structurer» un objet, sa «transfiguration» consiste à pouvoir reconnaître sa description dans un autre médium, jusqu'à pouvoir le décrire dans ce médium; par exemple passer d'une description littéraire en termes de propriétés topologiques d'un objet vers la reconnaissance d'un objet topologiquement équivalent, ou d'un modèle physique vers la reconnaissance de sa représentation en mode projectif ou vice versa.

b. Activités

La transfiguration a été partagée en trois activités. Les deux premières sont orientées sur le passage de la représentation graphique au solide. Les dessins que nous employons sont des graphes, figures 3.1.A et 3.2.A. Cette forme de représentation topologique a été choisie parce qu'elle est réellement une figure plane, en ce sens qu'elle ne fait pas appel à l'effet de profondeur rencontré dans les projections des polyèdres; pour être comprise, elle exige plutôt une *analyse des incidences* des sommets et arêtes entre eux. Pour cette raison, les

huit graphes, figures 3.1.A, sont tracés volontairement avec des courbes, diminuant ainsi la vue en perspective des polyèdres. Ceci est expliqué au sujet, avant d'entreprendre les activités. Par la suite, nous débutons en lui remettant un prisme triangulaire pyramidé d'un tétraèdre, figure 3.1.B, et les huit graphes, tels qu'ils apparaissent en 3.1.A. La question est d'identifier lesquels, parmi ces graphes, représentent le polyèdre. Il y en a trois; nous invitons le lecteur à les découvrir.



Dans la seconde activité, au lieu de reconnaître, comme dans la première, les représentations d'un polyèdre, il s'agit inversement de construire le polyèdre d'après sa représentation graphique. Nous présentons au sujet le graphe, figure 3.2.A, et nous lui demandons de construire avec des polygones réguliers, préparés en conséquence, le polyèdre correspondant. La solution est de nouveau un prisme triangulaire mais pyramidé sur une des faces carrées, figure 3.2.B.

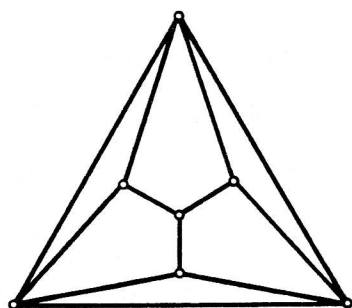
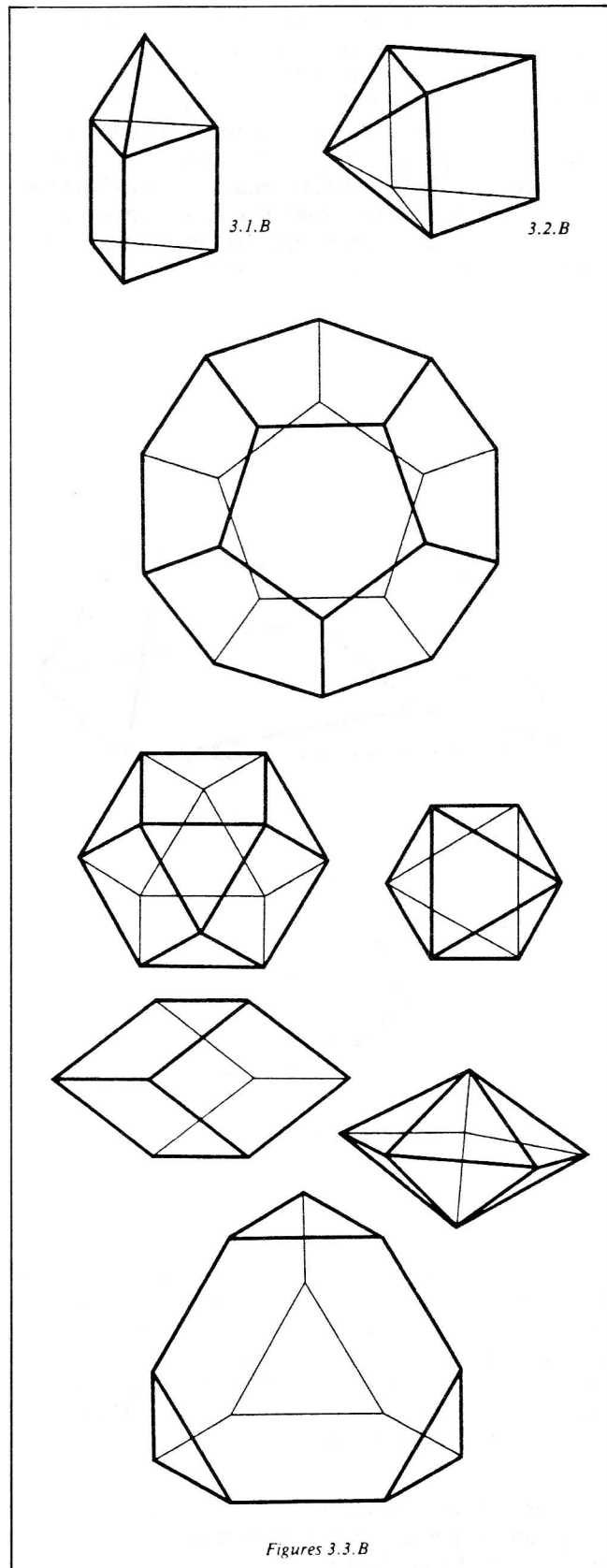


