

APPROCHEZ LE NOMBRE D'OR

J.-J. PAROT et Abd el Aziz CHEIKH - Nouakchott



A première manifestation humaine de la connaissance du nombre d'or remonterait à 10 000 ans comme cela aurait été constaté dans le temple d'Andros découvert sous la mer des Bahamas. La pyramide de Chéops (2 800 av. J.-C.) a des dimensions qui mettent en évidence l'importance que son architecte attachait au nombre d'or. Les bâtisseurs de cathédrales faisaient appel au nombre d'or qui donnait " la divine proportion " permettant d'obtenir les meilleures perspectives. Le nombre d'or n'apparaît pas seulement dans les constructions humaines ; on en trouve de nombreuses manifestations dans l'univers du vivant : les dimensions d'un individu qui nous semble " bien proportionné " ; les galaxies auraient une structure constituée de bras en forme de spirale logarithmique dont la raison est le nombre d'or, spirales identiques à celle de la structure d'une Ammonite ! Nous ne prétendons pas infirmer ou prouver de telles conjectures qui excitent l'imagination et la curiosité mais aborder quelques propriétés du nombre d'or en relation avec des suites de nombres et des suites de " rectangles dorés " qui vont nous permettre de construire une spirale logarithmique ressemblant à celle de la structure de l'Ammonite !

" LE NOMBRE D'OR φ " à partir d'une suite de FIBONACCI

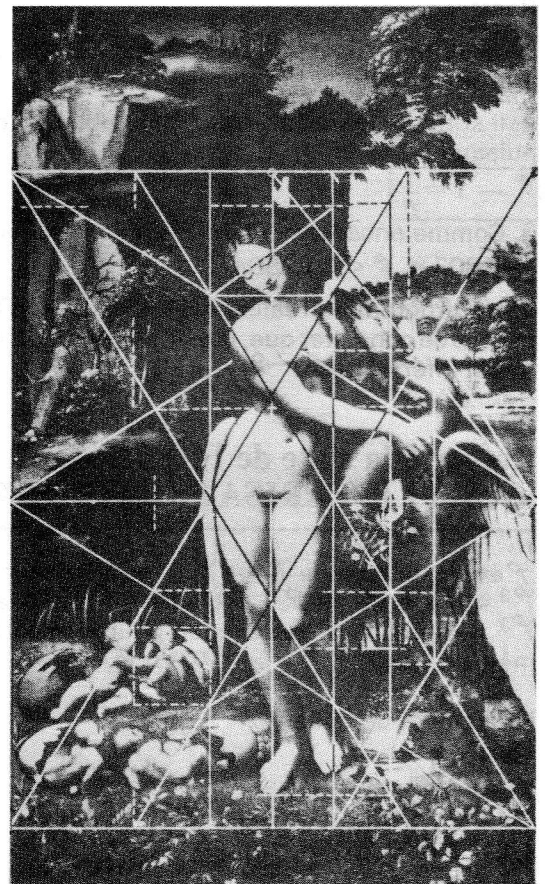
1	.	u_1 1 = v_1
1	.	u_2 2 = v_2
2	..	u_3 1,5 = v_3
3	...	u_4 1,66 = v_4
5		u_5 1,6 = v_5
8		u_6 1,625 = v_6
13		u_7

La configuration de points ci-dessus représente le début de la suite de Fibonacci définie ainsi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 & ; & u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} & \forall n > 2 \end{cases}$$

A partir de la suite divergente (u_n) , on définit la suite (v_n) de la façon suivante :

$$(\forall n \geq 1) \quad v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$



On trouve ainsi :

$v_1 = \frac{1}{1}$	$=$	1		2
$v_2 = \frac{2}{1}$	$=$	2		$1,666\dots$
$v_3 = \frac{3}{2}$	$=$	$1,5$		$1,625$
$v_4 = \frac{5}{3}$	$=$	$1,6$		$1,615\dots$
$v_5 = \frac{8}{5}$	$=$	$1,6$		$1,6190\dots$
$v_6 = \frac{13}{8}$	$=$	$1,625$		
$v_7 = \frac{21}{13}$	$=$	$1,615\dots$		
$v_8 = \frac{34}{21}$	$=$	$1,6190\dots$		

Comme il apparaît clairement ci-dessus (v_n) peut être scindée en deux sous-suites :

(v_{2n}) décroissante et minorée par 1

(v_{2n+1}) croissante et majorée par 2

(Puisque $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{u_n - 1}$)

Donc ces deux suites convergent vers le même nombre positif l tel que :

$l = 1 + \frac{1}{l}$

ou

$l^2 = l + 1$

La résolution de cette équation donne $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

nombre qu'on appelle :

LE NOMBRE D'OR
qu'on désignera par φ .

