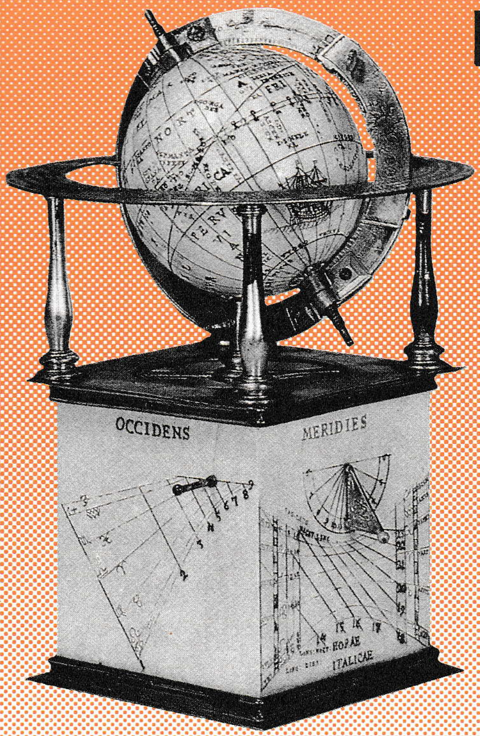
PLOT



MATHEMATIQUE ET ENSEIGNEMENT

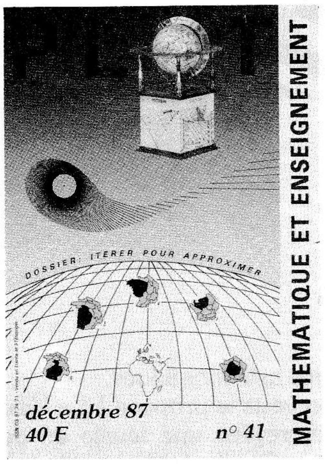
DOSSIER: ITERER POUR APPROXIMER

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger

décembre 87

40 F

n° 41



Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Michel Clinard, Jacqueline Collet, Roger Crépin, René Gauthier, Georges le Nezet, Ginette Mison, Serge Parpay, Raymond Torrent, Luce Dossat

Rédaction
Michel Darche, Michel Mirault

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Diffusion - Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

Photocomposition et maquette
Graphi'Style - Orléans

Photogravure et impression
Fabrègue-Imprimeur, Limoges

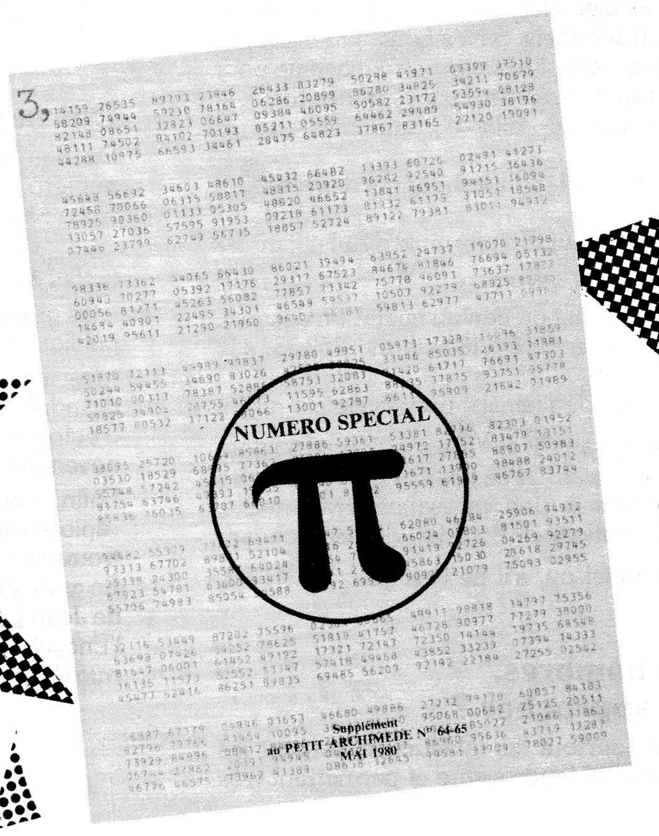
Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, Nantes, Rennes, Rouen, Brest, Caen et Clermont-Ferrand avec le concours du Ministère de la Coopération

Diffusion
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

PLOT
mathématiques et enseignement

sommaire



▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶ **éditorial** ▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶▶

Hommage aux grands nombres

Alors qu'un grand mathématicien soviétique, Andrei Kolmogorov, en disparaissant à 84 ans, nous rappelle le travail des mathématiciens pour approcher, par des modèles numériques, des phénomènes les plus divers, nous abordons dans ce numéro des problèmes beaucoup plus simples qui ont, malgré tout, besoin de tous nos soins.
Alors que la calculatrice, l'ordinateur et les tableurs envahissent tous les métiers, il n'est pas encore trop tard pour insister sur les précautions à prendre avec ces «machines».
En effet, ces machines nous trompent !!!

Des rationnels qui refusent de s'afficher.

Déjà, avec des nombres aussi simples que les fractions égyptiennes comme 1/3, 2/3,... les problèmes apparaîssent. Essayez avec votre calculette ou votre micro de savoir si le résultat affiché est le même que le résultat interne. La machine ne connaît que des représentations décimales limitées, donc en général approchées, des nombres.
Ces représentations approchées des nombres et des calculs deviennent encore plus dangereuses avec l'apparition des tableurs. En itérant rapidement les calculs, ils amplifient encore plus rapidement les approximations pour les transformer en erreurs. Des opérations aussi simples que des calculs de TVA deviennent des opérations à risques.

π, c'est pas 3-14 !!! et pourtant !