Figure 3.2.A

La troisième transfiguration part d'une description linguistique pour reconnaître des polyèdres. Cette description est représentée sous forme de définitions, écrites, d'un polyèdre régulier et d'un semi-régulier, figure 3.3.A. Deux polyèdres, figures 3.3.B, sont réguliers: le dodécaèdre et l'octaèdre, deux sont semi-réguliers: le cuboctaèdre et le tétraèdre tronqué et deux ne sont pas définis, que nous appelons «autres»: un rhomboèdre et une pyramide pentagonale. Le sujet lit les définitions, après quoi nous lui montrons un à un les six polyèdres pour lesquels il doit mentionner la catégorie.



Figures 3.3.B

c. Résultats

Dans la première activité, seul le graphe en haut à droite des figures 3.1.A, a été bien de fois spontanément identifié, car il est le plus près d'une vue en perspective du polyèdre. Ce groupe des huit graphes est très confondant. Ils sont tous composés de trois faces quadrilatérales et de quatre triangulaires, aussi ils ont tous, trois sommets de quatre arêtes et quatre sommets de trois arêtes incidentes. Ce n'est donc pas en comptant ces éléments que l'on aura les solutions mais en observant leurs agencements. À ce propos, mis à part les trois que l'on recherche, il y a trois autres graphes qui sont également isomorphes, c'est-à-dire qui représentent un même polyèdre.

Le polyèdre, figure 3.2.B, de l'activité suivante est le même modèle qu'il fallait réaliser en structuration, figure 2.1, où il a été doublement plus réussi. On peut conclure qu'il est plus difficile de construire un polyèdre d'après son graphe que d'après un équivalent.

À la dernière activité, les deux polyèdres réguliers ont été qualifiés correctement par presque tous les sujets. Par contre, les deux dits «autres»: le rhomboèdre et la bipyramide ont été pris pour des réguliers par la plupart des sujets. Cela est sans doute dû au fait qu'ils n'ont qu'un type de faces. Enfin, les semi-réguliers sont reconnus chaque fois qu'ils sont classés dans une mauvaise catégorie.

