CONSTRUIRE L'ESPACE

Michel DARCHE - La Villette

VOYAGES ALLER-RETOUR DES ECRANS AU REEL

Déjà en 1980, lors du congrès international sur l'enseignement des mathématiques à Berkeley, la géométrie semblait vouloir reprendre une place de choix dans la formation des jeunes.

Depuis l'évolution technologique a confirmé cette tendance :

- *les objets, avec leurs propriétés géométriques, sont plus accessibles et plus présents dans la vie de tous les jours,*
- *la visualisation de ces objets prend de plus en plus de place dans l'audiovisuel, l'informatique et transforme fortement les métiers traditionnels, du secrétariat au dessin industriel ou la comptabilité, sans parler des nouveaux métiers qui s'appuient sur ces nouveaux outils,*
- *enfin de nombreux problèmes actuels des mathématiques débouchent sur la géométrisation et la visualisation.*

Les problèmes, pour la formation, portent sur trois points :

1) Comment se dégager (un peu) de l'emprise de la géométrie analytique omniprésente depuis une vingtaine d'années.

2) Comment réorganiser le processus général d'apprentissage des concepts géométriques qui passe de l'analyse interne des objets, aux constructions de classes d'objets, aux relations entre ces objets et aux structures des transformations sur ces classes d'objets.

3) Comment, enfin, prendre en compte le développement historique passé et présent, de la géométrie tout en tenant compte de la psychogénèse des structures géométriques chez l'enfant et l'adulte.

Les activités proposées dans ce numéro essaient de tenir compte de ces préoccupations et proposent des situations avec des objets, puis sur leurs représentations, sur les transformations de ces objets et leurs représentations pour revenir à la fin sur ces objets comme supports de validation.

La démarche proposée aux enseignants et formateurs part des situations proposées aux élèves et s'appuie sur les réactions des participants. Ces situations visent à :

1) Permettre à chacun, jeune ou adulte, de *s'investir* dans l'activité quels que soient ses savoirs.

2) Lui permettre de *formuler* des hypothèses, de *choisir* un plan d'action, de le mettre *en œuvre* et de *confronter*, au sein du groupe, les différentes démarches.

3) Permettre, collectivement, de *valider* les différentes démarches.

4) Faire émerger, au sein du groupe, de *nouvelles connaissances* en balisant, en particulier, le champ de validité des connaissances antérieures.

Par ailleurs l'acquisition de savoir doit s'accompagner d'acquisition de savoir-faire. Là encore, trop de poids est donné, dans l'enseignement, à l'acquisition de connaissances mathématiques au détriment de l'*activité mathématique* (Qu'en reste-t-il en fin de scolarité ?).

Du point de vue didactique les travaux de recherche ont permis de dégager un certain nombre de variables didactiques relevées et étudiées par Guy Brousseau (la taille des objets) et Janos Baracs (la forme, les mesures des objets).

La taille avec :

La **micro-géométrie** de la feuille de papier, de l'écran, de ce que l'on peut poser sur la table.

La **méso-géométrie** de ce qui peut être contenu dans une pièce ou parcouru du regard.

La **macro-géométrie** ("large-skile") du déplacement dans une ville, dans un navire, dans un musée (plans-cartes...).

On peut citer aussi la **géo-métrie** qui concerne le globe terrestre avec une nouvelle géométrie, celle de la sphère avec les problèmes de plus court chemin sur la Terre ou de cartographie (cf. Plot n° 38) et encore la **"cosmo-géométrie"** qui concerne les géométries non-euclidiennes comme celles de l'univers.

La forme et la mesure avec :

Les aspects qualitatifs

- Propriétés topologiques (notion de forme-graphe...)
- Propriétés projectives
- Propriétés affines

Les aspects quantitatifs

- Rapports, proportions, échelles
- Mesures, combinatoire
- Repérage par les coordonnées.

Processus de conceptualisation (d'après Janos Baracs)

De la réalité des objets ——— ↙ aux ↘ ——→ Représentations de classes d'objets

aux ↓   aux ↓

des actions sur ces objets ——— aux ——→ Opérations mentales sur les classes d'objets

↙ ↘

Aspects qualitatifs

Propriétés topologiques
projectives
affines
métriques

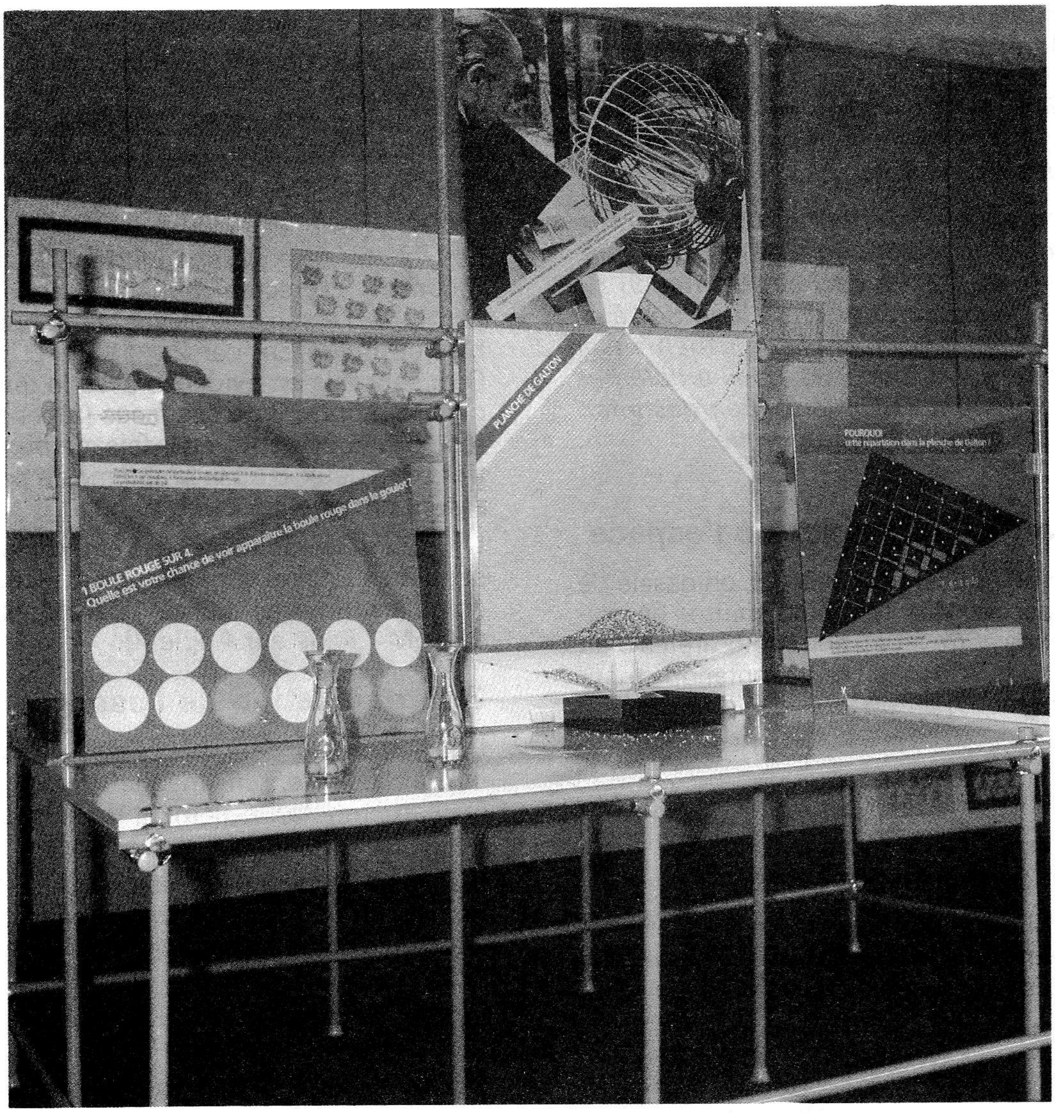
Aspects quantitatifs

Propriétés en terme de rapports,
proportions
mesures
coordonnées

des CPPN aux 18-25 ans

L'ESPACE VU PAR DES BAS NIVEAUX DE QUALIFICATION

L'outil qui est proposé ici permet de repérer et de faire repérer par des stagiaires leurs capacités à percevoir les relations entre des objets de l'espace et leurs représentations.



