PANORAMIQUES

Jacques LUBCZANSKI

SIXIEME lettre de l'alphabet grec, zeta (prononcer «dzeta») est le nom d'une fonction mathématique étudiée par Léonhard Euler au XVIII^e siècle...

...et qui, malgré les travaux acharnés de nombreux mathématiciens, ne nous a pas encore livré tous ses secrets !

La fonction ζ est définie par
$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{n^x} + ...$
lorsque cette somme infinie a un sens,
(c'est-à-dire lorsque la somme finie $\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + ... + \frac{1}{n^x}$
a une limite quand n tend vers l'infini).
L'objet de ce travail est l'étude d'une valeur approchée, puis de la valeur exacte de
$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - ... + \frac{1}{n^2} + ...$

A - ETUDE DE LA SUITE : $v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

1 - Soit f la fonction en escalier définie par :
$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [n, n+1[\ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{n^2}$
Dessiner la courbre représentative de f ; calculer
$\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

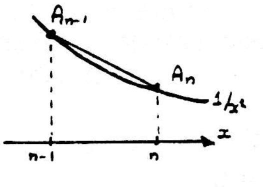
2 - Montrer que $\forall x > 1$, on a la double inégalité
$\frac{1}{(x-1)^2} > f(x) \geqslant \frac{1}{x^2}$
En déduire un encadrement de $\frac{1}{n^2}$ par deux intégrales.

3 - Etudier la convergence de la suite
pour $n \geqslant 1$: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$
que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

B - ENCADREMENTS DE ζ (2)

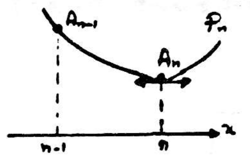
1 - Déduire de la question A 2 un encadrement de la somme $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + ... + \frac{1}{n^2}$
Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

2 - Soit An le point de coordonnées $(n, 1/n^2)$ et φ la fonction dont la restriction à l'intervalle $[n-1, n]$ est représentée par le segment de droite $[A_{n-1}, A_n]$.



Calculer $\int_{n-1}^{n} \varphi(x)\,dx$
Montrer qu'on a :
$\int_{10}^{n} \varphi(x)\,dx = v_n - v_{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
Comparer $\varphi(x)$ et $\frac{1}{x^2}$; minorer v_n, pour $n > 10$.
Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

3 - Soit Pn la parabole d'axe vertical, de sommet An, et passant par An-1 ; soit ψ la fonction dont la restriction à l'intervalle [n -1, n] est représentée par l'arc $\overline{An\text{-}1\ An}$ de la parabole Pn.



Calculer l'équation de Pn dans un repère d'origine An.

Calculer $\int_{n-1}^{n} \psi(x)\,dx$

Montrer que :

$$\int_{10}^{n} \psi(x)\,dx = V_n - V_{10} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Comparer $\psi(x)$ et $\frac{1}{x^2}$; majorer n, pour $n > 10$

Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

C. CALCUL DE LA VALEUR DE $\zeta(2)$

1 - Calculer, à l'aide d'intégration par parties, $\int_0^{\pi} x \cos(nx)\,dx$ et $\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$

En déduire qu on peut trouver a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{\pi} (ax^2 + bx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2}$$

2 - Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Montrer que, si on pose, pour $x \in]0, \pi]$,

$$g(x) = \frac{a x^x + bx}{2\sin\frac{x}{2}}$$

On a l'égalité :

$$V_n = \int_0^{\pi} g(x).\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (ax^2 + bx)\,dx$$

3 - Montrer que, si on pose $g(0) = b$, g est continue et dérivable sur $[0, \pi]$, et g' est continue.

En déduire que :

$$\int_0^{\pi} g(x).\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\left(b + \int_0^{\pi} g'(x).\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right).x\right]dx\right)$$

Quelle est la limite de cette expression quand n tend vers l'infini ?

En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

En 1736, dans le dixième volume des "Institutions du Calcul Différentiel", L. Euler calcule la valeur de la fonction ζ pour les entiers pairs :

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\,\Pi^{2n}}{(2n)!}|B_{2n}|$$

Dans cette formule, les nombres B_{2n} sont les "nombres de Bernouilli", introduits en 1713 par Jacob Bernouilli... ... pour calculer autre chose !

Ces nombres se calculent de proche en proche par la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k} B_k = 0$$

On trouve $B_0 = 1$; $B_1 = -\frac{1}{2}$; $B_2 = \frac{1}{6}$... puis tous les B_k avec k impair sont nuls...

Calculer des valeurs approchées de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$... avec la formule d'Euler.

Quant aux valeurs de ζ pour les entiers impairs... on ne connait toujours pas leurs valeurs !

Le résultat le plus récent (R. Apéry, 1978) dit seulement que $\zeta(3)$ est un irrationnel.

Les recherches sur la fonction ζ ont pris une autre direction : on peut définir $\zeta(x)$ pour x réel, $x > 1$ et aussi pour x complexe. Et on a pu mettre en évidence des liens étroits entre les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\zeta(z) = 0$ et la répartition des nombres premiers parmi les entiers !

Le problème le plus important dans ce domaine est d'arriver à prouver - ou à refuter - une conjecture de Bernhard Riemann (1826-1866) :

"les racines complexes de $\zeta(z) = 0$ vérifient : $Re(z) = 1/2$"

L'exploration systématique des racines de $\zeta(z) = 0$ avec un ordinateur a donné raison à Riemann pour les 3 500 000 premières racines. Et après ?

(Référence : F. Le Lionnais "les nombres remarquables" p. 27).

■