Les machines à calculer électroniques gomment quasi complètement les irrationnels. Savez-vous, par exemple, quel est le nombre qui est choisi par votre machine pour représenter π ? Ils sont tous transformés en décimaux et pourtant il y a «infiniment» plus d'irrationnels que de décimaux !
Pire encore, certains calculs peuvent donner des résultats étonnants.
Vous connaissez tous la superbe formule d'Euler liant les nombres π, e, i et -1 à savoir : $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, mais savez-vous si $e^{\pi\sqrt{163}}$ est ou non un entier, un décimal, un rationnel ? (Sa partie entière a 18 chiffres : 262 537 412 640 768 743 !!!).
Votre machine ne vous dira jamais, pour la simple raison que l'on ne le sait pas, si $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou non.
Et pourtant ce nombre permet de justifier qu'il existe des irrationnels qui, élevés à une puissance irrationnelle, donnent un nombre rationnel. En effet, de deux choses l'une; ou a est rationnel ou, s'il ne l'est pas, $a^{\sqrt{2}}$ l'est, puisqu'égal à 2 !!

Et les grands nombres, comment les approcher ?

Les calculatrices et, surtout les tableurs, effectuent les calculs avec une rapidité foudroyante et permettent très vite d'atteindre des nombres astronomiques.
Ainsi, imaginez, comme on vous le propose à La Villette, que vous puissiez plier et replier une feuille en deux, quarante cinq fois de suite. Quelle épaisseur de papier obtiendrez-vous ? La hauteur d'une salle, d'un immeuble, de la Tour Eiffel, la distance de la Terre à la Lune, au Soleil,...?
Que vous dit votre calculette ? Et qu'en dites-vous ? En kilomètres, on obtient un nombre de 6 chiffres ! Quelle notion approximative avons-nous de ces distances ? On commence ici à flirter avec les nombres Googoliens (un Googol = 10^{100}).

Et les factorielles !!!

Faciles à calculer avec un tableur, elles deviennent vite approximatives, quand elles ne sont pas fausses sur les derniers chiffres significatifs.
Et pourtant ces «n !» interviennent dans bien des formules et développements limités (donc approximatifs). Là encore l'approximation permet... d'approcher n! d'autant plus près que n est grand : n! est voisin de $(n/e)^n \sqrt{2\pi}$ (formule donnée par Stirling au XVIII^e).

Et les nombres de nombres ?

Voilà encore un autre type d'approximation. Contentons nous ici de rappeler la formule qui montre que les nombres premiers se «raréfient» quand ils deviennent très grands. Cette formule, dûe à Hadamard et La Vallée-Poussin, dit que le nombre de nombres premiers inférieurs à l'entier a se rapproche de «$a/\ln a$» quand a devient très grand.

Des sujets pour plusieurs numéros

De nombreux sujets pourraient être abordés dans ce numéro, heureusement le nombre de pages nous limite.
Nous réservons pour d'autres numéros :

- les approximations polynomiales de fonctions si importantes à l'ère de la discrêtisation ;
- les grands nombres premiers et les codes secrets à clé publique (cf «Mosaïque Mathématique») ;
- les limites des langages informatiques (cf les articles d'André Warusfel in «la revue de Maths Spé» n° 2 d'octobre 87 et in «l'ordinateur individuel» n° 97 de novembre 87.

Enfin, nous vous engageons à lire les livres cités en «aplotstrophes» et qui portent tous sur le sujet. Vous les trouverez dans vos Irem ou l'Apmep.
En guise de conclusion, nous insérons le début de l'article de Jean-Louis Ovaert (devenu Inspecteur Général) dans l'Encyclopaedia Universalis sur l'histoire du **Calcul numérique**.

L'équipe de rédaction ■

CALCUL NUMÉRIQUE (HISTOIRE DU)

⊖ NUMÉRIQUE (ANALYSE), vol. 11

Dans l'enseignement actuel des mathématiques en France, le calcul numérique apparaît le plus souvent comme une simple application des théories. Au contraire, l'histoire des mathématiques montre, comme on va le voir, qu'il y a interaction constante entre les progrès du calcul et l'approfondissement des concepts mathématiques. Cependant, l'intérêt pour les problèmes numériques est d'importance variable suivant les époques. L'école platonicienne (Platon, Eudoxe, Euclide...) distingue nettement l'arithmétique, laquelle fait partie des mathématiques, du calcul numérique (appelé logistique), considéré comme science pratique. Une évolution importante apparaît avec l'école d'Alexandrie (Archimède, Héron...), en relation avec les progrès de la géographie et de l'astronomie : les mathématiciens sont alors amenés à combiner les méthodes grecques et les méthodes babyloniennes. C'est encore l'astronomie qui favorise le développement de l'algèbre et du calcul numérique dans l'école arabe au Moyen Age.

En Occident, il convient de distinguer plusieurs périodes. De 1500 à 1650, le développement du calcul numérique est lié aux problèmes posés par les échanges commerciaux, la navigation et l'astronomie (Stevin, Viète, Napier, Briggs, Kepler, Mercator, Descartes, Wallis, Gregory). De 1650 à 1800, les progrès des sciences physiques, du calcul des probabilités et des statistiques sont à la source de nombreux travaux, aussi bien en Grande-Bretagne (Newton, Maclaurin, Stirling...) que sur le continent (Euler, Lagrange, Laplace, Gauss...). Au début du XIX^e siècle, l'école française (Fourier, Poisson, Ampère, Cauchy...) élabore les éléments de la physique mathématique, laquelle pose de nouveaux problèmes numériques. Au cours du XIX^e siècle, ces travaux seront approfondis notamment par Jacobi, Tchebychev et Hermite. Toutefois, de nombreuses questions ne peuvent alors être résolues, par manque de moyens de calcul : ce qui peut expliquer un certain déclin de l'intérêt pour les questions numériques à la fin du XIX^e siècle, et ce jusqu'en 1940. Les développements de la recherche opérationnelle d'une part, de la physique nucléaire d'autre part, eux-mêmes liés à l'histoire de la Seconde Guerre mondiale, ont abouti à la création des ordinateurs ; ceux-ci ont, en retour, complètement bouleversé les conceptions concernant le calcul numérique. Depuis cette époque, de très nombreux travaux sont consacrés à l'analyse numérique et à l'informatique, au service des problèmes scientifiques et techniques. Les moyens de calcul ont ensuite envahi la gestion à tous les niveaux. Grâce à l'apparition des calculatrices de poche vers 1970, bon nombre de ces moyens de calcul ont été mis à la disposition des individus, y compris pour les problèmes posés par la vie courante, reléguant au grenier de l'histoire les tables de logarithmes et autres règles à calcul. Il convient de souligner le rôle ambigu des progrès en ces matières : les tables et les règles ont eu des effets positifs pendant une longue période, mais elles ont fini par être des obstacles à la recherche de moyens de calcul plus puissants et plus rapides.