Il s'agit de "positionner les connaissances" d'un groupe de stagiaires de 18 à 25 ans, filles et garçons en stage pour un an à La Villette pour une formation à la maintenance d'exposition.

Le positionnement s'effectue par groupe de 3 ou 4 personnes ce qui permet la discussion et l'argumentation.

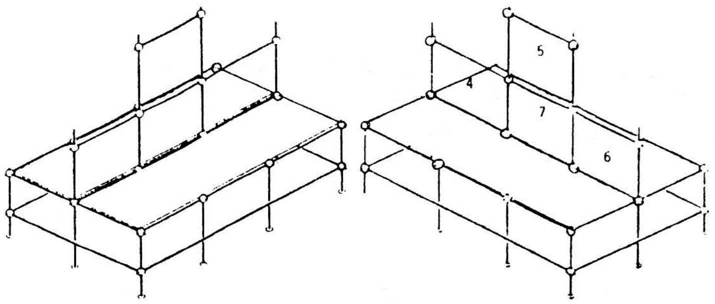
Pour des raisons d'économie de moyens et de temps nous n'abordons que certains domaines de l'espace.

Par ailleurs, ce positionnement s'inscrit dans une dynamique d'apprentissage. Il ne doit pas être considéré comme une photographie des savoirs des formés mais plutôt comme la première image d'une suite de séquences d'apprentissage.

1. Lectures de dessins perspectifs :

Le groupe de recherche ayant travaillé sur les expositions "Horizons Mathématiques" a choisi comme exemple concret : Comment remonter un kiosque de l'exposition ?

Le positionnement s'effectue par groupe de 3 ou 4 personnes ce qui permet la discussion et l'argumentation.



recto *verso*

On leur présente le dessin en perspective d'un kiosque de l'exposition et on leur demande de le décrire : Comment est-il fait ? De quoi est-il fait ? Quels sont les différents éléments qui constituent le kiosque ? Après une première discussion sur les différents éléments, une question précise est posée : Combien y a-t-il de barres de taille moyenne (sachant qu'il y a 3 types de barres, des petites, des grandes et... des moyennes).

La nécessité de dénombrer permet de faire formuler les procédures de lecture du dessin, les problèmes posés par les parties cachées, la notion de devant-derrière, la difficulté qu'ont les formés à se fixer un point de départ significatif et à le mémoriser plus de 5 secondes. On touche là, deux problèmes liés : le dénombrement et l'organisation des informations dans un contexte géométrique.

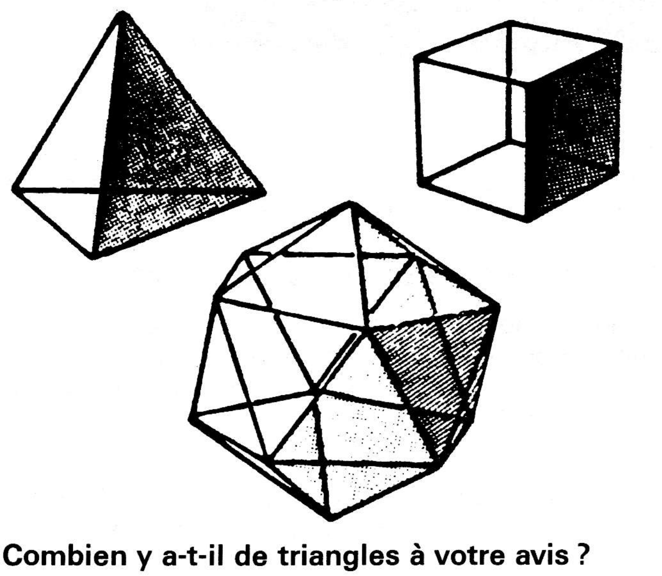
2. Structuration d'un objet de l'espace

A travers l'activité qui est proposée ici, on essaie de repérer les capacités des formés à mettre en évidence les relations entre faces, sommets, arêtes d'un objet représenté de 3 façons : représentations mentales, représentation par un objet, représentation sur écran.

a) l'objet concret

Un cube, ça a combien de faces ?
Question posée sans présenter l'objet.

Voici un objet (il s'agit d'un icosaèdre régulier) réalisé avec des triangles en carton (attachés les uns aux autres par des élastiques). (Toujours le Plot matériel !).



Combien y a-t-il de triangles à votre avis ?

1re phase :
L'objet est montré mais n'est pas donné.
Formulation d'hypothèse : entre 15 et 30 faces.

2e phase :
Vérifiez vos réponses.

On donne l'objet avec une contrainte donnée si besoin est : n'écrivez pas dessus (pour éviter le comptage). Les hypothèses s'affinent : entre 16 et... 19 en général.

La difficulté, pour les formés, est de considérer l'objet comme la réunion, le groupement d'objets plus simples.

b) l'objet sur écran

Présentation de polyèdres sur écran (faces arrières cachées).
Voici un autre polyèdre. Combien a-t-il de faces ?
On fait tourner le polyèdre sur lui-même suivant les axes X, Y ou Z et on présente dans l'ordre le cube, l'icosaèdre, le dodécaèdre, l'octaèdre et le tétraèdre.

Les quatre premiers apportent, en général, des réponses correctes qui font apparaître "l'effet miroir" de l'écran : les élèves comptent les faces visibles et multiplient par 2.
Ceci sera mis en évidence avec le tétraèdre qui, au départ, montre 3 de ses faces (réponse des stagiaires : 6 en tout) et qui, en le faisant tourner, n'en montrera que deux, d'où le problème de percevoir l'objet autrement que par effet miroir.

Un outil de vérification peut être donné à la fin de la séquence : faire apparaître les faces cachées en pointillés (logiciel utilisé "polyèdres" - CNAM - CREEM - Paris sur Apple II).

3. Organisation de l'espace

Une activité qui peut être réalisée en situation réelle ou, à l'échelle, en maquette avec du matériel Nathan : monter réellement un kiosque de l'exposition avec le matériel à disposition.

Bien que cette activité soit longue (1 heure minimum) elle a l'avantage d'être concrète et de faire intervenir deux types d'interactions entre variables didactiques :

- passage micro — méso-géométrie
- passage représentation — objet

D'autres éléments sont également révélateur de la prégnance de la symétrie sur d'autres transformations :

- La symétrie est très fortement présente sur le dessin.
- Pour construire le kiosque c'est l'aspect translation qui est, en fait, à utiliser en premier sinon le kiosque est difficile à monter et de toute façon tordu !
- Un troisième élément est aussi mis en évidence : la symétrie d'ordre 3 des rotules.