Définitions

a. Polyèdre régulier

Un polyèdre régulier est un polyèdre dont tous les angles peuvent coïncider parfaitement par superposition et dont toutes les faces sont des polygones réguliers pouvant coïncider parfaitement par superposition.

b. Polyèdre semi-régulier

Un polyèdre semi-régulier est un polyèdre dont tous les angles polyèdres peuvent coïncider parfaitement par superposition, dont toutes les faces sont des polygones réguliers, mais dont au moins 2 faces ne coïncident pas.

Figure 3.3.A

4^e étape:

DÉTERMINATION

a. Définition

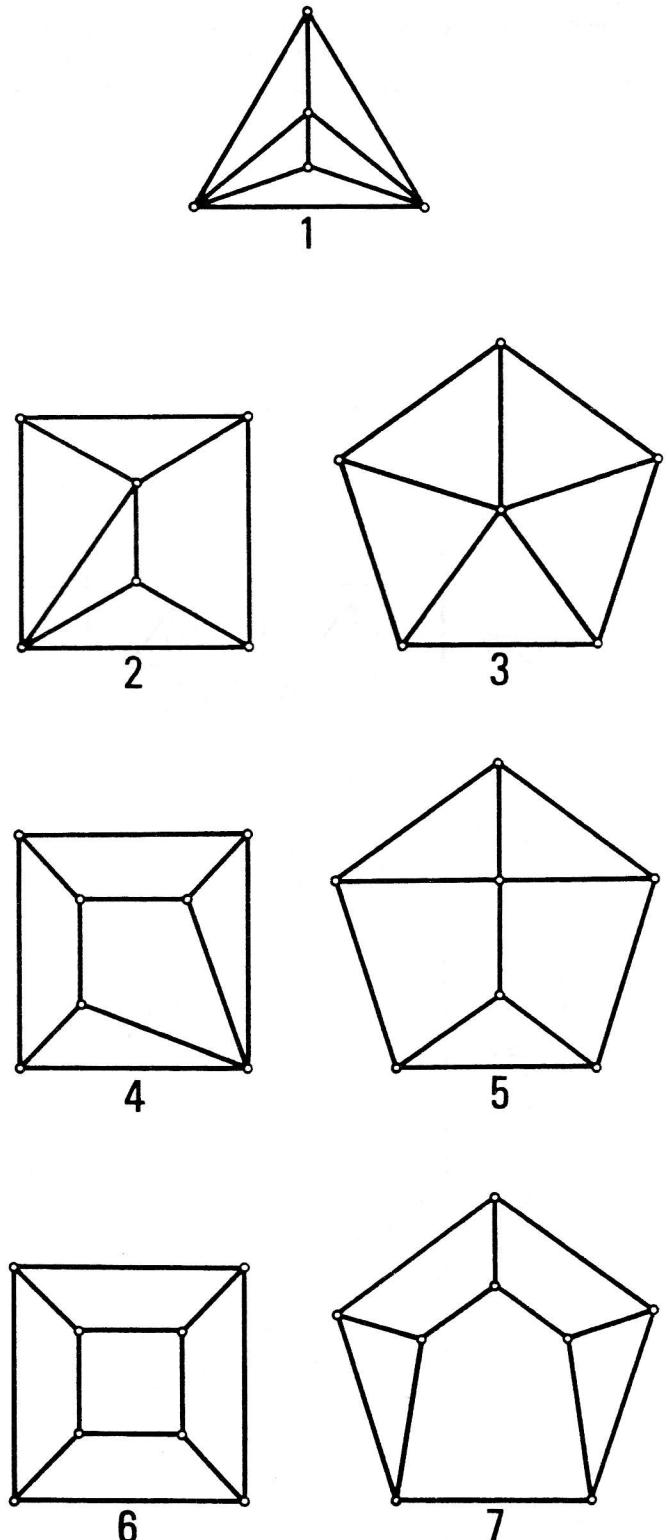
Pouvant «transfigurer» un objet, sa «détermination» consiste à pouvoir reconnaître sa faisabilité à partir d'une description incluant des contraintes métriques, jusqu'à pouvoir sélectionner d'autres conditions métriques équivalentes.

b. Activités

Pour toutes les activités à venir, le matériel utilisé est le polystyrène que l'on taille à l'aide d'un fil chauffant. Les pièces ne dépassent pas cent vingt-cinq (125) centimètres cubes et sont faciles à découper. Cependant, les difficultés se poseront, pour le sujet, dans le choix des points sur la pièce, par lesquels passera le fil pour obtenir les plans de coupe désirés. C'est en vue de tester cette façon de faire que nous avons préparé une activité.

