CALCUL DES VARIATIONS ET BRACHYSTOCHRONE

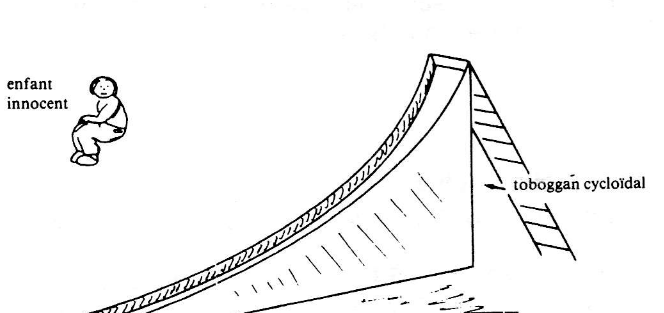
LES problèmes d'extrema ont une histoire qui remonte à la période grecque. Ainsi les problèmes isopérimétriques connus depuis l'Antiquité : de toutes les courbes simples et fermées de périmètre fixé, c'est le cercle qui a la plus grande aire. Euclide prouve, au III^eme siècle avant notre ère, ce résultat dans le cas des rectangles (cf. PLOT n° 33 - Décembre 85).

C'est Fermat, au XVII^e siècle, qui donne la traduction analytique de la méthode d'Euclide dans laquelle l'aire A est donnée par l'expression : $A(x) = x.(a - x)$, dans laquelle a désigne le demi-périmètre fixé de chaque rectangle. Il relie les points stationnaires de la courbe $(x, A(x))$ aux points qui ont une tangente horizontale, c'est-à-dire aux points où la dérivée est nulle : $A'(x) = 0$.

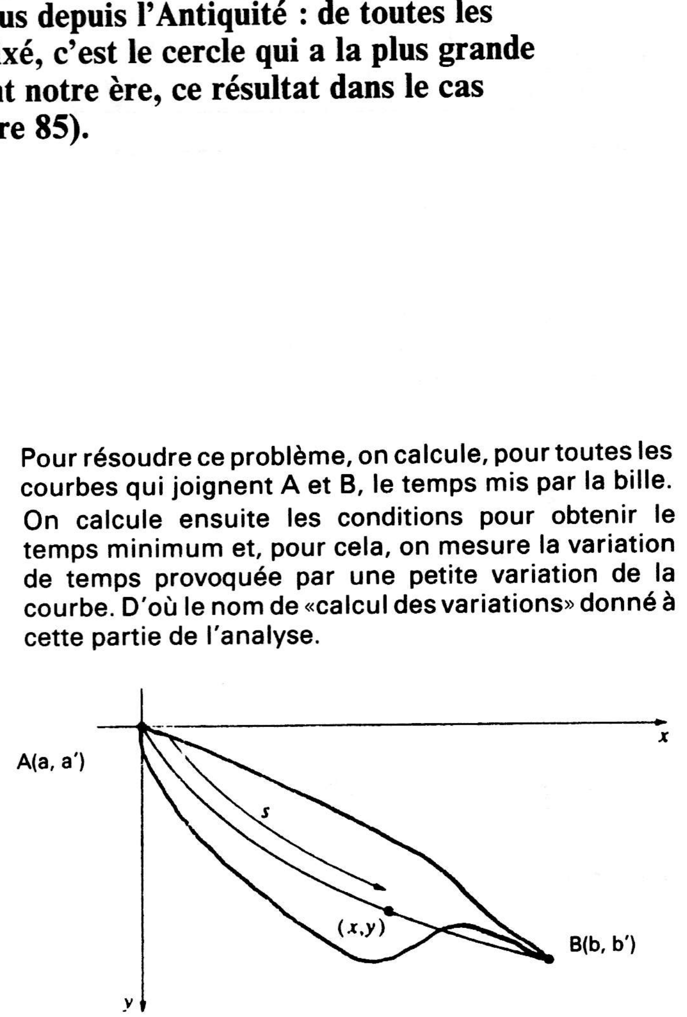
Euler, au XVIII^e siècle, formule le problème général d'extrema pour des fonctions données par des intégrales et déduit la condition analogue à $A'(x) = 0$. Ces équations appelées différentielles doivent être satisfaites par des solutions à des problèmes de «variations». L'artillerie analytique appliquée à ces problèmes est appelée «calcul des variations».

Pour rendre compréhensible l'important apport d'Euler, passons en revue des problèmes célèbres comme celui du brachystochrone, rendu célèbre par Bernouilli (Jean) en 1696 et qui donna naissance au calcul des variations :

quelle est la courbe qui permet à une bille de glisser le plus vite d'un point A (a, a') au point B (b, b') ?