Il est à noter que l'influence de cette révolution sur l'enseignement français connaît quelques lenteurs : l'analyse numérique et l'informatique ont été introduites dans les cursus des écoles d'ingénieurs et les universités vers 1960. L'emploi des calculatrices de poche est mis en vigueur dans les classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques en 1978 ; il le sera dans un avenir prévisible au concours d'entrée à l'Ecole polytechnique et au baccalauréat.

Enfin, à toutes les époques, le calcul numérique a permis de formuler des conjectures dans des secteurs mathématiques très variés. Les travaux sur la répartition des nombres premiers de Legendre, Gauss et Dirichlet sont à cet égard célèbres. Aujourd'hui, l'emploi des ordinateurs est fréquent, notamment pour les conjectures concernant les équations diophantiennes et les équations aux dérivées partielles. On a même effectué des démonstrations sur ordinateur, par une étude exhaustive de cas trop nombreux pour être étudiés à la main : citons, par exemple, en topologie algébrique, le problème des quatre couleurs. Ces conjectures peuvent porter sur l'analyse numérique elle-même. En effet, il y a deux façons d'apprécier l'efficacité d'un processus de calcul : on teste ce processus sur des exemples déjà maîtrisés par d'autres méthodes, ou bien on démontre un résultat théorique assurant la convergence et permettant de mesurer la rapidité de cette convergence. L'histoire des mathématiques montre que ces deux aspects interviennent de manière dialectique et que le plus souvent la phase expérimentale précède la phase déductive. Les mathématiques sont donc aussi une science expérimentale.

Le calcul sur les nombres réels

Développements décimaux

Nous ne traiterons pas ici des différents systèmes de numérations (cf numération).

On sait que l'école platonicienne considérait que seuls les entiers naturels non nuls sont des nombres. Par ailleurs, la théorie des grandeurs (Euclide, livres V et X) fournit un cadre très malaisé pour le calcul sur les rapports non entiers. Les mathématiciens de l'école alexandrine, en particulier Archimède (287-212 av. J.-C.), Héron (1er siècle) et Diophante (325-410), développent le calcul sur les fractions et sur les racines carrées. Ces difficultés persisteront en Occident jusqu'au XVI^e siècle, comme en témoigne la terminologie de nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables, sourds, rompus, etc.

C'est la construction du système décimal, motivée en particulier par les nécessités du commerce, qui va permettre d'unifier le domaine numérique, comme en témoigne l'œuvre de Simon Stevin (1548-1620). Le système décimal est exposé dans l'Arithmétique (1585), sous le titre : «La disme enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrants aux affaires des Hommes». Stevin insiste sur le fait que la représentation décimale illimitée permet d'assimiler les irrationnels à de véritables nombres, puisqu'ils ont les mêmes propriétés opératoires. Dans le Traité des incommensurables grandeurs (paru en 1634), Stevin approfondit la notion théorique de nombre réel ; il affirme que les difficultés rencontrées par les mathématiciens dans la mesure des grandeurs (cf. Euclide, livre X) viennent du fait «qu'ils ne tenaient pas les radicaux pour nombres, mais pour quantités sourdes, absurdes... et pas dignes d'être citées en propositions mathématiques». Cette nouvelle conception a eu une grande influence, non seulement pour la construction des nombres réels (cf Weierstrass), mais aussi pour l'élaboration du calcul différentiel : Newton, dans la Méthode des fluxions et des suites infinies (1671), s'appuie sur une analogie avec la théorie des développements décimaux pour unifier le champ des fonctions, grâce au concept de développement en série entière. De même que les développements décimaux expriment, à l'aide de nombres entiers, les fractions et les nombres définis par des radicaux, les développements en série entière expriment, à l'aide de monômes, les fonctions rationnelles et les fonctions définies par des radicaux. Le développement du binôme joue ici un rôle essentiel. Le calcul des dérivées de telles fonctions en découle aussitôt.

Jean-Louis Ovaert ■

APPROXIMATIONS GEOMETRIQUES

Ste ven LAY - Nctm

SI un dessin vaut mieux qu'un long discours, alors un graphique vaut mieux qu'une longue démonstration.
Les deux graphiques qui suivent illustrent la convergence des séries géométriques. Ils portent sur des notions dont on a tous fait le tour et pourtant ne semblent pas souvent rencontrés dans la littérature.
Ce très court mais très visuel article est extrait de Matematical Teachers de Septembre 85, revue de la NCTM, l'Apmep à l'échelle américaine.

Prenons les séries géométriques $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ avec r compris entre 0 et 1.

$S_n = \sum r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$ désigne une somme partielle et S est la limite S_n quand n tend vers l'infini.

Le premier graphique se construit à partir des points A(0,0) et B(1,0). Une droite de pente r passe par A et une droite de pente 1 passe par B. Puisque r est compris entre 0 et 1, ces deux droites se coupent en un point C.