Pour celle-ci, nous avons sélectionné sept graphes, figures 4.1.A, représentant tous un hexaèdre différent, établis dans un ordre croissant de leurs sommets et leurs arêtes. On peut les obtenir, et ce sont les seuls, après

avoir exécuté deux troncatures sur un tétraèdre, mais sans faire passer le plan de coupe par une arête dans le sens de sa longueur; car une telle section est superflue, elle redonnerait à nouveau le ou les mêmes polyèdres. Partant de ces données, le sujet doit tronquer, deux fois seulement, un tétraèdre en polystyrène afin de réaliser deux de ses hexaèdres, d'abord le sixième, qui est topologiquement un cube, puis le troisième représentant une pyramide pentagonale. Lorsque l'un ou l'autre de ces polyèdres n'a pas réussi, on constate, en observant les cinq autres graphes, lequel a été fait parmi ceux-ci.



Figures 4.1.A

Le tableau 4.1.B. montre tous les découpages possibles pour produire les sept hexaèdres après deux tronçures. Les trois tétraèdres, tout au haut, sont tronqués une première fois (parties hachurées). Dans un cas, à gauche, la coupe passe par un des sommets du tétraèdre et rencontre la face opposée; il en résulte une pyramide quadrilatérale. Les deux autres tronçatures, à droite, sont équivalentes, que l'on tronque simplement un sommet ou une arête par quatre faces, on aura dans les deux cas, un tronc de pyramide triangulaire. Par conséquent, il n'y a que deux polyèdres aux structures différentes après une première tronçature.

À l'extrême gauche du tableau, les sept graphes sont reproduits et vis-à-vis de chacun d'eux, figurent en rangées les diverses solutions qu'engendre la deuxième tronçature celle-ci étant une coupe soit triangulaire, soit quadrilatérale, ou encore pentagonale, comme le sym-

bolisent les polygones apparaissant au haut de chaque colonne.

A remarquer que les coupes pentagonales effectuées sur la pyramide quadrilatérale pour les graphes 5 et 7 ne sont, en réalité, qu'une seule et même coupe, la pièce résiduelle étant l'un ou l'autre des deux hexaèdres. On compte ainsi vingt-sept chemins pour arriver aux sept hexaèdres, en considérant toutefois que les trois colonnes de droite du tableau, sont doublées par les deux troncs de pyramides triangulaires d'où elles sont issues.

Néanmoins, il existe uniquement une façon de tailler la pyramide pentagonale du graphe 3, recherchée dans la présente activité. Il faut nécessairement avoir fait la pyramide quadrilatérale avant la deuxième tronçature. Quant au cube, graphe 6, il dérive aussi bien de la pyramide quadrilatérale que des troncs de pyramides.







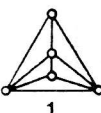
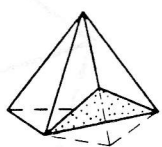