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$

Donc : la suite (v_n) converge vers le nombre d'or φ .

Remarquons que :

1. Il suffit d'ajouter 1 à φ pour obtenir son carré
puisque : $\varphi + 1 = \varphi^2$

2. Il suffit de lui retrancher 1 pour obtenir son inverse
puisque :

$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$

3. Comme encadrement de φ , on peut donner :

$$1,61803 < \varphi < 1,61804$$

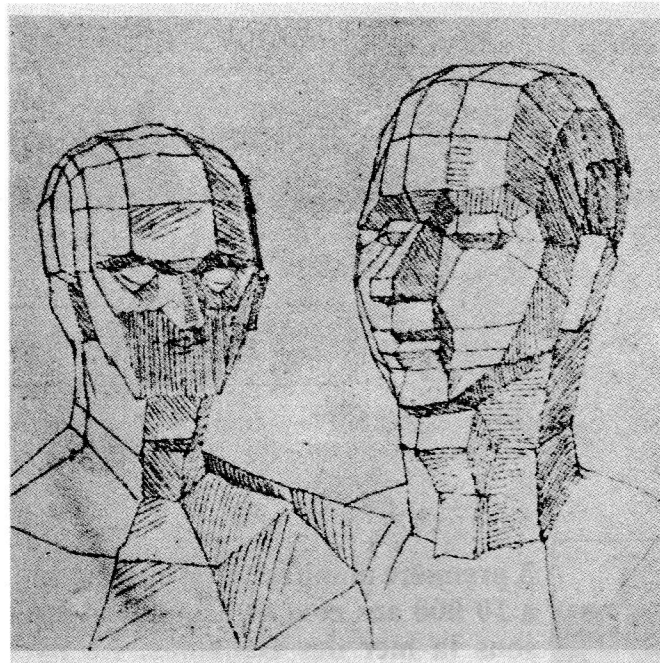
4. Un programme réalisé avec CASIO PB 700 nous a permis de constater que, pour $n = 23$, l'écart entre v_n et φ est inférieur à 10^{-9} .

Retour à la suite de FIBONACCI avec la LINEARISATION DE φ

φ étant solution de $\varphi^2 = \varphi + 1$, on obtient $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$, c'est à dire qu'on a linéarisé φ^3 ; de proche en proche, on pourra linéariser, de la même façon $\varphi^4, \varphi^5, \dots, \varphi^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi &= 1\varphi \\ \varphi^2 &= 1\varphi + 1 \\ \varphi^3 &= 2\varphi + 1 \\ \varphi^4 &= 3\varphi + 2 \\ \varphi^5 &= 5\varphi + 3 \dots \end{aligned}$$



On peut démontrer que, quel que soit $n \geq 1$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que :

$$\varphi^n = a_n \varphi + b_n$$

et que chacune des deux suites (a_n) et (b_n) est la suite de Fibonacci.

En linéarisant φ^n avec $n \in \mathbb{Z}^+$, on trouvera :

$$\varphi^{-1} = 1 \cdot \varphi - 1$$

$$\varphi^{-2} = -1 \cdot \varphi + 1$$

$$\varphi^{-3} = 2 \cdot \varphi - 3$$

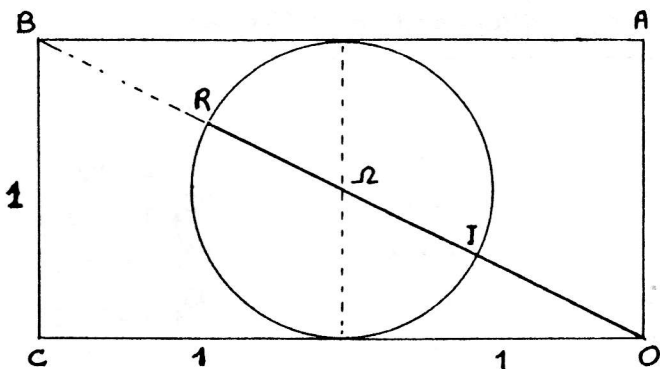
$$\varphi^{-4} = -3 \cdot \varphi + 1, \dots$$