On construit ensuite les points P_1, P_2, P_3,... comme indiqué sur la figure, chaque point étant la projection du point précédent sur l'autre droite orthogonalement ou parallèlement à la droite (AB).

Dans le triangle rectangle ABP_1, AB valant 1 et (AC) ayant pour pente r, BP_1 vaut r. (BC) ayant pour pente 1, P_1P_2 est égal à BP_1.
De même, dans le triangle rectangle $P_1P_2P_3$, P_1P_2 valant r, P_2P_3 vaut r^2 et ainsi de suite.

Appelons D la projection de C sur (AB). La mesure du segment [AD] est égale à la somme $S = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$ Et, comme BD = CD, nous en déduisons que CD = S — 1. Les triangles rectangles ABP_1 et ADC sont semblables donc :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BP_1} \text{ soit } \frac{S}{1} = \frac{S-1}{r}, \text{ ce qui donne } S = 1/(1-r)$$

La figure 2 illustre la série géométrique alternée

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = 1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \ldots \text{ avec } 0 < r < 1$$

Cette fois, la droite (AC) a pour pente —r et nous obtenons, avec AB = 1, AD = S et DC = DB = 1 — S :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BP_1} \text{ soit } \frac{S}{1} = \frac{1-S}{r}, \text{ ce qui donne } S = 1/(1+r)$$

Comme exercice d'application, vous êtes invité à étudier les cas r = 1 et r > 1. ■

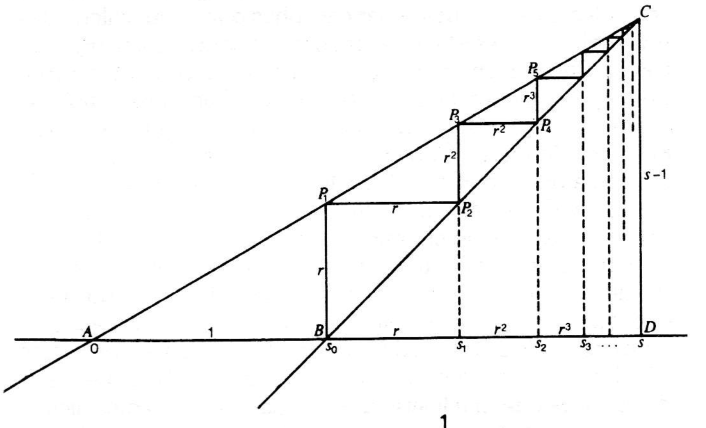


Fig. 1. $s = \frac{1}{1-r}$

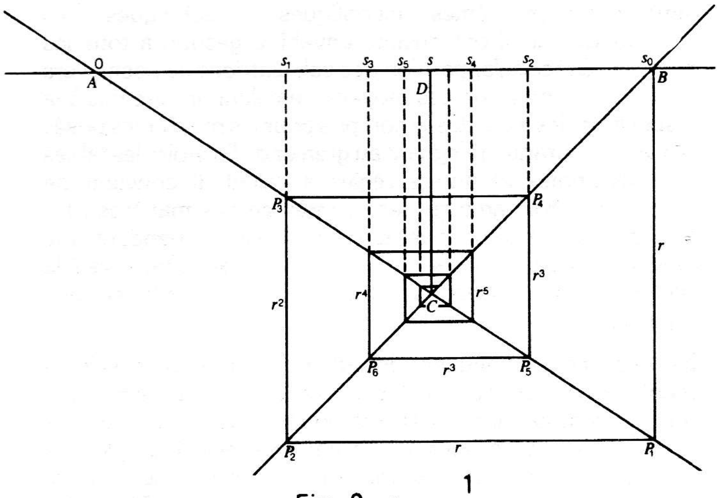


Fig. 2. $s = \frac{1}{1+r}$

DE HERON A NEWTON

Michel CLINARD - Orléans

PETITES réflexions sur une méthode itérative pour approcher une racine à toute vitesse.

De quoi s'agit-il ?

Héron : Dans le livre I d'Héron d'Alexandrie (75-150 après J.C.), on trouve un moyen d'approcher les racines carrées en considérant des rectangles de même aire que l'on rend «de plus en plus carrés» grâce à l'algorithme suivant :

- On considère un rectangle d'aire A ; x est la mesure de l'un des côtés (l'autre mesure alors A/x).
- Calculer la moyenne arithmétique des côtés : 1/2 (x + A/x).
- Considérer le nouveau rectangle d'aire A dont l'un des côtés a pour mesure la moyenne précédente.
- Réitérer la démarche en allant en 2.

A la limite, on obtient un carré de côté $\sqrt{a}$ car la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$$

converge vers $\sqrt{A}$ pour n'importe quelle valeur initiale x_0 strictement positive.

Cette méthode d'approximation était déjà connue des Babyloniens.

La suite récurrente associée à l'algorithme de Héron converge.