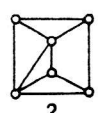
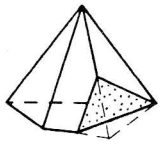
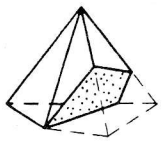
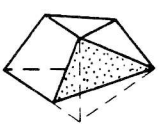
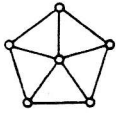
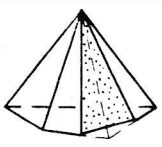
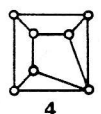
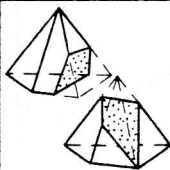
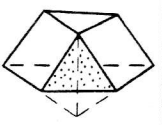
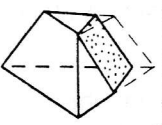
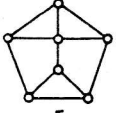
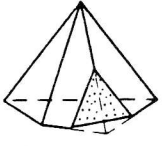
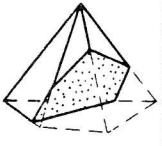
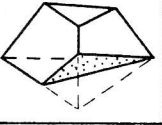
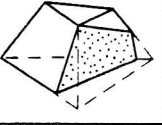
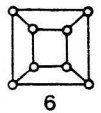
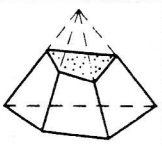
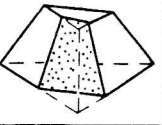
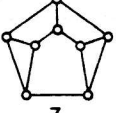
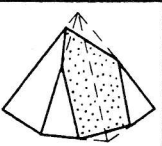
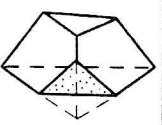
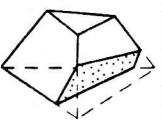
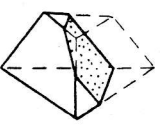
| |  |  |  |  |  |  |
|--|---|---|---|---|---|---|
|  1 |  |  |  | | | |
|  2 |  |  | |  | | |
|  3 |  | | | | | |
|  4 | |  | |  |  | |
|  5 |  | |  |  |  | |
|  6 | |  | | |  | |
|  7 | | |  |  |  |  |

TABLEAU 4.1.B

Une seconde activité porte sur l'égalité de réflexion. En d'autres termes, deux figures égales sont les vues l'une de l'autre dans un miroir. Nous présentons au sujet un tétraèdre dissymétrique, figure 4.2 à gauche, dont trois arêtes incidentes à un sommet ont des longueurs déterminées de trois, quatre et cinq centimètres et ces arêtes forment entre elles trois angles droits. Il doit en faire une reproduction symétrique par réflexion, en coupant dans un cube en polystyrène de cinq centimètres de côté. Un sommet quelconque du cube détermine déjà l'angle solide droit, reste alors à mesurer les longueurs d'arêtes homologues situées de part et d'autre d'un plan de réflexion imaginaire, figure 4.2 à droite.

c. Résultats

La moitié des sujets ont bien réalisé le cube et la pyramide pentagonale dans l'activité sur les hexaèdres. À la place de ces deux solides, on a découpé le plus souvent, par erreur, l'hexaèdre du graphe 7. Ceci est explicable pour deux raisons. C'est le modèle qui offre le plus grand choix de tronçures diverses, mais surtout, c'est celui qui s'obtient par les deux tronçures qui requièrent le moins de particularités. En fait, il suffit de tronquer deux sommets quelconques du tétraèdre, en autant que les plans de coupe ne s'entrecroisent pas. On reconnaîtra le deuxième polyèdre de la rangée du graphe 7, au bas du tableau 4.1.B.

