# GRANDEUR ET DECADENCE D'UN NOMBRE DANS L'ENSEIGNEMENT

Un antiexposé de G. CHARRIERE - Lausanne

**COMMENT approcher, cerner, un nombre que l'on ne connait pas mais que l'on peut... définir facilement. Voilà ce que nous propose un collègue suisse dans le bulletin des maîtres de mathématique vaudois n° 30 - 1984 avec réponse d'un étudiant dans le n° 38 - 1987. N'attendez pas aussi longtemps pour prolonger cet article et pour approcher $\mu$ d'encore plus près !!!**

## Pourquoi un antiexposé ?

**Considérations sur les programmes d'enseignement.**

Il est acquis aujourd'hui qu'un programme d'enseignement rédigé en liste de connaissances est, en mathématique comme dans d'autres disciplines, insatisfaisant. Il présente en effet les défauts suivants :

- les connaissances de cette liste sont soit d'un usage trop restreint (qui doit nécessairement connaître la formule de l'aire d'un trapèze ?) soit spécifiques (c'est-à-dire à l'usage exclusif du futur chimiste, du futur maçon, etc.) ;
- si un tel programme veut être complet, il conduit inévitablement à la surcharge.

Afin de remédier à ces défauts, il serait donc plus judicieux de :

- viser l'apprentissage de procédés généraux (utilisation de tables, usage de graphiques, etc.) ;
- viser l'apprentissage de savoir-faire plutôt que de savoirs et fixer les lignes directrices de cet apprentissage, lignes directrices qui sont savoir chercher, savoir communiquer, savoir choisir, savoir coder, savoir déduire.

Il serait vain de tenter d'enseigner ces savoir-faire en excluant de vouloir mettre l'élève en situation de les exercer. On n'apprend pas à conduire une automobile sans entrer dans une automobile ! C'est dans ce contexte que s'inscrit tout particulièrement bien la technique des situations.

**La technique des situations.**

Pour le cas des mathématiques, les mouvements de réformes émanant de l'insatisfaction de l'enseignement de cette branche (trop d'échecs ; des élèves «perdus» définitivement ; des «forts en math» sans initiative, etc.) ont amené une nouvelle définition des objectifs beaucoup plus précise qu'auparavant. Si nous voulons que l'élève sache «choisir, choisir au mieux», «aller en quête d'informations, les organiser», «inventer par analogie», «formuler un problème», etc., il faut créer une situation dans la classe telle que l'élève ressente la nécessité ou l'envie d'agir de la sorte.

Pratiquement, cela implique que les élèves soient confrontés à des problèmes assez peu définis pour permettre un choix quant au plan d'attaque, et se laissant approcher par sous-problèmes plus précis que l'élève peut formuler lui-même. Le point de départ doit être à la portée de l'élève, pour qu'il ait «envie d'y voir clair», et de plus, si les choix doivent être réels, il importe que le maître n'ait pas en tête une solution, ou un point du programme auquel il faut aboutir à tout prix.

Ce sont des problèmes choisis dans ces buts qu'on a appelés des «situations», mais il est clair que leur forme peut varier énormément. Le problème lui-même n'est que le point de départ : c'est l'attitude du maître qui en fait une situation.

**Inquiétudes et vicissitudes d'un groupe d'expérimentation.**

La technique dite «des situations» doit permettre à chaque élève de réussir quelque chose qui ait une valeur mathématique, à propos d'une question ouverte. Il importe qu'il découvre et qu'il comprenne par lui-même une idée nouvelle qui soit à sa portée. Le maître a pour tâche de favoriser cette démarche peut-être laborieuse, sans imposer sa propre vision.

Où et comment trouver des situations problématiques qui se prêtent à ce genre d'enseignement ? Comment faut-il les présenter aux élèves ? Quel est le comportement des élèves devant des situations de ce type ? Par quels procédés le maître peut-il relancer la curiosité des élèves ? Comment amener les élèves à rendre compte de leur travail ? De quelle documentation le maître a-t-il besoin ? Voilà quelques-unes des questions auxquelles, avant d'espérer une application plus étendue de cette méthode d'enseignement, tente de répondre un groupe d'étude du Centre Vaudois pour l'Enseignement Mathématique.