Par ailleurs le montage du kiosque, avec panneaux et tables demande une organisation, un algorithme de montage qui peut être étudié en fin de séquence (aspect organisation des données).

Même d'éminents directeurs d'Irem s'y sont faits prendre lors du montage de l'exposition "Horizons mathématiques"!!!

L'ESPACE VU PAR DES PROFS EN FORMATION

Les activités proposées ici visent :

- à mettre en interaction trois types de représentations :

- *les représentations mentales*
- *les représentations par dessin*
- *la visualisation de l'objet ou d'une maquette.*

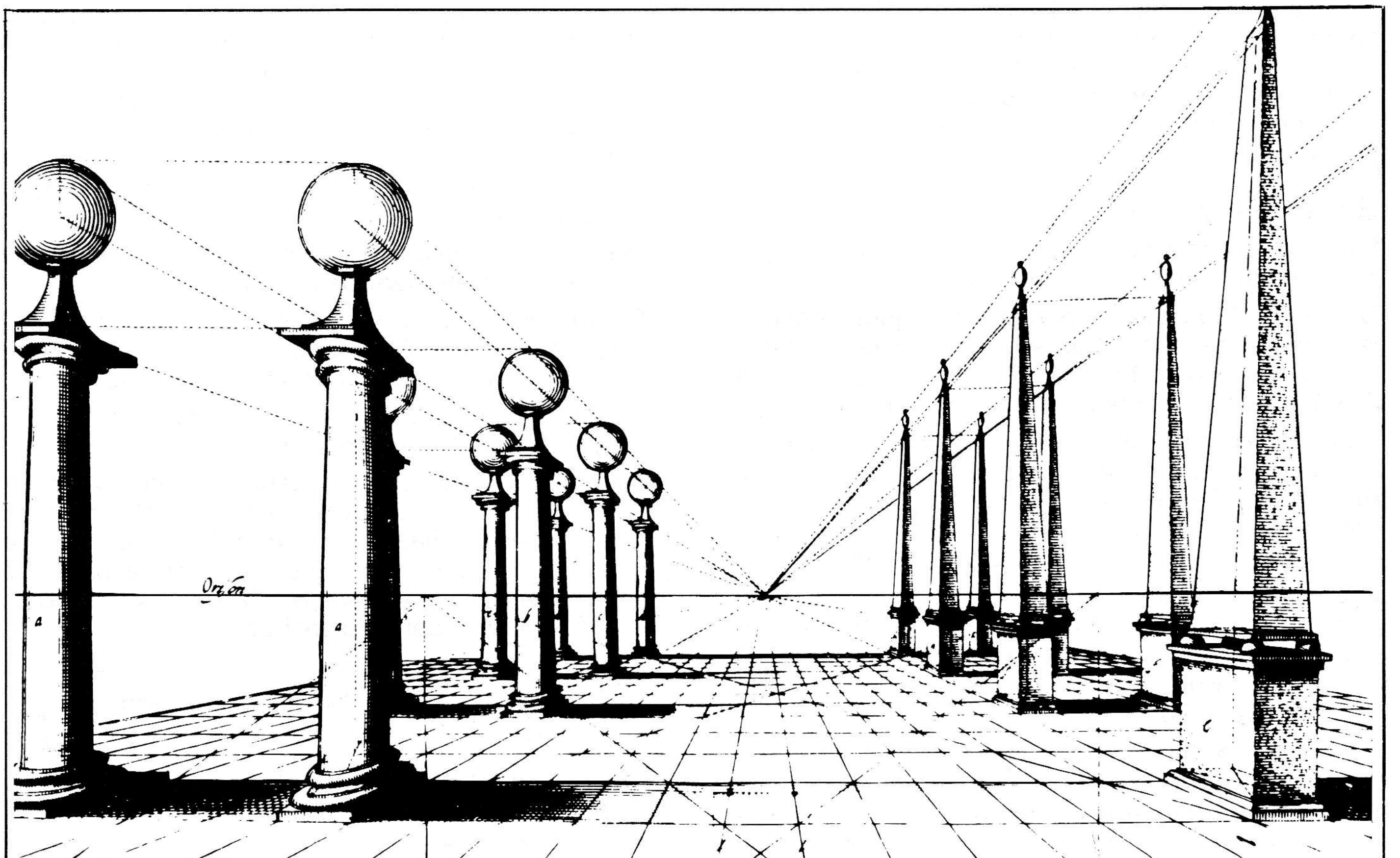
- à lier le problème aux outils techniques qui doivent être utilisés pour réaliser l'objet.

On peut ainsi demander aux stagiaires de réaliser des polyèdres simples, cubes, tétraèdres... en utilisant :

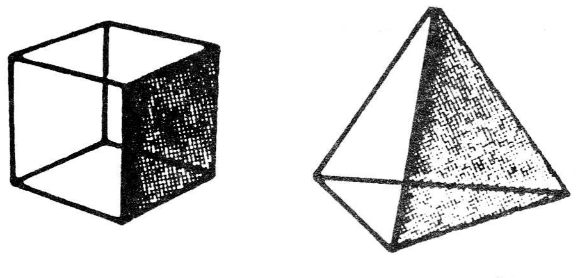
- *des faces cartonnées assemblées par collage, scotchage ou élastique (cf. matériels polyèdres du PLOT)*
- *des patrons à réaliser et à coller (matériel IREM d'Orléans),*
- *des tubes-arêtes à associer à l'aide de nœuds en plastique ou par du fil ou de la gomme à macher;*
- *des plaques de plexiglas ou de bois.*

Chaque matériau et chaque matériel va poser un problème technique particulier qui va prolonger l'étude et faire apparaître des caractéristiques supplémentaires de l'objet.

Ceci est particulièrement évident avec la découpe d'objets dans du polystyrène avec un fili-coupeur (matériel de l'IREM de Clermont-Ferrand).



CONSTRUIRE DES POLYEDRES



Publics :
Elèves, adultes ou... enseignants.

La consigne :
Construire, par groupe de 3 à 5 personnes, tous les polyèdres réguliers convexes.

L'objectif :
Comment s'assurer qu'on les a tous trouvés ?

Le matériel :
Des triangles, carrés, pentagones et hexagones réguliers en carton à assembler avec des élastiques (matériel diffusé par le PLOT-pochette n° 1).

1) Déroulement :

D'abord retrouver une *définition* correcte de "polyèdre régulier convexe". (cf. Dossier "Polyèdres dans l'espace du PLOT, page 10).
Polyèdre convexe fait de polygones réguliers tous isométriques deux à deux et, de plus, où tous les sommets sont identiques.
Cette dernière propriété apparaîtra lorsque les participants construiront des doubles tétraèdres ou autres deltaèdres.

La construction

Apparaissent rapidement le tétraèdre et le cube bien connus. Le dodécaèdre apparaît aussi et, plus difficilement, l'octaèdre et plus encore l'icosaèdre. On cherche aussi à construire des polyèdres avec des hexagones ! En laissant faire, on reste à plat ou, si l'on force pour fermer, on "gauchit" les faces.

Synthèse et preuve

Synthèse et preuve qu'*ils ne sont que 5.* On fait apparaître les propriétés et le codage - sommet.

On peut ici (pour la culture mathématique), parler de la dualité entre cube et octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre. Parler de la formule d'Euler-Poincaré F + S = A + 2 (et de l'histoire de sa "démonstration").