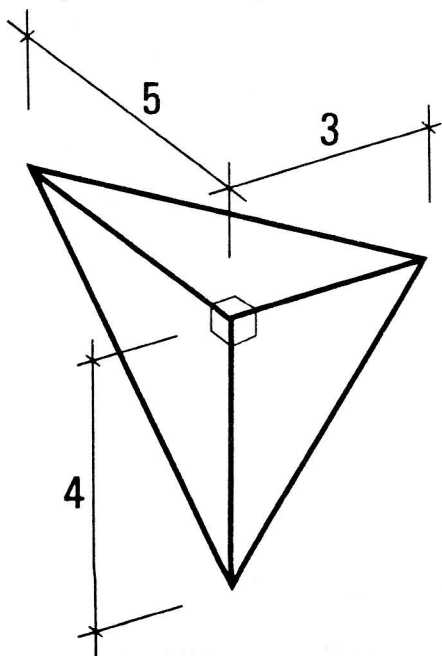
La coupe des tétraèdres symétriques, figure 4.2, a connu légèrement moins de succès. Des élèves n'ont pas fait le lien entre les angles droits du cube et celui du tétraèdre, ou ils n'ont pas su éviter de refaire exactement le même tétraèdre, symétrique par congruence.

5^e étape:

CLASSIFICATION

a. Définition

Pouvant «déterminer» des objets, leur «classification» consiste à pouvoir les reconnaître en classes d'objets équivalents, selon des propriétés projectives, affines ou métriques, jusqu'à pouvoir inventorier toutes les classes d'équivalence correspondant à une typologie.



PLAN DE
RÉFLEXION

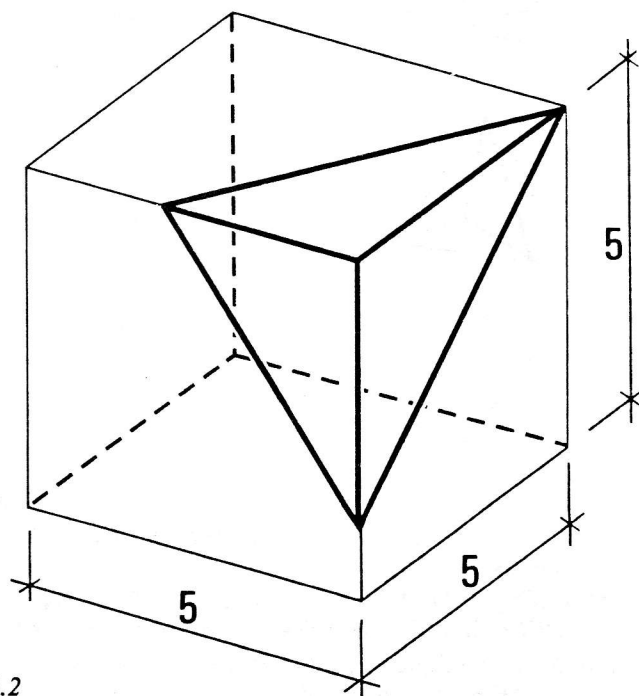


Figure 4.2

b. Activité

Pour ne pas engager le sujet dans des tâches de classification trop avancées, il a été préférable de s'en tenir à une seule activité. Celle-ci comportait tout de même deux parties étroitement reliées: faire l'inventaire de toutes les paires différentes de polyèdres que l'on obtient en sectionnant une fois des tétraèdres et dessiner un graphe de chacune des pièces ainsi découpées.

Le sujet dispose de quelques tétraèdres en polystyrène qu'il taille séparément d'une seule coupe, en essayant de ne pas se répéter. De cette manière, il peut découvrir quatre possibilités, figures 5 a, b, c et d: trois sections sont triangulaires, a, b et c, et une est quadrilatérale, d. Si on se réfère au haut du tableau 4.1.B, on constate que les trois premières tronçures du tétraèdre sont les mêmes que nous cherchions, la quatrième étant celle qui passera le long d'une arête, figure 5 c. À côté de ces sections, figures 5, sont illustrés les couples de nouveaux polyèdres qui en sont dérivés, suivis de leurs graphes correspondants. Le sujet avait le choix, pour les troncs de pyramides et la pyramide quadrilatérale, de tracer l'un ou l'autre des graphes isomorphes.

c. Résultats

Les deux tronçures séparant un tétraèdre d'un tronc, figure 5 a, puis deux tétraèdres, figure 5 c, ont été produites par presque tous les sujets; tandis qu'environ la moitié d'entre eux seulement ont vu les deux autres, figures 5 b et d. Ces dernières exigent plus de discernement dans le choix des points de coupe, en comparaison notamment avec la simple tronçure d'un sommet, figure 5 a, qui est presque spontanée.

