

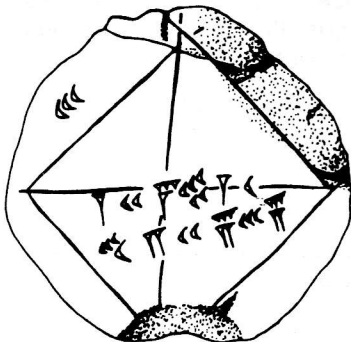
LA DIAGONALE IRRATIONNELLE

Michel DARCHE - Orléans

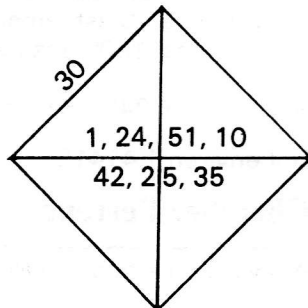


DEPUIS la découverte de ce que nous appelons aujourd'hui "le théorème de Pythagore", de nombreuses tentatives ont été faites pour approcher sinon atteindre $\sqrt{2}$. Nous vous en proposons ici quelques-unes.

La plus ancienne de ces approximations se trouve sur une tablette babylonienne de 8 centimètres de côté.



Copie d'une tablette babylonienne
(grandeur réelle)



Transcription moderne

(icono Yale Babylonian Collection Pl. 8b. YBC 7289)

Cette tablette, représente un carré et ses diagonales. Elle donne en plus un message composé de trois nombres écrits en base soixante :

$a = 30$
 $b = 1, 24, 51, 10$
 $c = 42, 25, 35$

Vérifions que $a \times b = c$:

1, 24, 51, 10
x 30

= 30, 720, 1530, 300
= 30, 720, 1535
= 30, 745, 35
= 42, 25, 35

Multiplier le côté du carré par b donne donc la diagonale de ce même carré. Connaissant, de nos jours, le théorème de Pythagore, nous pouvons en déduire que b est une bonne approximation de $\sqrt{2}$. On le vérifie de deux façons :

- le carré de b , en base soixante, est égal à 1, 59, 59, 59, 38, 1, 40.

- b , en base dix, s'écrit 1,414212963... alors que $\sqrt{2}$ s'écrit 1,414221356... soit une erreur de un cent millièmes !

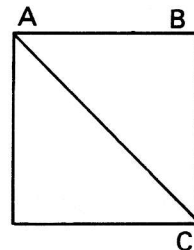
Dans un livre indien d'Apastamba - Sulba - Sutra datant de 800 ans avant notre ère, on trouve une autre approximation de $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \text{ soit } \frac{577}{408}$$

Les cinq premiers chiffres de l'écriture décimale de cette fraction sont les mêmes que pour $\sqrt{2}$.

Les Grecs semblent avoir été les premiers à reconnaître que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Il est "incommensurable" c'est-à-dire qu'il ne peut être écrit comme rapport de deux nombres entiers.

Voici la preuve fournie par Aristote :



Supposons que AC soit "commensurable" avec AB .
Posons $AC/AB = d/a$
avec a et d sans diviseur commun.
On a $d > a$ et $AC^2/AB^2 = d^2/a^2$

De $AC^2 = 2 \cdot AB^2$, $d^2 = 2 \cdot a^2$ on déduit que d^2 et donc d sont pairs.

Posons $d = 2c$. Alors $d^2 = 2 \cdot a^2$ s'écrit $4 \cdot c^2 = 2 \cdot a^2$, soit $2 \cdot c^2 = a^2$.

On en déduit que a est pair, ce qui est en contradiction avec le fait que a et d n'ont pas de diviseur commun. L'hypothèse de départ est donc fausse.

Ce sont les **Pythagoriciens** qui ont, les premiers, inventé une méthode pour calculer des approximations de $\sqrt{2}$ de plus en plus précises.

Le procédé repose sur une autre approximation : si d/a est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, alors le triangle isocèle est presque... rectangle.

La mesure de l'erreur est donnée par le théorème de Pythagore : $e = d^2 - 2.a^2$. Si le triangle isocèle (a, a, d) est presque rectangle, une formule, due à Euclide : $2.a^2 - d^2 = (2.a + d)^2 - 2(a + d)^2$, permet d'ajouter qu'il en est de même du triangle ($a + d, a + d, a + 2.d$) et $\frac{2.a+d}{a+d}$ est une autre approximation de $\sqrt{2}$, meilleure que d/a !

A la règle et au compas

La méthode qui suit est décrite par Théon de Smyrne (130 ap. J.-C.), "l'unité étant le commencement de toute chose, il doit en être de même du côté et de sa diagonale, au moins au début !"

Commençons avec deux longueurs unités, l'une est celle du premier côté a_1 ,

l'autre est celle de la première diagonale d_1 .