Mais l'objectif est la preuve qu'ils sont 5 ! L'invariance des sommets pour chaque polyédre a déjà été remarquée. De plus, autour d'un sommet on a pu mettre 3 (c'est le minimum), 4 et même 5 *triangles* pour obtenir le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre.

Peut-on en mettre plus ? Réponse non, car avec 6 triangles on n'obtient pas un angle solide mais un plat 6 x 60° = 360° et avec plus de 6 triangles on perd la convexité.

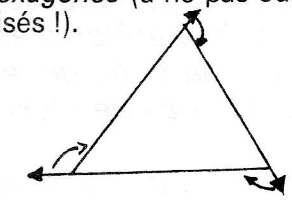
Et avec *les carrés !* Même chose, avec 3 carrés autour d'un sommet on obtient le cube et avec 4 on "retombe" à plat, 4 x 90° = 360°.

Et avec les *pentagones ?* Idem. Avec 3 c'est le dodécaèdre, et avec 4 ? On obtient plus de 360° !
Sûr ? Quel est l'angle au sommet d'un pentagone ?
La réponse est ici le plus souvent 72° pour l'angle au sommet. Intéressant car 72° x 4 = 288° qui est inférieur à 360° ! Alors on en aurait oublié un ? On vérifie que 4 pentagones partant d'un même sommet ça gauchit fortement.
Alors ? C'est pas 72° ? Oui, mais alors, c'est combien ? Et comment trouver d'une façon générale l'angle au sommet d'un polygone régulier à n sommets ?

Diverses méthodes sont proposées qui sont correctes. On pourra introduire ici la méthode de la Tortue (Langage Logo) qui conduit au théorème du trajet total. Cela consiste à répéter la suite des instructions :
AVance, tourne à DRoite de x degrés, qui permet de tracer la figure en faisant un tour complet sur soi-même d'où l'angle supplémentaire de l'angle cherché : $\frac{360°}{n}$ et d'où l'angle cherché (ici $180° - \frac{360°}{S}$).

Et pour finir, retour aux pentagones : 180° − 72° = 108° et 4 x 108° = 432° qui est supérieur à 360° (ouf !);

Reste les *hexagones* (à ne pas oublier, surtout s'ils ont été utilisés !).



Pas de problèmes : 3 x 120° = 360° d'où le pavage plan. Et, au-dessus, l'angle au sommet sera supérieur à 120° donc pas de polyèdres convexes réguliers avec des n-gones pour $n \geqslant 6$.

Cette activité, bien qu'un peu longue, permet surtout de structurer quelques objets de l'espace, mais aussi de construire, pour bien des jeunes et des moins jeunes, et parfois pour la 1re fois, les 5 polyèdres réguliers.

La construction, le dénombrement des sommets et des arêtes, la régularité des sommets permettent cette structuration. On remarque aussi que l'octaèdre est constitué de 2 pyramides, l'icosaèdre de 2 pyramides collées sur un antiprisme à bases pentagonales et le dodécaèdre fait de deux parties isométriques légèrement (à préciser) tournées l'une par rapport à l'autre.

Elle permet aussi, ce qui n'est pas négligeable, de reparler concrètement des angles.

Elle permettra, surtout pour les autres activités dans l'espace, de partir d'objets concrets comme le tétraèdre ou le cube en en ayant déjà manipulés.

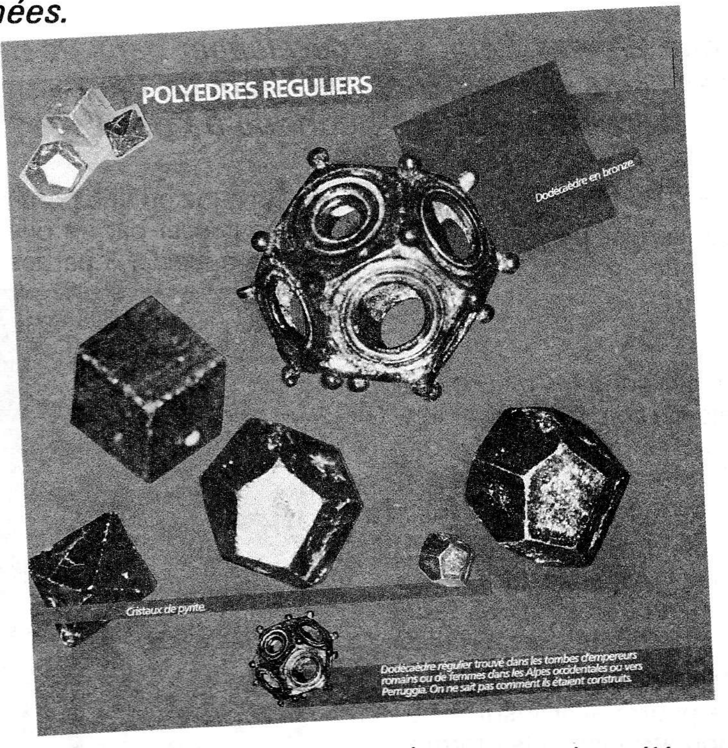
Combien d'enseignants ont déjà construits ou découpés les cinq polyèdres réguliers ?

Remarque : Cette activité, peut être faite avec d'autres règles pour ceux qui connaissent déjà bien les cinq solides de Platon. Par exemple, en demandant d'essayer de construire des polyèdres à partir de codes-sommets (4,4,4) (5,5,5) ou (4,6,6) ou... (4,5,6) ou de graphes planaires.

	Faces	Nombre	Sommets	Arêtes	Code-sommet
Tétraèdre régulier	triangles	4	4	6	3-3-3
Cube	carrés	6	8	12	4-4-4
Octaèdre régulier	triangles	8	6	12	3-3-3-3
Dodécaèdre (régulier)	pentagones	12	20	30	5-5-5
Isocaèdre (régulier)	triangles	20	12	30	3-3-3-3-3

SYMETRIES DES POLYEDRES

Là encore, une activité qui demande peu de matériel mais qui commence à faire faire aux participants la navette entre l'objet concret et ses représentations mentales ou dessinées.



Consigne :
Dresser la liste des isométries qui "conservent" le tétraèdre régulier, le cube.

L'objectif :
Une autre façon de voir les objets de l'espace, par leurs invariants. Une occasion de parler d'angles de l'espace et de mesures.

Le matériel :
Des tétraèdres et des cubes fabriqués précédemment.

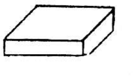
Le déroulement pour le tétraèdre :
Une recherche exhaustive de toutes les rotations et symétries-plans permet de trouver 18 isométries que l'on peut décrire directement. Ce dénombrement se fait en utilisant le nombre de sommets, d'arêtes et faces du polyèdre. Restent six isométries à trouver pour obtenir les $24 = 4\,!$ permutations des quatre sommets. Elles s'obtiennent en composant chacune des six symétries planes avec une rotation.

Idem pour le cube où l'on obtient 48 isométries dont 24 rotations et 24 antidéplacements.

Ce travail permet en particulier de définir des angles de l'espace. Les moins évidents étant les angles de rotation du cube d'axes passant par les sommets diamétralement opposés. Il permet une fois encore de structurer les objets de l'espace, le repérage des isométries n'étant pas toujours immédiat.