OBSERVATIONS

Dans un premier temps, nous avons imaginé autant d'activités qu'il en fallait pour en répartir quelques-unes dans les cinq étapes. Mais une pré-expérimentation a vite démontré que certaines d'entre elles devaient être modifiées ou mises de côté, compte tenu du niveau de connaissances de nos élèves. Voyons deux exemples.

Une activité en *détermination* présentait pour les sujets une difficulté technique due à un manque d'apprentissage. Il s'agissait de compléter le tracé exact d'un

développement-plan, déjà amorcé, d'une pyramide quadrilatérale, dont la base et un des côtés sont donnés, figure 6. Les instruments mis à leur disposition étaient un compas, une règle graduée et un crayon. L'emploi du compas pour reporter des longueurs ou déterminer des perpendiculaires est malheureusement si peu connu des élèves qu'aucun d'eux n'a su l'utiliser pour construire une solution.

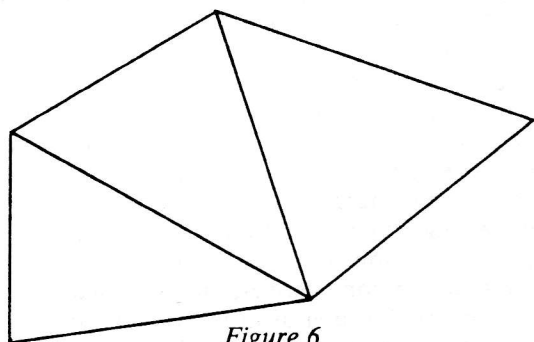


Figure 6

Pour une autre activité, semblable à la deuxième que nous avons décrite en *transfiguration*, plus haut, le graphe donné est apparu trop complexe. C'était celui d'un prisme pentagonal pyramidé sur deux de ses faces latérales, figure 7. Cette figure est composée d'un plus grand nombre d'éléments que le modèle choisi pour le test (figure 3.2.A). C'est aussi l'image dissymétrique d'un solide qui possède une symétrie bilatérale et son arrangement rend difficile toute tentative d'une vue en perspective.