**Lisbonne, août 1983**
**(35^e rencontre de la CIEAEM).**

Présenter ses travaux dans une rencontre internationale et faire partager ses problèmes aux participants était, pour le groupe, une entreprise difficile. Une seule solution s'imposait, basée sur l'évidence qu'il est impossible de faire l'économie de l'expérience : un antiexposé.

Et c'est ainsi que naquît un titre insolite... suivi d'une séance où quelques-uns des mystères du nombre $\mu$ se dévoilèrent.

**Le nombre $\mu$.**

$\mu_1 = 0,1$
$\mu_2 = 0,12$
$\mu_3 = 0,123$

.
.
.

$\mu_{12} = 0,123456789101112$

.
.
.

$\mu = 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Le nombre $\mu$ fait partie de l'ensemble des nombres dont le développement décimal peut être décrit par une formule explicite :

0, f(1) f(2) f(3)...

où les nombres entiers f(1), f(2), ... sont écrits l'un après l'autre à la suite de la virgule.

Dans ce cas : f(n) = n.

Les participants, une fois mis au courant de l'existence de ce nombre, en arrivèrent à se demander :

- combient y a-t-il de chiffres dans $\mu_{100}, \mu_{200}, \mu_n$ ?
- quelle est la 734^eme décimale de $\mu$ ?
- combien y a-t-il de 7 dans les mille premiers chiffres à droite de la virgule de $\mu$ ?
- comment $\mu$ se note-t-il dans le système binaire ?
- quelles sont les propriétés de la suite $\mu_1 + \mu_2$, $\mu_2 + \mu_3$, $\mu_3 + \mu_4$, ... ?
- et celles de la suite $\mu_n + 1 / \mu_n$ ?
- peut-on imaginer une représentation géométrique de la suite $\mu_1, \mu_2, \mu_3$, ... ?
- $\mu$ est-il transcendant ?
- $\mu$ porte-t-il un nom ?!

...

- $\mu$ peut-il (ou doit-il) jouer un rôle dans l'enseignement élémentaire ?

...

- inventer un problème du $\mu$ que personne, dans la salle, ne saurait résoudre !!

En imaginant de telles questions, en tentant dans certains cas de les résoudre, en discutant des intérêts mathématiques et pédagogiques de $\mu$, il est certain que participants et animateurs prirent mieux conscience de ce qu'est, de ce que devrait être, ... une situation.

## Réponse d'un lecteur, Daniel Venditti, étudiant.

Je me suis penché sur la question suivante : combien y a-t-il de chiffres dans $\mu_{100}, \mu_{200}, \mu_n$. J'ai découvert une formule dont je vais vous donner la démonstration. Mais auparavant, dans le livre «Les nombres remarquables», de François le Lionnais, voici ce qu'il est dit : Nombre de Champernowne obtenu en écrivant successivement les nombres entiers consécutifs. Ce nombre est normal en base 10 (Un nombre x est normal en base b si toute suite de k chiffres apparaît dans les «b-cimales» de x avec la fréquence $1/b^k$. Tous ces nombres sont irrationnels mais on ne connait à ce jour que des nombres normaux artificiellement construits.). D'où la démonstration suivante :

**Introduction**

- E [x], représente la partie entière de x. log x, est le log décimal de x.
- Pour plus de facilité, j'ai pris un exemple numérique et je vais calculer $\mu_n$ pour n = 8537.
- Je poserai m = E [log n], où m représente le nombre de chiffres moins un du nombre n ; donc dans l'exemple numérique n = 8537 alors m = E [log 8537] = 3.

**Démonstration**

- J'ai décomposé n en une somme, ici 8537=7538+999 ce qui est très pratique car

$\mu_{8537} = 0,12345\ldots998999\underbrace{\ldots853585368537}$ et l'on remarque que, dans la partie sous l'accolade, tous les nombres ont le même nombre de chiffres, ici 4 ou m+1.