Prolongement :
Il consistera à renverser la consigne : partir d'un groupe d'isométries et rechercher une figure plane ou de l'espace qui lui corresponde. Par exemple, trouver une figure correspondant à un groupe d'invariants ayant deux éléments, trois éléments, quatre éléments (groupe de Klein et groupe cyclique), huit éléments. On aura là une autre façon de structurer les objets du plan et de l'espace.

D'où le tableau à compléter :

Groupe à	Dans le plan	Dans l'espace
2 éléments	?	?
3 éléments	?	?
4 éléments (groupe de Klein)	?	?
4 éléments (groupe cyclique)	?	?
X éléments	□ Le carré	??
Y éléments (le groupe du matelas)	??	

et inversement, pour les quadrilatères, les hexaèdres, quels sont les différents groupes de symétrie ?

On sera ici conduit à dresser la liste des différents types de quadrilatères, d'hexaèdres en fonction de leurs "symétries", c'est-à-dire des isométries qui les laissent invariants.

On travaille ici sur les représentations de classes d'objets et sur les actions sur ces classes d'objets.

(Il y a sept types d'hexaèdres - cf. dossier PLOT "polyèdres dans l'espace" éd. 87).

ACTIVITES DE DECOUPE ET PROBLEMES-CHOCS !

Une activité que Charles Pérol a su développer dans de nombreux pays (cf. les fascicules "filicoupeurs" de l'Irem de Clermont-Ferrand). Ici, de la pollution théorique à l'objet réel !

On montre le fonctionnement du filicoupeur.

On distribue une boule irrégulière de polystyrène par groupe et on demande à chaque groupe :

de construire :

1) un tétraèdre régulier
2) un tétraèdre dont les 4 faces sont des triangles ni isocèles ni équilatéraux mais qui sont tous les 4 identiques (on dit scalènes et isométriques),
3) l'objet constitué d'un tétraèdre régulier et de son symétrique par rapport au centre de gravité.

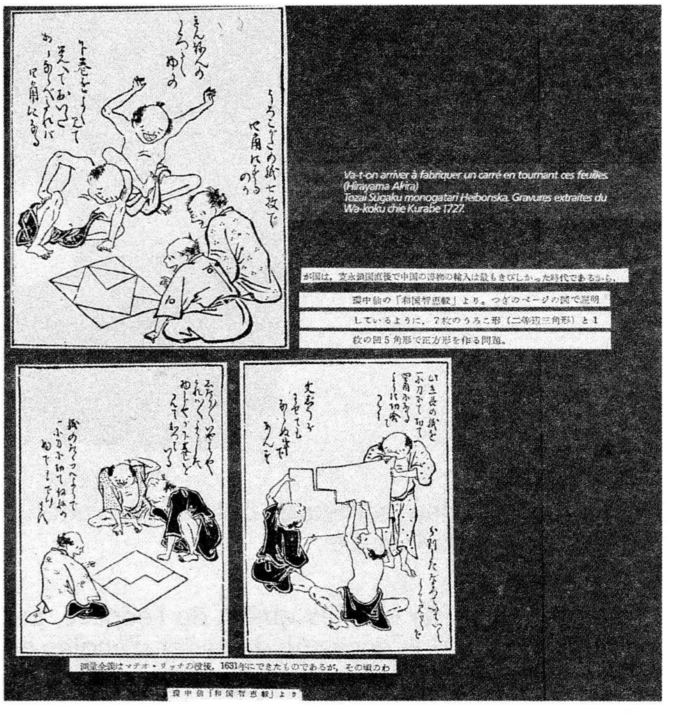
Chacune de ces constructions présentent des problèmes qui vont mettre en jeu la capacité des formés à utiliser l'outil technologique et à trouver des solutions mettant en relation les propriétés, les régularités de l'objet et les possibilités de l'outil.

La résolution du problème pourra aller jusqu'à nécessiter des calculs trigonométriques si les formés peuvent les mettre en œuvre.

Là encore chacun verra le saut qu'il y a entre la solution sur papier et la solution découpée.

de couper

- un tétraèdre régulier en 2 parties isométriques sans passer par un plan de symétrie ! ■
- un cube ou une pomme en 2 parties isométriques sans passer par un plan de symétrie,
- idem avec... 3 parties isométriques !! etc.



Va-t-on arriver à fabriquer un carré en tournant ces feuilles. (Hirayama Akira) Tozai Sūgaku monogatari Heibonska. Gravures extraites du Wa-koku chie Kurabe 1727.

MATHS EN CROIX

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I									■
II				■					
III						■			
IV				■					■
V			■						
VI			■			■			
VII	■								
VIII					■				

DEFINITIONS

Horizontalement

I - Type d'équation différentielle.
II - Elément naturel - Non acquis.
III - De droite à gauche : peut qualifier un mathématicien à l'âge respectable - Au centre du sinus.
IV - Démonstratif - Type de connexité.
V - Communes à Hahn et à Hardy - Parallèles... en architecture.
VI - Voyelles de Bolyai - Conjonction logique - De droite à gauche : permet de définir une relation.
VII - Préparera peut-être un examen.
VIII - Tel un plan par une droite, par exemple - A la forme d'une lettre.

Verticalement

1. S'est préoccupé d'existence et d'unicité d'équations différentielles.
2. Qualifie certaines équations différentielles.
3. Unités - Préposition.
4. Vigueur, mathématique ou non.
5. Type d'équations différentielles.
6. Unité de temps - Lettre double de Serret - Pronom.
7. Problèmes qui se posent pour les solutions d'équations différentielles.
8. Eléments de produits tensoriels.
9. Appris - Base à réordonner.