Pour résoudre ce problème, on calcule, pour toutes les courbes qui joignent A et B, le temps mis par la bille. On calcule ensuite les conditions pour obtenir le temps minimum et, pour cela, on mesure la variation de temps provoquée par une petite variation de la courbe. D'où le nom de «calcul des variations» donné à cette partie de l'analyse.



Voici d'abord quelques problèmes voisins :

- pour trouver le plus court chemin joignant A à B, il suffit de trouver l'aire minimum sous la courbe, soit à trouver le minimum de l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$ avec les conditions $y(a) = a'$ et $y(b) = b'$

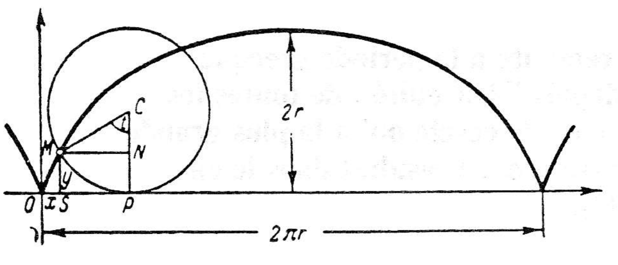
- pour trouver la courbe joignant A et B qui donne la surface, de révolution autour de l'axe des x, d'aire minimum il suffit de trouver le minimum de

$$\int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$ avec les mêmes conditions que ci-dessus.

- trouver enfin la courbe qui amène le plus vite en bas du toboggan revient à minimiser une intégrale. Vitesse instantanée v, temps t et distance parcourue sont liés par la relation $v = ds/dt$. La vitesse est donnée en fonction de la hauteur par $v = \sqrt{2gy}$, g étant bien sûr, l'accélération de la pesanteur.

Comme ds est égal à $\sqrt{(1 + y'^2)}dx$, le temps mis par la bille est donnée par l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2\,gy}}\,dx$$



Construction d'une cycloïde

La solution est un arc de cycloïde
Voyons encore d'autres problèmes du même genre :
- résoudre le problème des isopérimètres revient à «maximiser» l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_t^{t'} \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) dt$$

sous la condition :

$$\int_t^{t'} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

reste constante.

- trouver les géodésiques (courbes de plus courte distance) sur une surface $S(x, y, z) = 0$ revient à «minimiser» l'intégrale

$$\int_t^{t'} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Dans les trois premiers exemples, le problème consiste à trouver les valeurs stationnaires y de

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx = 0.$$

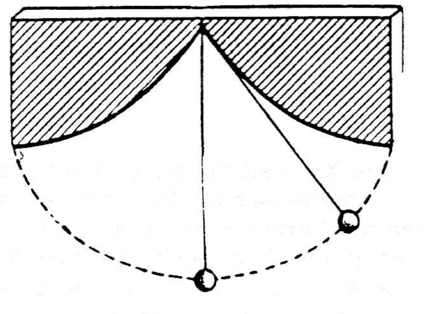
Il arrive que des fonctions y(x) satisfassent l'équation différentielle d'Euler :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(qui est analogue à la condition $d\,[g(x)]/dx = 0$, satisfaite par une solution x pour laquelle la fonction g a une valeur stationnaire).

Dans les autres exemples les valeurs stationnaires doivent satisfaire des changements appropriés de cette équation.

«Le calcul des variations a été l'une des branches majeures de l'analyse pendant plus de deux siècles. C'est un puissant outil qui peut être utilisé dans une grande variété de problèmes en mathématique pure. Il peut être aussi utilisé pour exprimer les principes de base de la physique mathématique dans les formes les plus simples et les plus élégantes.» (Simmons in Differential equations. MacGraw-Hill, 1972).


Pendule cycloïdal

L'analyse mathématique est le domaine du calcul de limite et de l'approximation. Elle est issue du calcul infinitésimal qui permet l'étude des phénomènes en évolution et leur traduction en lois physiques.

Né du travail de Newton et Leibniz au XVII^{eme} siècle, le calcul infinitésimal sera développé au XVIII^{eme}, par Euler et Lagrange, pour décrire les phénomènes physiques.
Au XIX^{eme}, ce sera le développement des équations aux dérivées partielles (propagation de la lumière, des ondes électromagnétiques, de la chaleur, ...).

Ces méthodes d'approximations, utilisées dans des espaces de dimension infinie (espaces de Hilbert) sont actuellement utilisées, par exemple, dans le contrôle des phénomènes instables. M.D.

■

Petite bibliographie :

- Petite encyclopédie des Maths - Didier ed. 1980 p. 761.
- Bulletin APM n° 353. Avril 86 - Page 248 à 252 (Tonton Lulu), ou «Comment réussir le triangle quelconque» Cedic - Belin 86.