Quel que soit $n \in \mathbb{Z}^+$, il existe deux relatifs α_n et β_n tels que : $\varphi^n = \alpha_n \varphi + \beta_n$

on retrouve, pour ($|\alpha_n|$) et ($|\beta_n|$), la suite de Fibonacci !

Représentation géométrique du NOMBRE D'OR

Dans le rectangle (OABC) de côtés 2 et 1 :



$$OB = \sqrt{5}, \quad OI = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$OR = \varphi$

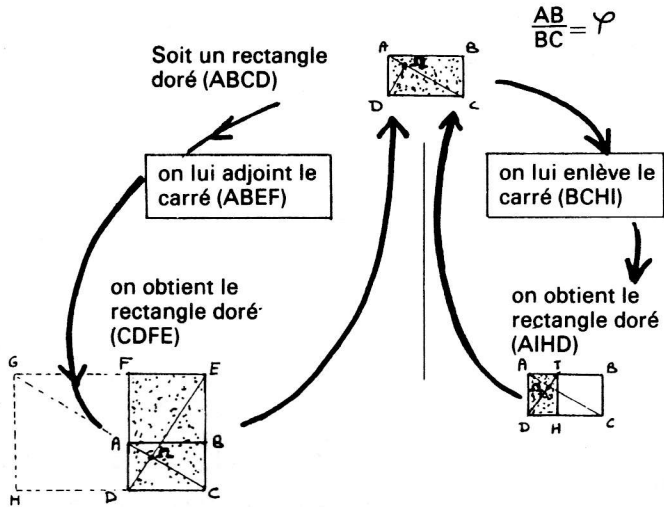
$$OR = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

$$OI = OR - 1 = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

N.B. : En considérant la puissance de O par rapport au cercle, on retrouve : $OI \cdot OR = 1$ donc $OI = \frac{1}{\varphi}$

Processus récursifs pour construire des suites de RECTANGLES DORÉS

On dira qu'un rectangle est doré si le rapport de ses côtés est φ .



Ce procédé récursif en augmentation permet d'obtenir une infinité de rectangles dorés de plus en plus grands: (ABCD) étant un rectangle doré,

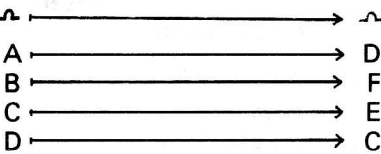
$AB = \varphi \times BC$. Or $EC = EB + BC = AB + BC$
donc $EC = \varphi \times BC + BC = (\varphi + 1) BC = \varphi^2 \times BC$
 $EC = \varphi \times (\varphi BC)$ $EC = \varphi \times DC$

Par conséquent (DCEF) est aussi un rectangle doré. Si on continue en lui adjoignant un autre carré (DFGH), on obtient encore un rectangle doré, etc...

Il existe une similitude S qui transforme (ABCD) en (DCEF); S a

- pour rapport φ
- pour angle $+\frac{\pi}{2}$
- pour centre ω

Dans cette similitude $S(\omega, \frac{\pi}{2}, \varphi)$



$(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega D}) = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $(\overrightarrow{\omega D}, \overrightarrow{\omega C}) = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
d'où $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega C}) = \pi + 2k\pi$ donc $\omega \in [AC]$

Puisque $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega D}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\omega \in [AC]$, le point ω est le projeté orthogonal de D sur la diagonale [AC].

Par conséquent: S et S' ont le même centre ω , S et S' sont deux similitudes réciproques.

La diagonale [AC] du rectangle doré (ABCD) a pour image la diagonale [DE] du rectangle doré (DFEC) qui lui est perpendiculaire; donc le point ω est aussi le projeté orthogonal de C sur la diagonale [DE].