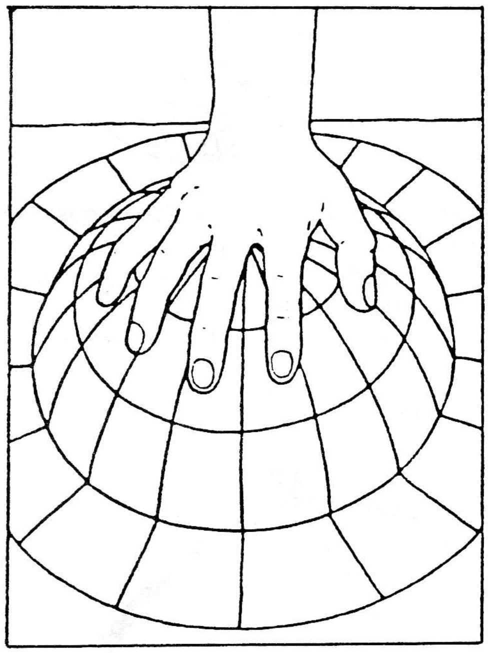
R. LABROUSSE - Limoges

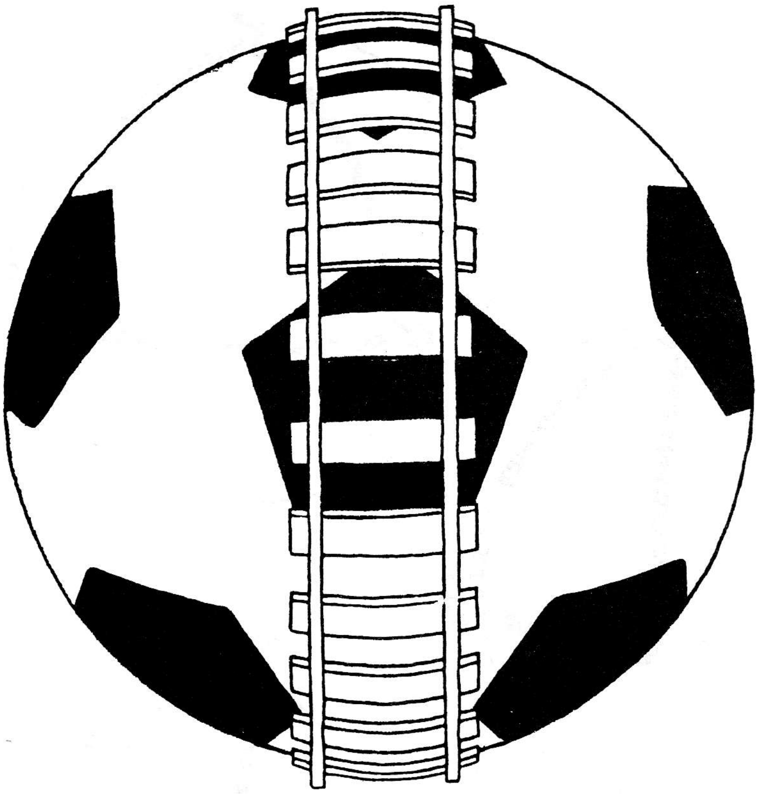
SECONDE

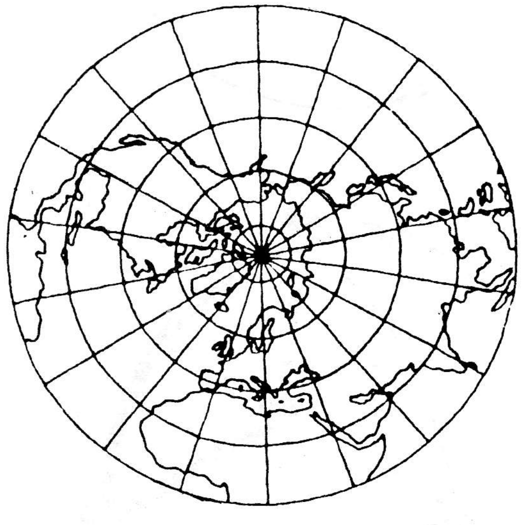
GEOMETRIE DE LA SPHERE

TOUT DEPEND DE LA HAUTEUR A LAQUELLE ON SE PLACE

Les axiomes d'Euclide et propriétés de la géométrie euclidienne sont, en partie, remis en cause sur la sphère. Il n'est pour s'en convaincre que d'essayer d'aplatir une peau d'orange. De nombreuses activités peuvent être proposées pour remettre en cause les savoirs de la géométrie euclidienne de la feuille de papier. En voici quelques-unes.







D'abord la NOTION DE DISTANCE

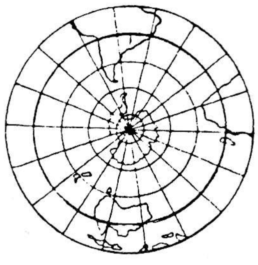
Observez un globe terrestre : repérez Paris, Montréal.
Quelle est la courbe de plus petite distance reliant Paris à Montréal ?

Toute courbe de plus courte distance joignant deux points a, comme support, une géodésique qui, pour la sphère, est un GRAND CERCLE.

Ainsi un triangle sphérique a pour côtés des arcs de grands cercles. Qu'est-ce que deux "droites" parallèles sur une sphère ?

Problème-choc

Un ours part du pôle et parcourt x kilomètres droit devant lui, il tourne de 90° à droite et parcourt à nouveau x km droit devant lui, tourne encore de 90° à droite parcourt encore x km droit devant lui et se retrouve... à son point de départ ! L'ours est-il blanc ou brun ?



Combien y a-t-il de points de départ possible ?

Vous trouverez trois familles de points :
- Ceux qui réalisent effectivement un triangle sphérique ayant 3... angles droits.
- Ceux qui sont à une distance de x km d'un parallèle faisant lui-même x km.
- Ceux qui sont à une distance de x km d'un parallèle faisant x/n km, n entier.

"Activité choc :"

Angles et aires de triangles sur une sphère

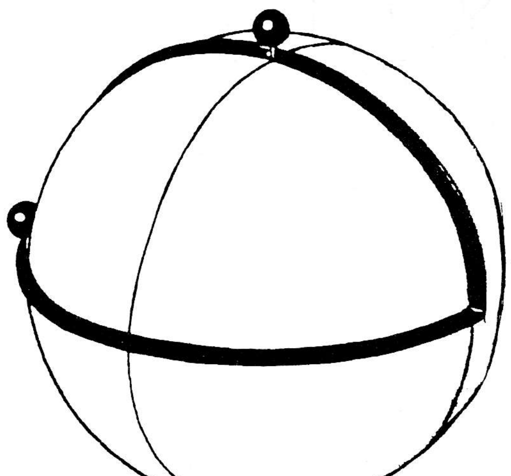
Matériel :
- On distribue des sphères en plastique (boules de pétanque vides) ou en polystyrène.
- Des élastiques qui matérialiseront les "droites".
- Des punaises à têtes coniques ou sphériques qui seront les points.

1re activité :
Une droite partage un plan en deux régions. Il en est de même d'une "droite" (grand cercle) sur une sphère. Multipliez les droites. Quel est le nombre maximum de régions qu'elles déterminent ? (On verra apparaître deux suites différentes).

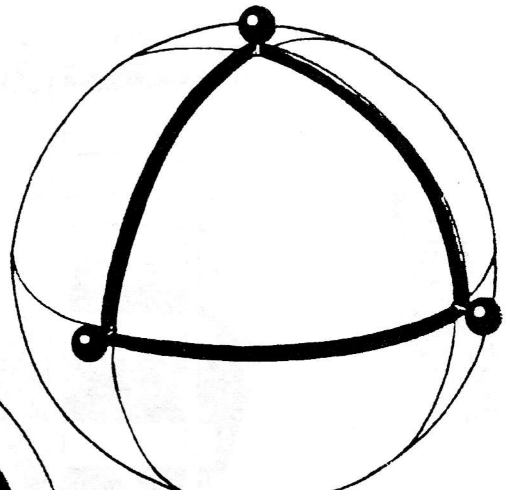
2e activité :
Tracez un triangle équilatéral ayant 3 angles droits. Peut-on recouvrir la sphère avec de tels triangles ? Combien en faut-il ?

Composez la somme des angles et l'aire d'autres triangles sphériques pouvant recouvrir la sphère par reproduction (On remarquera que $(\Sigma\alpha - \pi) \times n = 4\pi R^2$, n étant le nombre de triangles et R le rayon de la sphère).

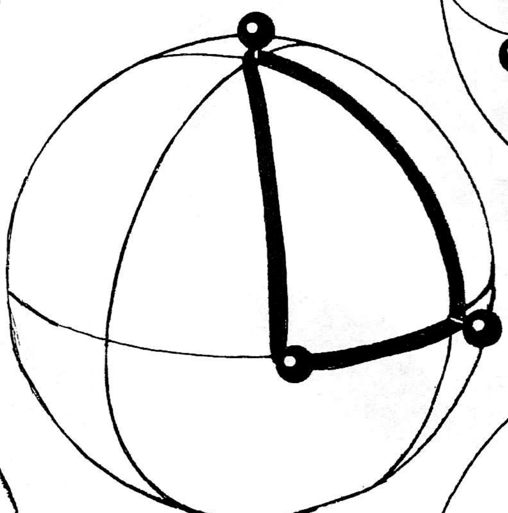
Une démonstration générale peut être donnée reliant l'aire du triangle et la somme des angles (mesurés en radian) : $a = \Sigma\alpha - \pi$. (la sphère ayant pour aire 1, l'unité).