La suite récurrente est définie par $x_o > o$ et $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$

1. $\underline{\forall n \geqslant 1 \quad x_n > \sqrt{a}}$

En effet : $x_n - \sqrt{a} = \dfrac{(x_{n-1})^2 + a - 2.x_{n-1}.\sqrt{a}}{2x_{n-1}} = \dfrac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2x_{n-1}} > o$

2. $\underline{\forall n \geqslant 2 \quad x_n < x_{n-1}}$

En effet : $x_{n-1} - x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-1}}{2} - \dfrac{a}{2x_{n-1}} = \dfrac{(x_{n-1})^2 - a}{2x_{n-1}} > o$

puisque $x \geqslant 2$ et que $x_{n-1} > \sqrt{a}$ d'après 1

3. On a donc : $\forall n \geqslant 2 \quad \sqrt{a} < x_n < x_{n-1}$

Pour $n \geqslant 1$, la suite (x_n) est décroissante minorée. Si m est la borne inférieure de cet ensemble borné (m existe toujours) alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = m \qquad \text{et} \qquad \sqrt{a} \leq m.$$

A la limite on a alors $m = \frac{1}{2}\left(m + \frac{a}{m}\right) \Leftrightarrow m^2 = a \Leftrightarrow m \Leftrightarrow \sqrt{a}$

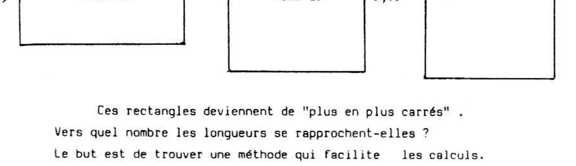
encadré 1

L'algorithme de Héron peut être le sujet d'une activité intéressante tant pour la notion de racine carrée que pour la mise en place d'un algorithme simple. Deux modes de présentation élémentaire peuvent être envisagés :

Analyse de l'algorithme : que fait ce programme ? Travail sur machine des élèves, libre choix des valeurs initiales (A, x_0), analyse des résultats, mise en évidence de l'algorithme sous-jacent, édition des procédures à la fin du travail.

Construction de l'algorithme : travail à partir de la fiche ci-jointe (encadré 2) observation des figures, utilisation des calculettes, écriture des expressions algébriques, rédaction de l'algorithme.

Algorithme de Héron : fiche de travail élève



Ces rectangles deviennent de "plus en plus carrés".
Vers quel nombre les longueurs se rapprochent-elles ?
Le but est de trouver une méthode qui facilite les calculs.

Etape	0	1	2	3	4	5	6
Longueur x	5	4					
Largeur y	3						

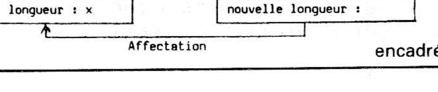
Ecrire le calcul qui permet d'obtenir y en fonction de x

(1) y =

Ecrire le calcul qui permet d'obtenir la nouvelle longueur en fonction de l'ancienne longueur x et de l'ancienne largeur y

(2) Nouvelle longueur =

y doit disparaître : Nouvelle longueur =



encadré 2

Un travail de synthèse, avec toute la classe reste à faire, il peut s'orienter vers les mathématiques (racine, suite, convergence...) ou vers l'algorithmique (boucle itérative, test d'arrêt, conditions initiales...).

Il apparaît fondamental de bien définir ses objectifs pour éviter les effets d'un «glissement métadidactique» tel que l'a défini Guy Brousseau et qui consiste en «une transformation d'un **moyen** d'enseignement (l'algorithme de Héron pour les connaissances mathématiques : suite, racine) en un **objet** d'enseignement (algorithmique...)».

Newton : Dans son ouvrage «Méthode des fluxions et séries infinies» (1671), Newton mentionne une formule d'approximation pour une solution d'équation : on peut approcher une solution s de l'équation $f(x) = 0$ par la suite
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

La convergence de cette suite est assez remarquable pour sa rapidité (en général convergence d'ordre 2 : voir encadré 3). Même si on peut, théoriquement, exhiber des exemples de non-convergence, on constate que, dans la pratique, de tels cas sont rares, surtout si l'on considère des solutions qui sont des zéros simples de l'équation.

Convergences d'une suite

1. On dit que la suite (x_n) <u>converge linéairement</u> vers s avec le <u>coefficient de convergence q</u> si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|} = q \qquad \text{et} \quad 0 < q < 1$$

c'est-à-dire que pour n assez grand on a $e_{n+1} \simeq q \times e_n$;

les erreurs e_n sont alors approximativement les termes d'une suite géométrique de raison q.

2. On dit qu'il y a <u>convergence quadratique</u> de la suite (x_n) vers s s'il existe un nombre q non nul tel que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = q$$

C'est-à-dire que pour n assez grand on a $e_{n+1} \simeq q\,(e_n)^2$

Cette convergence est beaucoup plus rapide que la convergence linéaire, en effet si $e_n < 10^{-3}$ alors

$e_{n+1} < q \times 10^{-3}$ (convergence linéaire)

$e_{n+1} < q \times 10^{-6}$ (convergence quadratique)

3. On peut définir des convergences d'ordre p s'il existe un nombre q non nul tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} = q$$

encadré 3

Considérons alors la fonction $f(x) = x^2 - A$, $(A > o)$
$\sqrt{A}$ est une solution - zéro simple - de l'équation $f(x) = o$ et la suite récurrente (x_n) associée à la méthode de Newton s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - A) / 2\,x_n = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$$

On retrouve la méthode de Héron qui converge donc quadratiquement. (Pour plus de détails voir bibliographie [1] ou [2]).

Convergence quadratique de l'Algorithme de Newton

On appelle $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la <u>fonction itérative de Newton</u> liée à la résolution de l'équation $f(x) = o$. Si s est une solution, la suite (x_n) des valeurs approchées correspondantes est définie par $x_{n+1} = g(x_n)$. On note comme précédemment la nième erreur absolue : $e_n = |x_n - s|$

Dans le cas où s est un zéro simple de f (c'est à dire que $f'(s) \neq o$) on a $g'(x) = \frac{f(x) \times f''(x)}{f'(x)^2}$ donc $g'(s) = o$ (puisque $f(s) = o$).

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| = |g'(s)(x_n - s + \tfrac{1}{2} g''(\xi)(x_n - s)^2| = \tfrac{1}{2} |g''(\xi)| \times (e_n)^2$$

avec $\xi \in [s - e_n \,;\, s + e_n]$

On constate alors que $\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{1}{2} |g''(s)| = q$

C'est à dire que, près d'une solution - zéro simple -, la méthode de Newton donne naissance à une suite qui converge de façon quadratique à condition de prendre une valeur initiale x_o suffisamment proche de s.