Ce procédé récursif en diminution permet d'obtenir une infinité de rectangles dorés de plus en plus petits: (ABCD) étant un rectangle doré,

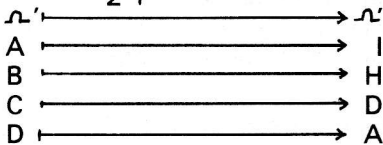
$AB = \varphi \times BC$, $AI + IB = \varphi \times BC$
 $AI = (\varphi - 1) \times BC$ $AI = \frac{1}{\varphi} \times BC$
 $\varphi \times AI = AD$

Par conséquent, (AIHD) est aussi un rectangle doré. Si on continue en lui enlevant un autre carré (DHKL), on obtient encore un rectangle doré (AIKL), etc...

Il existe une similitude S' qui transforme (ABCD) en (AIHD); S' a

- pour rapport $\frac{1}{\varphi}$
- pour angle $-\frac{\pi}{2}$
- pour centre ω

Dans cette similitude $S'(\omega, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\varphi})$



$(\overrightarrow{\omega C}, \overrightarrow{\omega D}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $(\overrightarrow{\omega D}, \overrightarrow{\omega A}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
d'où $(\overrightarrow{\omega C}, \overrightarrow{\omega A}) = -\pi + 2k\pi$ donc $\omega \in [AC]$

Puisque $(\overrightarrow{\omega D}, \overrightarrow{\omega A}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\omega \in [AC]$, le point ω est le projeté orthogonal de D sur la diagonale [AC].

La diagonale [AC] du rectangle doré (ABCD) a pour image la diagonale [ID] du rectangle doré (IHDA) qui lui est perpendiculaire; donc le point ω est aussi le projeté orthogonal de A sur la diagonale [DI].

Si on poursuit la production de rectangles dorés en utilisant les processus indiqués, c'est toujours:

$S(\omega, \frac{\pi}{2}, \varphi)$
qui permet de passer d'un rectangle doré au rectangle doré suivant plus grand.

$S'(\omega, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\varphi})$
qui permet de passer d'un rectangle doré au rectangle doré suivant plus petit.

A partir d'un rectangle doré (ABCD), on obtient donc:

une suite de rectangles dorés "croissants" images de (ABCD) par $S, S \circ S = S^2, \dots, S^n$

une suite de rectangles dorés "décroissants" images de (ABCD) par $S^{-1}, (S^{-1})^2, \dots, (S^{-1})^n$.

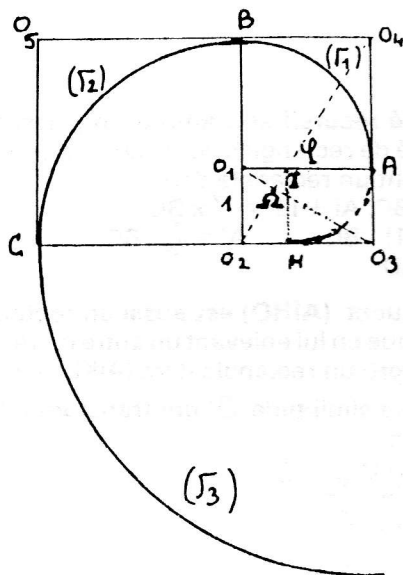
Procédé pour représenter l'Ammonite

1. Après avoir construit le rectangle doré ($O_1 O_2 O_3 A$) de côtés φ et 1, on construit le carré ($O_1 A O_4 B$) de façon à obtenir le rectangle doré ($O_2 O_3 O_4 B$) de côtés φ^2 et φ .

Soit (Γ_1) l'arc de cercle $[AB]$ quart du cercle de centre O_1 et de rayon $\varphi^1 = O_1 A$.

2. On construit le carré ($O_2 B O_5 C$) de façon à obtenir le rectangle doré ($O_3 O_4 O_5 C$) de côtés φ^3 et φ^2 .

Soit (Γ_2) l'arc de cercle $[BC]$ quart du cercle de centre O_2 et de rayon $\varphi^2 = O_2 B$.



En poursuivant indéfiniment ce processus, on obtient une courbe réunion de (Γ_1), (Γ_2) (Γ_3),... en décrivant des arcs de cercles inscrits dans des rectangles dorés.

Imaginons une puce qui tourne ainsi en se déplaçant sur cette courbe; si au lieu de tourner en allant de A vers B, elle décide de tourner dans l'autre sens en allant de B vers A, quelle va être la suite de sa trajectoire après être arrivée en A?