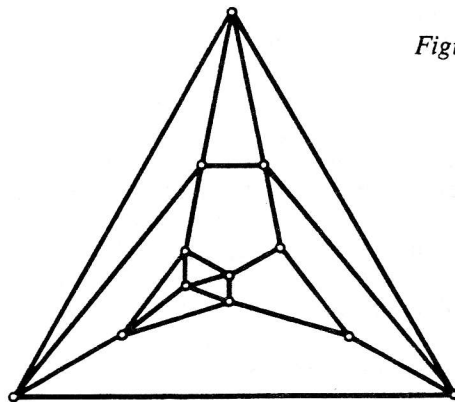
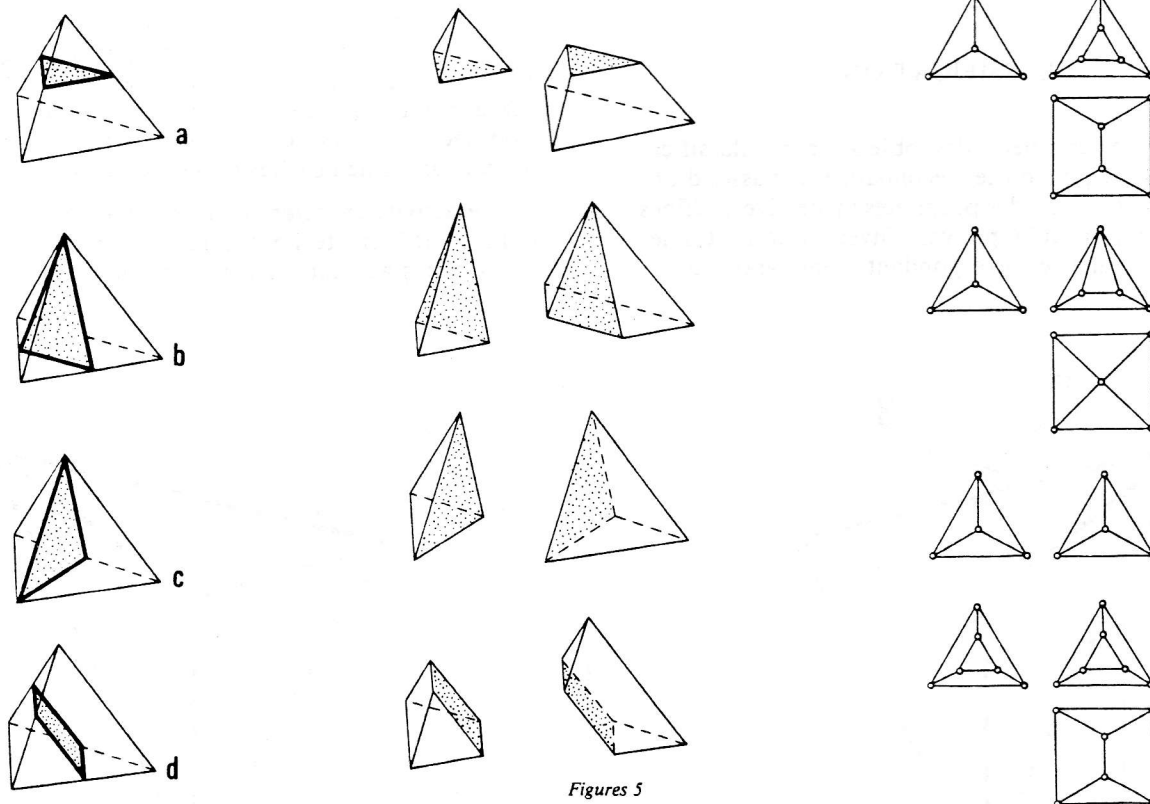


Figure 7

Dans toutes nos activités, de la visualisation à la classification, nous avons essayé, en combinant prismes et pyramides, de nous rapprocher de volumes simples et familiers. Avec les corps ronds, ces polyèdres, qui constituaient des figures de base primitives, ont été étudiés et enseignés en géométrie élémentaire depuis fort longtemps. Cependant, nous sommes peu ou pas habitués à les distinguer dans notre environnement, tels que définis par leurs propriétés géométriques. Symétriques, on les retrouve camouflés dans le schéma de divers bâtiments, d'objets ou d'emballages; mais leurs versions dissymétriques (voir figures 2.1 et 2.2) sont pratiquement inexistantes. En effet, il faut chercher longuement avant de trouver un objet quelconque, irrégulier, dont la structure est topologiquement symétrique. Même en se limitant à des objets polyédriques convexes, proches des formes que nous rencontrons, le degré d'abstraction des formes géométriques demeure élevé par rapport aux objets usuels. ■



Figures 5

Références

- BARACS, Janos, *TOPOLOGIE STRUCTURALE*, École d'Architecture, Université de Montréal, Notes de cours, 1968 ss.
- BARACS, J., DION, D., PALLASCIO, R. et PAPIILLON, V., *VERS UNE DÉFINITION OPÉRATOIRE DE LA PERCEPTION SPATIALE*, in Bulletin de l'AMQ, vol. 23, no 4, 1983.
- DION, Dominique, *VISUALISATION, STRUCTURATION ET TRANSFIGURATION*, Rapport de recherche (AME 6804), Faculté de l'Aménagement, Université de Montréal, 1984.