Pour des solutions - zéro multiple - la convergence est linéaire et souvent plus lente que celle obtenue par dichotomie.

encadré 4

Quelques remarques d'ordre didactique

Il semble difficile de présenter l'algorithme de Newton autrement qu'ostensiblement (c'est-à-dire que l'enseignant - ou le manuel - «montre» la méthode et l'élève est invité à faire quelques applications). En revanche, le cas particulier de l'algorithme de Héron permet la réalisation de «situations de classe» (au sens de G. Brousseau [3]) qui amène les élèves à construire la méthode. On a déjà cité une approche liée aux aires, en voici une autre plus «analytique» :

x_n est une approximation de $\sqrt{A}$, on en cherche une autre sous la forme $x_n + h$ avec h réel voisin de O. On a

$$(x_n + h)^2 = x_n^2 + 2\,x_n h + h^2$$

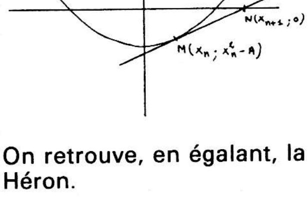
En négligeant h^2 on peut dire que $x_n^2 + 2x_n h$ est une approximation de A.

Si on prend $h = A/2\,x_n - x_n/2$ (c'est-à-dire que l'on considère $A = x_n^2 + 2x_n h$) on obtient $x_{n+1} = x_n + h = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$

qui est une nouvelle approximation de $\sqrt{a}$ (Rappelons que nous avons négligé h^2).

Enfin, l'approche géométrique ne doit pas être oubliée : on trace la représentation graphique de la fonction

$$f \left| \begin{array}{l} R \to R \\ x \mapsto x^2 - A \end{array} \right.$$



La pente de la tangente à la courbe en M $(x_n \,;\, x_n^2 - A)$ peut se calculer directement en considérant le point $N(x_{n+1} ; 0)$: $\frac{0 - (x_n^2 - A)}{x_{n+1} - x_n}$

ou par la dérivée : $2x_n$

On retrouve, en égalant, la formulation de l'algorithme de Héron.

Les situations de classe restent à construire précisément.

D'autre part, «les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes. L'activité didactique consiste à organiser ces contraintes et à maintenir les conditions des interactions optimales élèves-milieu, milieu pris au sens général (social, scolaire...) et particulier de situation de classe (matériel manipulé, questions posées, éléments constructifs de la notion, preuve...).» [3].

Donc, pour construire une situation de classe, en plus de ses convictions propres («épistémologie du professeur»), l'enseignant peut être amené à faire un inventaire des «possibles» pour étayer ses choix :

- Possibles didactiques qui ne seront pas développés ici.
- Possibles historiques : il existe, d'autres méthodes pour approcher les racines, celle de Alkarchi (11[e] siècle), voir l'article «la diagonale irrationnelle», celle de Bombelli, (16[e] siècle), qui a conduit aux fractions continues.

- Possibles épistémologiques : l'algorithme de Héron peut être perçu comme purement numérique (c'est ainsi que procédait Héron qui traitait des problèmes éventuellement d'origine géométrique, en se servant exclusivement des nombres et des opérations élémentaires ; il faudra attendre Diophante pour voir apparaître les premiers rudiments de l'algèbre).

Ce procédé est explicité par Théon de Smyrne (2[e] siècle) qui construit la suite (x_n) : $x_n = p_n/q_n$ (p_n et q_n entiers premiers entre eux) à partir de $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{17}{12}$, $x_3 = \frac{577}{408}$ les entiers p_n, q_n se construisent sans peine par récurrence (pour plus de détails voir [6] p. 94).

D'autre part, une écriture algébrique moderne

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

permet d'étudier la méthode en terme de suite convergente : suite de Cauchy ou suite monotone décroissante minorée qui débouchent sur la connaissance de R.

Enfin, des considérations algorithmiques liées aux développements des moyens modernes de calculs permettent de renouer avec le numérique par le biais de l'analyse numérique. Il n'y a plus intérêt, actuellement, à chercher à tout prix des «formules exactes», une bonne méthode numérique sera souvent mieux adaptée pour solutionner un problème.

- Possibles mathématiques : la méthode de Héron figure dans beaucoup de manuels actuels (cf. encadré 5), vulgarisation passagère sans réel fondement mathématique ou apport majeur à la formation scientifique ?

Si on constate que cette méthode repose sur le calcul de la moyenne arithmétique de x_n et A/x_n on peut s'inter roger : que se passe-t-il
- si on change de moyenne ?
- si on considère une moyenne pondérée ?
- si on recherche une convergence plus rapide vers $\sqrt{A}$?

Ces questions ont été suggérées par Monsieur P. Damey, professeur à l'Université de Bordeaux I. Les réponses qui suivent éviteront de trop longs développements calculatoires (calculs polynominaux, de dérivée, de majoration ; certains sont accessibles à des élèves de 1[ère] S).

Algorithmes itératifs pour approcher $\sqrt{A}$

Dans ce qui suit x est une approximation de $\sqrt{A}$. Les différentes fonctions f proposées permettent de construire des algorithmes itératifs correspondant aux suites récurrentes $x_{n+1} = f(x_n)$. Ces suites convergent vers $\sqrt{A} = f(\sqrt{A})$.

Il est donc important d'étudier ces convergences d'un double point de vue :
- la vitesse de convergence (linéaire, quadratique...) ;
- l'intervalle de convergence $I = [\sqrt{A} - h \,;\, \sqrt{A} + h]$:

Quel serait l'intérêt d'un algorithme très rapide sur un tout petit intervalle I et linéaire ailleurs ?