Il suffit de procéder comme précédemment mais, cette fois-ci, en suivant le processus en diminution : c'est en enlevant le carré (IAO_3H) de côté 1 qu'on obtient le rectangle doré ($O_1 I HO_2$) de côté 1 et φ^{-1} . On pourra désigner par (Γ_{-1}) l'arc de cercle $[AH]$, quart du cercle de centre I et de rayon IA. $[AH]$ sera donc le début de la suite de la trajectoire de la puce après son arrivée en A.

Si elle continue à décrire de tels quarts de cercles obtenus de cette façon en suivant le processus en diminution elle va se rapprocher de plus en plus du point $\mathcal{L}$ centre des similitudes ($\mathcal{L}$ est le point d'intersection des segments $[O_1 O_3]$ et $[O_2 O_4]$).

Si on désigne par (Γ) la réunion des branches (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3),... obtenues par le "procédé en augmentation", et par (Γ_{-1}), (Γ_{-2}),... celles obtenues par le "procédé en diminution", on peut considérer que (Γ) est une représentation approchée de l'enroulement d'une ammonite.

Structure de l'Ammonite et Nombre d'Or

La courbe (Γ) ainsi obtenue ressemble à une spirale ($\mathcal{C}$) qui aurait pour pôle $\mathcal{L}$ et qui passerait par les points A, B, C, ..., H, ... extrémités des "quarts de cercles" utilisés pour construire (Γ).

Pour déterminer une équation polaire d'une telle courbe ($\mathcal{C}$), nous pouvons choisir comme repère :

- le pôle $\mathcal{L}$ (centre des similitudes)
- la demi-droite $[\mathcal{L} A]$ comme axe polaire
- $1 = \|\mathcal{L} A\|$

Dans ce repère :

- les coordonnées polaires de A sont (1,0)
- puisque B est l'image de A dans la similitude S de centre $\mathcal{L}$, de rapport φ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, les coordonnées de B sont ($\varphi, \frac{\pi}{2}$)
- C étant l'image de B par S, C (φ^2, π)

Lorsque l'angle polaire augmente de $\frac{\pi}{2}$, le module r est multiplié par le nombre d'or φ .

$$\theta = 0 \quad r = \varphi^0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad r = \varphi^1 = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}}$$

$$\theta = \pi \quad r = \varphi^2 = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}}$$

ce qui nous amène à l'équation

$$r = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}} \quad \text{ou} \quad r = e^{\left(\frac{2}{\pi} \log \varphi\right) \theta}$$

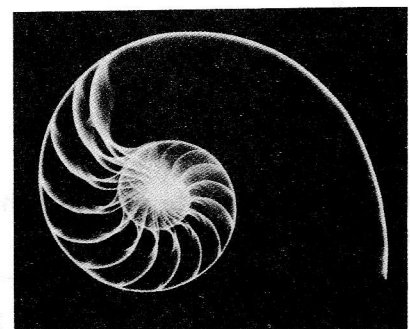
équation d'une spirale logarithmique qui fait apparaître le nombre d'or φ .

$$(\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_1 = r \times \varphi)$$

Cette spirale ($\mathcal{C}$) qui est une courbe "continue" a en commun avec (Γ) tous les points ayant pour angle polaire $\theta = k \times \frac{\pi}{2}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). On peut donc la considérer comme "voisine" de (Γ) et tout aussi représentative que (Γ) de la structure de l'ammonite.

Dans ce contexte, on pourra admettre que :

la structure de l'ammonite ressemble à une spirale logarithmique dont la raison est le nombre d'or.



Bibliographie :

"Les nombres et leurs mystères", par A. Warusfel. Editions du Seuil. Paris.

"Le nombre d'or, clé du monde vivant", par D. Nero-man Dervy-livres, 6, rue de Savoie, Paris V^e.

"Les nombres cachés, Esotérisme arithmologique" par G. Jouven Dervy-livres, 6, rue de Savoie, Paris V^e. Gödel, Escher, Bach. "Les brins d'une guirlande éternelle" Inter Editions, 87, avenue du Maine, 75014 Paris.

"The geometry of art and life" par Matila Ghyka -Dover Pub. 1977.