Les seconds côté et diagonale (a_2, d_2) sont construits à partir des premiers, les troisièmes (a_3, d_3) et les suivants le sont comme suit :

$$a_2 = a_1 + d_1, \quad d_2 = 2.a_1 + d_1,$$

$$a_3 = a_2 + d_2, \quad d_3 = 2.a_2 + d_2,$$

$$a_4 = a_3 + d_3, \quad d_4 = 2.a_3 + d_3, \text{ etc.}$$

puisque $a_1 = d_1 = 1$, il en résulte que :

$$a_2 = 1 + 1 = 2 \text{ et } d_2 = 2.1 + 1 = 3 \text{ d'où } \sqrt{2} \simeq 3/2,$$

$$a_3 = 2 + 3 = 5 \text{ et } d_3 = 2.2 + 3 = 7 \text{ d'où } \sqrt{2} \simeq 7/5,$$

$$a_4 = 5 + 7 = 12 \text{ et } d_4 = 2.5 + 7 = 17 \text{ d'où } \sqrt{2} \simeq 17/12, \text{ et ainsi de suite.}$$

Cette méthode était connue de Platon 5 siècles avant J.-C.

Une autre approximation de $\sqrt{2}$ fait appel aux fractions continues. Cette méthode, parfois appelée méthode de Héron, est utilisée plus généralement pour trouver une mesure approchée de la racine carrée d'un nombre A .

Elle est décrite au XIV^{ème} siècle par Rhabdas. Si a est le plus grand nombre dont le carré est inférieur à A , alors, si nous posons $A = a^2 + b$, les nombres

$$a + \frac{b}{2a}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}}$$

... fournissent des approximations de $\sqrt{2}$.

Avec $A = 2$ on obtient $3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, 239/169, 577/408, \dots$ qui est la séquence fournie par la méthode des Pythagoriciens.

La septième approximation est celle fournie par Apastamba - Sulba - Sutra.

Avant l'ère des calculettes

Rappelez-vous, l'extraction de racine de 2!!!

$$\begin{array}{r} 2.00\,00\,00\,00 \\ -1 \\ \hline 1.00 \\ 96 \\ \hline 4\,00 \\ 281 \\ \hline 11\,900 \\ 11296 \\ \hline 60400 \\ 56564 \\ \hline 383600 \\ 282841 \\ \hline 10075900 \end{array}$$

1,414213

$$24 \times 4 = 96 \quad (A)$$

$$281 \times 1 = 281 \quad (B)$$

$$2824 \times 4 = 11296 \quad (C)$$

$$28282 \times 2 = 56564$$

$$282841 \times 1 = 282841$$

$$2828423 \times 3 = \dots$$

La méthode est rappelée par ailleurs par Monge et Guinchan dans l'annexe à l'article de Michel Clinard. Pourquoi ça marche si bien ?

A l'étape A,

il s'agit de trouver le plus grand entier n d'un chiffre tel que : $(10 + n)^2 \leq 200$.

Puisque $(10 + n)^2 = 100 + (20 + n)n$, cela revient à trouver n tel que $(20 + n)n \leq 100$.

A l'étape B,

il faut trouver n tel que $(140 + n)^2 \leq 20\,000$, soit : $(280 + n)n \leq 400$.

A l'étape suivante : $(1410 + n)^2 \leq 2\,000\,000$, soit : $(2820 + n)n \leq 11\,900$.

Cette méthode était connue des Grecs mais ils utilisaient pour ce faire la base soixante, héritage des Babyloniens. C'est ainsi que l'on trouve chez les Babyloniens, 1600 ans avant notre ère :

$$\sqrt{2} \simeq 1^\circ + 24' + 51'' = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600}$$

soit environ 1,41416.

Cherchez l'erreur

● Avec la méthode de Newton :

$$\text{En partant de } x = 1, \text{ avec } y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

$$\text{on obtient } y_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = 1,5$$

$$\text{puis } y_2 = \frac{1}{2} \left(1,5 + \frac{1}{1,5} \right) = 1,417$$

$$\text{puis } y_3 = \frac{1}{2} \left(1,417 + \frac{1}{1,417} \right) = 1,414216$$

Après 3 approximations, l'erreur est inférieure à deux millièmes.

● Avec la méthode des fractions continues.

Posons $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$ et notons e_n l'erreur d'approximation.

On a $e_{n+1} = [-(\sqrt{2} - 1)e_n] \simeq [-(\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} + 1)]e_n$ soit environ $-1/6$ de e_n .

L'erreur est réduite par un facteur 6 à chaque étape. C'est une méthode linéaire puisque e_{n+1} est proportionnel à e_n .

Pour la méthode de Newton, les erreurs successives sont liées par la relation : $e_{n+1} = e_n^2 / 2(\sqrt{2} + e_n)$ soit environ $e_n^2 / 2\sqrt{2}$.

On a là une méthode d'approximation quadratique puisque e_{n+1} est proportionnel au carré de e_n .

Si x_n a p décimales correctes, alors x_{n+1} aura $2p$ décimales correctes. ■