- Utilisation des différentes moyennes de x et A/x

La forme générale des moyennes s'écrit

$$f(x) = \bar{x}(a) = \left[\frac{1}{2}\left(x^a + (A/x)^a\right)\right]^{\frac{1}{a}}$$

a est un entier.

a = 1 : moyenne arithmétique ;
a = 2 : moyenne quadratique ;
a = -1 : moyenne harmonique ; quand a tend vers 0 : moyenne géométrique ; quand a tend vers $+\infty$ on obtient sup (x ; A/x) (inf avec $-\infty$).

encadré 5

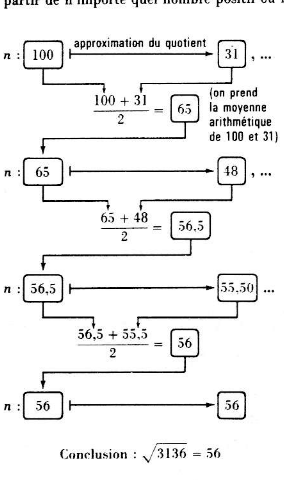
POUR ALLER PLUS LOIN

CALCUL D'UN RADICAL

- Le calcul de $\sqrt{n}$ est, bien sûr, immédiat si tu disposes d'une calculatrice :
– à touche « $\sqrt{\ }$ »
– à touche « puissance », type « x^y ». Il suffit de demander $n^{\frac{1}{2}}$ (puisque $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$).
- Avec une calculatrice plus simple, où à la main, tu peux procéder par essais, avec des encadrements de $\sqrt{n}$ de plus en plus serrés. Mais cela risque d'être très lent alors que la méthode dite « de Héron » est rapide :

Calcul d'un radical par la méthode de Héron :

Exemple 1 : Calculons $\sqrt{3136}$. Posons $n = 3136$.
$100^2 = 10\,000$. Donc $100 > \sqrt{n}$. A partir de là voici la méthode de Héron (qui peut se dérouler à partir de n'importe quel nombre positif ou nul) :



Conclusion : $\sqrt{3136} = 56$

Quelques (timides) justifications (tu feras mieux en Seconde) :
- Nous savons que $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Posons $n = ab$ avec $a > \sqrt{n}$. Alors $b < \sqrt{n}$ (pour compenser) et, donc : $a > \sqrt{n} > b$.
- Formons $\frac{a+b}{2}$.
- Comparons-le à $\sqrt{n}$, c'est-à-dire à $\sqrt{ab}$, en formant leur différence :

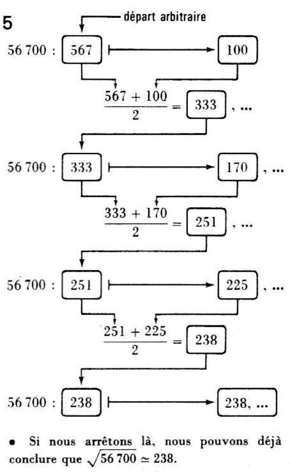
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$

Donc $\frac{a+b}{2} > \sqrt{n}$.
- D'autre part $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$.

Donc $\frac{a+b}{2} < a$.
- D'où $a > \frac{a+b}{2} > \sqrt{n}$.
- En remplaçant a par $\frac{a+b}{2}$ nous allons donc nous rapprocher de $\sqrt{n}$.

- Les deux colonnes de nombres : 100; 65; 56,5; 56 et 31; 48; 55,5; 56 constituent une **suite croissante** et une **suite décroissante** qui « convergent » vers 56.

Exemple 2 : Calcul de $\sqrt{56\,700}$



- Si nous arrêtons là, nous pouvons déjà conclure que $\sqrt{56\,700} \simeq 238$.
- Mais en précisant la division ci-dessus, nous obtenons 238,235 294 et, en poursuivant,

$$56\,700 : \left(\frac{238 + 238{,}235\,2\ldots}{2}\right) \simeq 56\,700 : 238{,}117\,7 \simeq 238{,}117\,64\ldots$$

D'où $\sqrt{56\,700} \simeq 238{,}117\,6$. *Relève les deux suites de nombres, l'une croissante, l'autre décroissante, qui convergent vers le radical.*

- Il vaut mieux arrondir tant que le diviseur et le quotient sont éloignés l'un de l'autre. Il ne faut plus le faire, si l'on veut un radical précis, dès que le diviseur et le quotient sont très voisins.
- Rappelons que, par l'écriture du type « *a*, ... » nous voulons dire que ce nombre comporte d'autres chiffres, non précisés.
- Par cette méthode, vérifie, en quelques divisions, que :

$$\sqrt{78\,965\,412} \simeq 8\,886{,}248\,5$$
$$\sqrt{0{,}000\,007\,8} \simeq 0{,}002\,792\,8$$

Utilisation, pour le calcul de $\sqrt{n}$, de puissances de 10

- 1° **Exemple 1 :** Calcul de $\sqrt{786\,000\,000\,000}$. Ici $n = 7\,860 \times 10^8$.
D'où $\sqrt{n} = 10^4 \times \sqrt{7\,860}$

Exemple 2 : Calcul de $\sqrt{0{,}000\,007\,8}$. Ici $n = 780 \times 10^{-8}$.
D'où $\sqrt{n} = \sqrt{780} \times 10^{-4}$.

Hachette ZEHREN - BAREIL 3[e]

Les suites associées convergent pour tout x_0 de départ positif, elles sont croissantes et majorées par $\sqrt{A}$ quand a est négatif (à partir de x_1), elles sont décroissantes et minorées par $\sqrt{A}$ quand a est positif.

La convergence est quadratique sur un intervalle dont l'amplitude décroît quand $|a|$ augmente (amplitude 1 pour a = 2 ; amplitude 0,2 pour a = 3).