- Il faut déterminer quel est le 9, 99, 999, 9999, qu'il faut soustraire à n. Il suffit de prendre le dernier de ces nombres qui ait m chiffres et ce nombre sera égal à $10^m$-1, ici 999 = $10^3$-1.
- Donc sous l'accolade il y a n-($10^m$-1) nombres à m + 1 chiffres.
n-($10^m$ -1) = n-$10^m$ +1, ici 8537 - $10^3$ + 1 = 7538.
- Il en découle tout naturellement que (m+1).(n-$10^m$+1) est le nombre des décimales provenant des 7538 nombres de 1000 à 8537.
Voici la première partie de la formule.
Ici on aura (3 + 1) (8537 - $10^3$ + 1) = 30152.
- La prochaine étape est d'exprimer le nombre des chiffres de
$\mu_{999}$ ; or $\mu_{999} = \underbrace{0,123456789}_{a)}\ \underbrace{10\ldots979899}_{b)}\ \underbrace{100\ldots997998999}_{c)}$

dans a) il y a 9.1 chiffres $10 - 1 = 9$

b) il y a 90.2 chiffres $100 - 10 = 90$

c) il y a 900.3 chiffres $1000 - 100 = 900$

d) et ainsi de suite.

d'où la série $9.1 + 90.2 + 900.3 + 9000.4 + \ldots + 9.m.10^{m-1}$.

Il faut trouver une formule qui exprime la somme de cette série !

Pas évident, mais en faisant un détour on voit que :

| | | |
|---|---|---|
| $9.1 = 9$ | $10\text{-}9 = 1$ | $9 = 10\text{-}1$ |
| $9.1 + 90.2 = 189$ | $200\text{-}189 = 11$ | $189 = 200\text{-}11$ |
| $900.3 + 90.2 + 9.1 = 2889$ | $3000\text{-}2889 = 111$ | $2889 = 3000\text{-}111$ |

or $2889 = m.10^m - 111$, où $m = 3$.

● Ici une autre série apparaît 1, 11, 111, 1111, ... qui est bien plus simple à exprimer :
$1/9 = 0{,}111111111111\ldots$
or pour faire $1 = E[1/9 \,.\, 10^1] = E[1{,}11111\ldots] = 1$
$11 = E[1/9 \,.\, 10^2] = E[11{,}11111\ldots] = 11$
et ainsi de suite

$$\underbrace{1111\ldots11}_{m} = E[1/9 \,.\, 10^m] = E[\underbrace{1111\ldots11}_{m},11111\ldots]$$

● Et on conclut ainsi :

$1.9 = \quad 9 = 1.10 - E[1/9 \,.\, 10^m] \qquad m = 1$

$1.9 + 2.90 = 189 = 2.10 - E[1/9 \,.\, 10^m] \qquad m = 2$

le terme général $m.10^m - E[1/9 \,.\, 10^m]$.

● Il ne nous reste plus qu'à assembler les deux bouts de formule.

Nombres de chiffres $= (m + 1)(n - 10^m + 1) + m.10^m - E[1/9 \,.\, 10^m]$
où $m = E[\log n]$.
Pour notre exemple $n = 8537$ donc $m = 3$ puis
$(3 + 1)(8537 - 10^3 + 1) + 3.10^3 - 111 = 33041$.

D'une manière générale on obtient la formule :

$$y = (E[\log n] + 1)(n - 10^{E[\log n]} + 1) + E[\log n].10^{E[\log n]} - E[1/9.10^{E[\log n]}]$$

où y désigne le nombre des chiffres de l'entier 123... n associé à $\mu_n$. On en tire facilement le nombre des chiffres significatifs de $\mu_n$. Par exemple $\mu_{10} = 0{,}123\ldots891$ en a 10, alors que la formule donne 11.

**Remarque**

On peut représenter bien plus facilement cette formule par un signe de sommation :

$$y = n + \sum_{i=1}^{n} E[\log i] \text{ !!}$$

$$\text{car } y = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{(E[\log i] + 1)}^{\text{Nombre des chiffres de } i}.$$

Mais cette formule n'est pas très facilement calculable. Et le temps de calcul ! La dernière formule est valable car on doit bien sommer tous les chiffres, un à un, jusqu'à n. ■

## STROPHES

"spécial approximations"