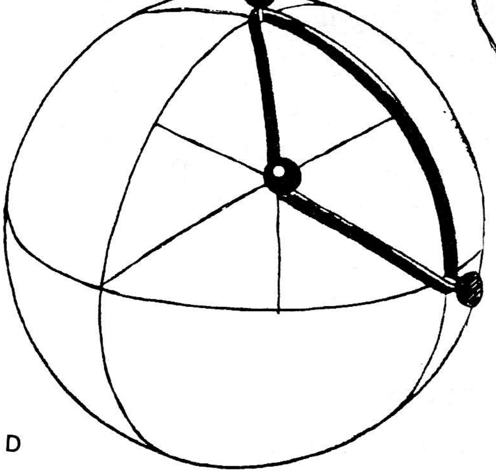
A



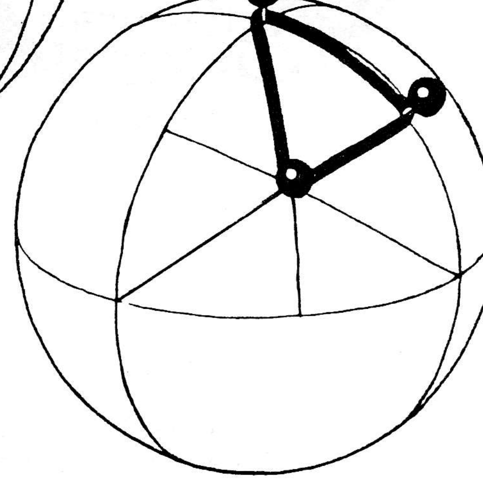
B



C



D



E

Nombre de triangles isométriques	2	4	8	16	24	48	...
α, β, γ							
$\Sigma\alpha$							
$\Sigma\alpha - \pi$							
Cas général							

Pour la sphère d'aire l'unité, les angles étant mesurés en radian :

$\text{aire } (\mathrm{I} + \mathrm{II}) = 2\,\hat{A}$
$\text{aire } (\mathrm{I} + \mathrm{III}) = 2\,\hat{B}$
$\text{aire } (\mathrm{I} + \mathrm{IV}) = 2\,\hat{C}$

$\text{aire } (3.\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}) = 2\,(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$

par symétrie II = II' donc

$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = \mathrm{I} + \mathrm{II}' + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = 2.\pi\,(4\pi/2)$

d'où

$\text{aire } (2.\mathrm{I}) + 2\pi = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$

donc

$\text{aire } (ABC) = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi$

Problème de courbure

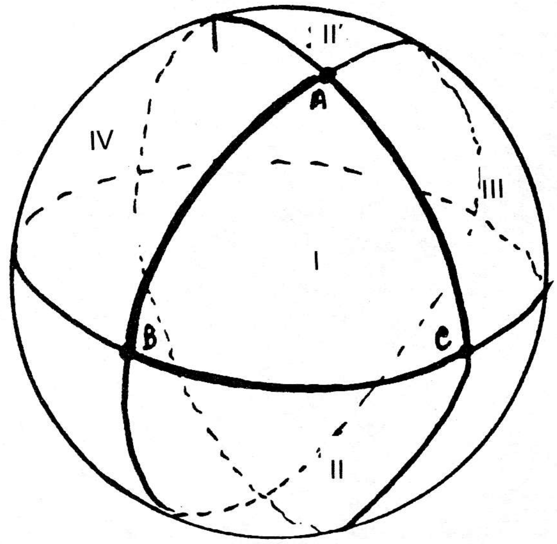
Bibliographie :

• Mosaïque Mathématique. Article de Berger sur la courbure (voir bon de commande).

• J. P. Petit : le géométricon . B.D. de chez Belin.

- La différence entre le plan et la sphère est due aux courbures différentes des deux surfaces :

• la courbure du plan est nulle, comme tout ce qui peut être aplati sans plissage ni déchirure (ainsi les surfaces réglées développables) ;



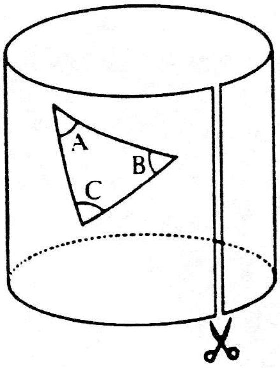
• la courbure de la sphère est positive.

La courbure se définit en tout point d'une surface, s'il existe un voisinage du point où tout triangle contenant le point vérifie :

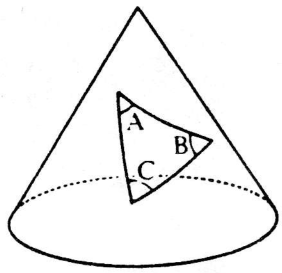
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 0$, la courbure en ce point est nulle, elle est positive si cette expression est positive, et négative si $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi < 0$. ■

Trouvez le signe de la courbure en tout point :

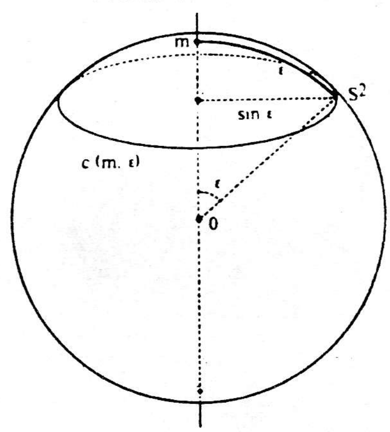
d'un cylindre



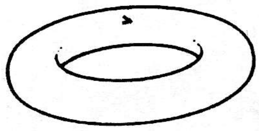
d'un cône



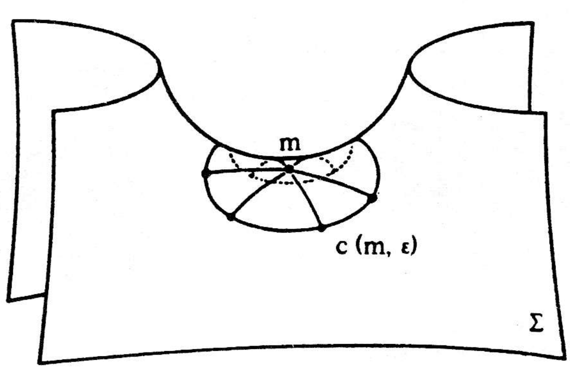
d'une calotte sphérique, à l'extérieur, à l'intérieur !

