APPROXIMATIONS GEOMETRIQUES

Ste ven LAY - Nctm

SI un dessin vaut mieux qu'un long discours, alors un graphique vaut mieux qu'une longue démonstration.
Les deux graphiques qui suivent illustrent la convergence des séries géométriques. Ils portent sur des notions dont on a tous fait le tour et pourtant ne semblent pas souvent rencontrés dans la littérature.
Ce très court mais très visuel article est extrait de Matematical Teachers de Septembre 85, revue de la NCTM, l'Apmep à l'échelle américaine.

Prenons les séries géométriques $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ avec r compris entre 0 et 1.

$S_n = \sum r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$ désigne une somme partielle et S est la limite S_n quand n tend vers l'infini.

Le premier graphique se construit à partir des points A(0,0) et B(1,0). Une droite de pente r passe par A et une droite de pente 1 passe par B. Puisque r est compris entre 0 et 1, ces deux droites se coupent en un point C.

On construit ensuite les points P_1, P_2, P_3,... comme indiqué sur la figure, chaque point étant la projection du point précédent sur l'autre droite orthogonalement ou parallèlement à la droite (AB).

Dans le triangle rectangle ABP_1, AB valant 1 et (AC) ayant pour pente r, BP_1 vaut r. (BC) ayant pour pente 1, $P_1 P_2$ est égal à BP_1.
De même, dans le triangle rectangle $P_1P_2P_3$, P_1P_2 valant r, P_2P_3 vaut r^2 et ainsi de suite.

Appelons D la projection de C sur (AB). La mesure du segment [AD] est égale à la somme $S = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$ Et, comme BD = CD, nous en déduisons que CD = S — 1. Les triangles rectangles ABP_1 et ADC sont semblables donc :

$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BP_1}$ soit $\frac{S}{1} = \frac{S-1}{r}$, ce qui donne $S = 1/(1-r)$

La figure 2 illustre la série géométrique alternée

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n r^n = 1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \ldots$ avec $0 < r < 1$

Cette fois, la droite (AC) a pour pente —r et nous obtenons, avec AB = 1, AD = S et DC = DB = 1 — S :

$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BP_1}$ soit $\frac{S}{1} = \frac{1-S}{r}$, ce qui donne $S = 1/(1+r)$

Comme exercice d'application, vous êtes invité à étudier les cas r = 1 et r > 1. ■

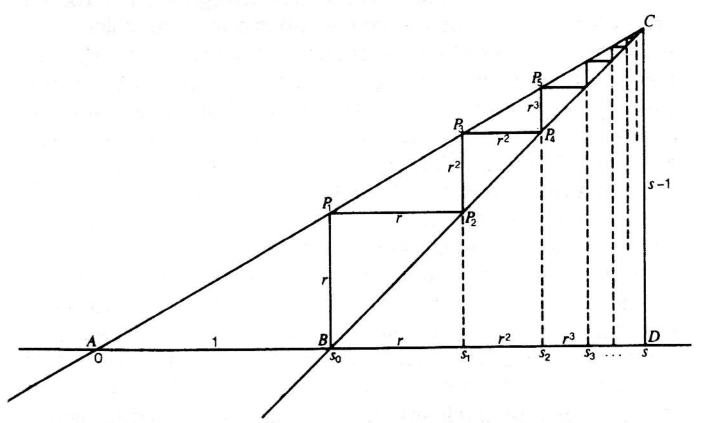

Fig. 1. $s = \frac{1}{1-r}$

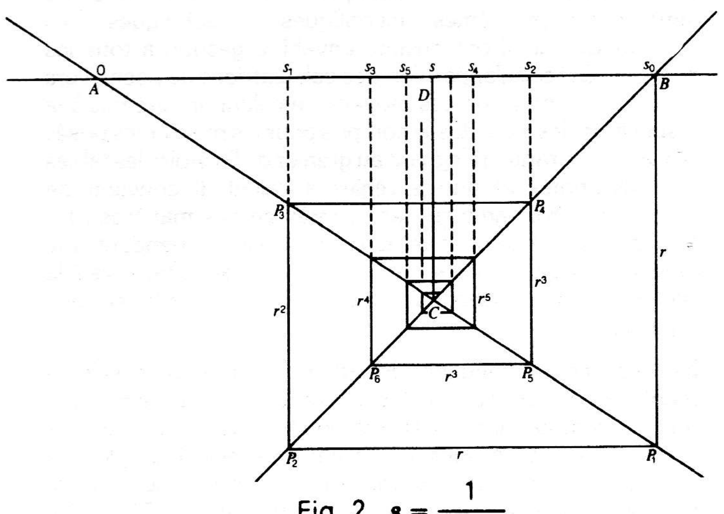

Fig. 2. $s = \frac{1}{1+r}$