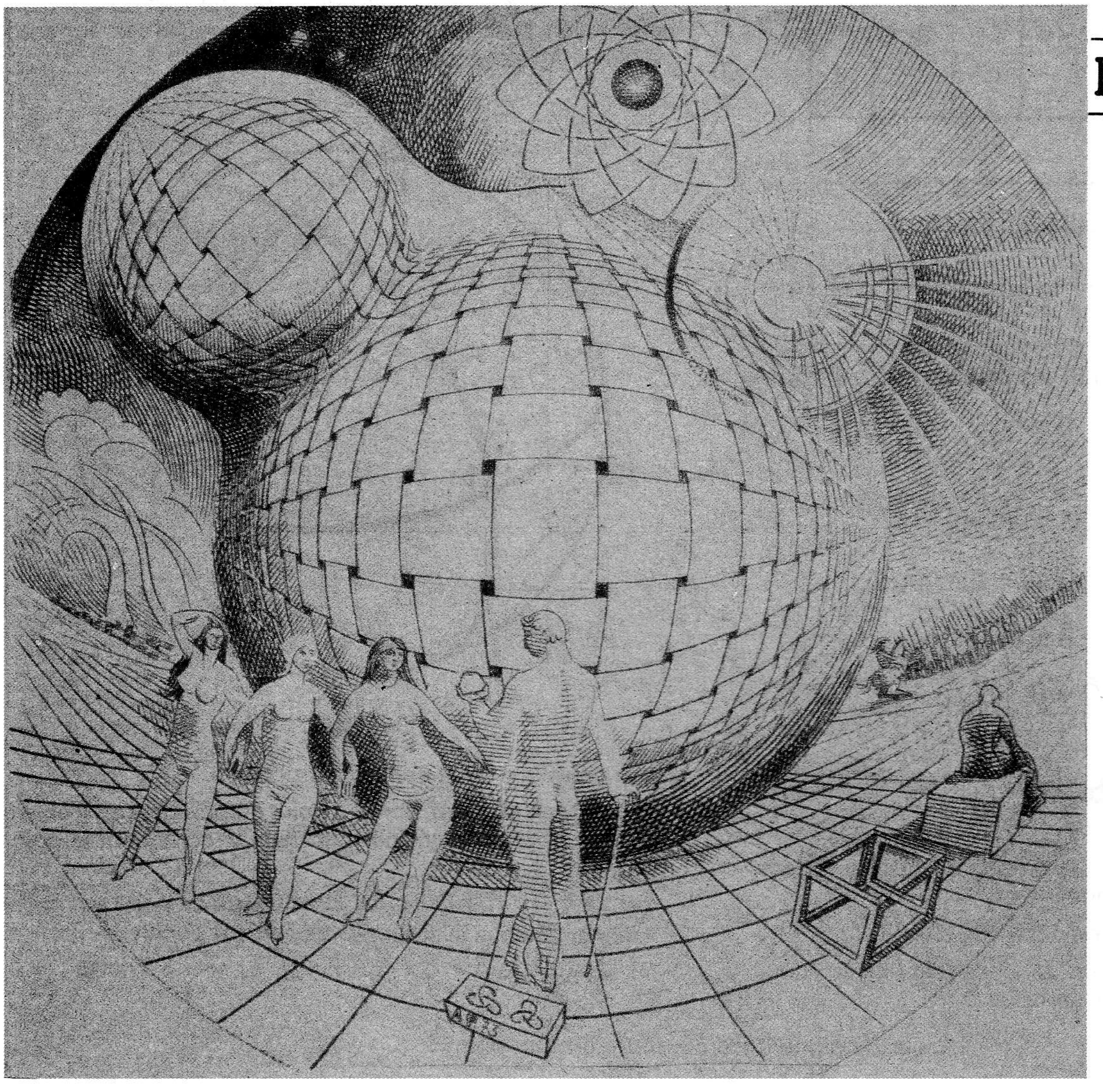


d'un tore

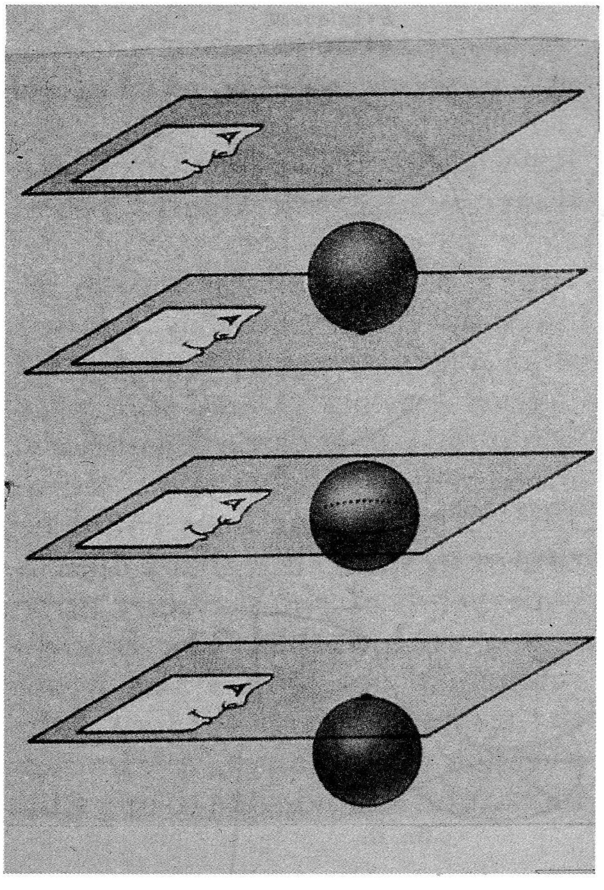


d'une selle de cheval, ou col entre deux montagnes

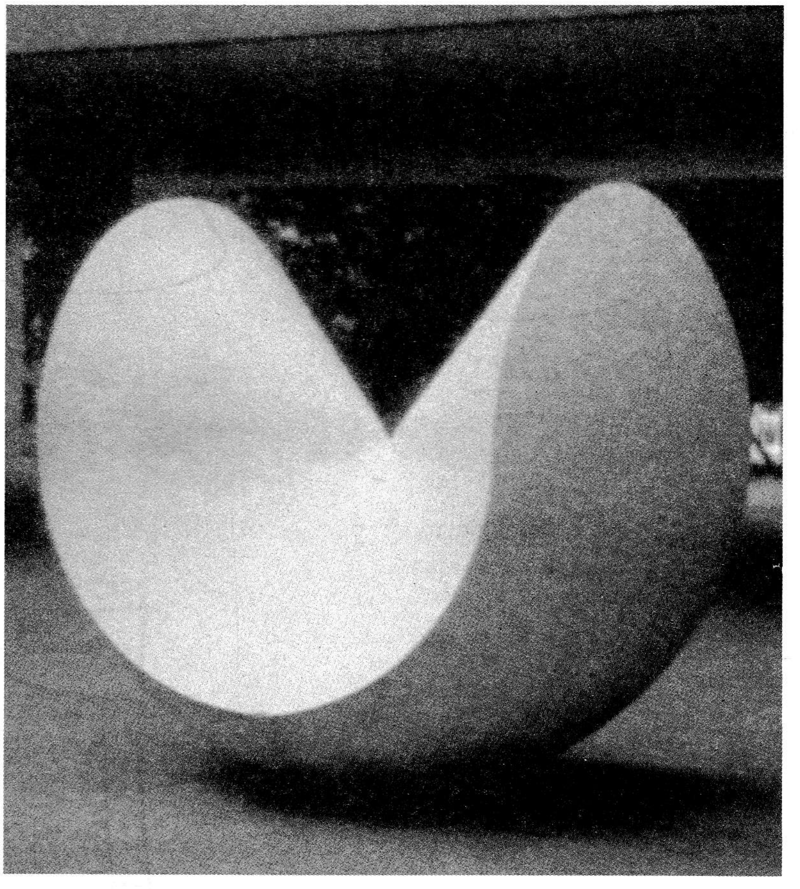




Sphère - Albert Flocon



Passage d'une sphère dans un monde de dimension 2



Découpe d'une sphère en 2 parties symétriques
A. Volton - 1968