D'autre part, on démontre que $\bar{x}(a)$ est une fonction croissante de a ce qui permet d'ordonner les moyennes et dire que la moyenne arithmétique pour a positif et la moyenne harmonique pour a négatif correspondent aux meilleures convergences (c'est-à-dire que pour une même approximation x, l'approximation suivante $\bar{x}(1)$ ou $\bar{x}(-1)$ sont plus proches de $\sqrt{A}$ que tout autre valeur $\bar{x}(a)$.

Enfin, l'algorithme associé à la moyenne arithmétique converge plus vite que celui associé à la moyenne harmonique et quadratiquement à partir de x_1 quel que soit x_0.

Pour a = 1 on a $\bar{x}(1) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$: l'algorithme de Héron !

L'algorithme associé à la moyenne arithmétique converge plus vite que celui associé à la moyenne harmonique

On note $f(x) = \bar{x}(1) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$ et (x_n) la suite associée, $g(x) = \bar{x}(-1) = [\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{A}{x}})]^{-1} = \frac{2ax}{x^2 + a}$ et (y_n) la suite associée.

La convergence est quadratique si $|f'(x)| < 1$ ou $|g'(x)| < 1$ (on peut se reporter à [4] page 16)

1. Intervalle de convergence quadratique

$x_n > \sqrt{\frac{A}{3}}$ donc convergence assurée dès x_1 ($x_1 > \sqrt{A}$)

$y_n > \sqrt{(\sqrt{5}-2) \times A}$ la convergence quadratique peut se faire attendre en particuliuer si y_0 est voisin de o.

2. Comparaison des erreurs.

A partir d'une même erreur au rang n :

$x_n - \sqrt{A} = \sqrt{A} - y_n = \varepsilon$, on montre que

$$\sqrt{A} - y_{n+1} > x_{n+1} - \sqrt{A} \iff 4\sqrt{A} > \varepsilon$$

Cette dernière inégalité est facilement obtenue (souvent avec l'approximation de départ).

encadré 6

- Utilisation d'une moyenne pondérée

$$f(x) = \frac{1}{a+b}(a\,x + b\frac{A}{x})$$

La suite associée (x_n) converge, en effet :

$x_n < \sqrt{A} \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

$x_n > \sqrt{A} \Rightarrow x_{n+1} < x_n$

La convergence peut être alternée (à partir d'un certain x_n si $b > a$)

La convergence est linéaire,

en effet $\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left|\frac{a-b}{a+b}\right| < 1$

avec $e_n = |x_n - \sqrt{A}|$.

Enfin, la vitesse de convergence dépend de la quantité $c = \left|\frac{a-b}{a+b}\right|$:

- elle est médiocre quand c est voisin de 1 c'est-à-dire (a voisin de 0 ou b grand) ou-exclusif (b voisin de 0 ou a grand) ;

- elle est la meilleure possible quand c = 0, c'est-à-dire a = b ; on retrouve - faut-il le dire ? - l'algorithme de Héron !!

- Utilisation des côtés d'un rectangle d'aire A.

La première présentation de la méthode de Héron faisait référence à un problème d'aire associé à la fonction F :

$F(x) = x^2 - A$

Si on compare les côtés x et A/x d'un rectangle d'aire A on obtient deux nouvelles fonctions :

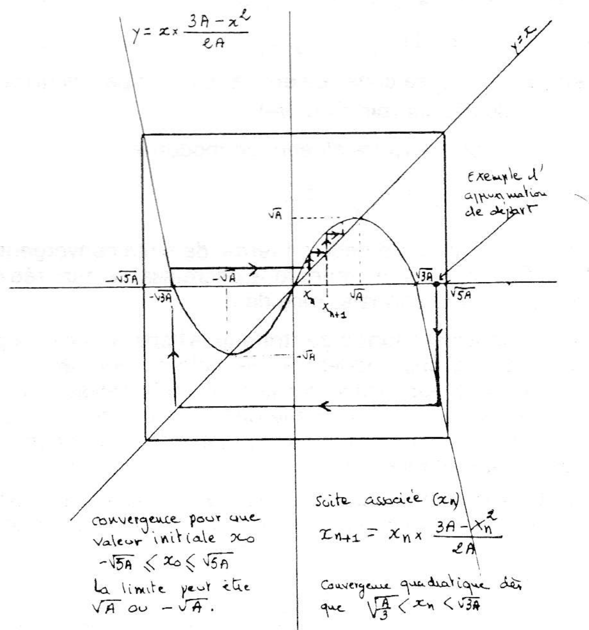
G : $G(x) = x - A/x$ comparaison par différence

H : $H(x) = 1 - (A/x)/x = 1 - A/x^2$ comparaison par quotient

Les suites associées demandent de prendre en compte les fonctions itératives de Newton ($f(x) = x - F(x)/F'(x)$ voir encadré précédent). On retrouve les moyennes arithmétique et harmonique pour f(x) et g(x). La suite associée à h(x) est plus délicate à traiter : on est assuré d'une convergence quadratique pour une valeur initiale comprise entre $\sqrt{A/3}$ et $\sqrt{3A}$, toutefois pour toute valeur comprise entre $-\sqrt{5A}$ et $\sqrt{5A}$ on a une convergence vers $\sqrt{A}$ ou... $-\sqrt{A}$! Dans tous les cas, la convergence obtenue est la moins bonne des trois, Héron reste donc le meilleur !

Comparaison des cotes x et A/x par quotient

$$H(x) = 1 - \frac{A}{x^2} = 0 \qquad \text{ou } h(x) = x \cdot \frac{3A - x^2}{2A} = x$$



encadré 7

On comprend mieux l'importance donnée à cet algorithme dans l'enseignement, les raisons méritent toutefois d'être évoquées en classe, voire d'être mises en évidence par les élèves dans une des situations simples précédentes.

De plus, cette méthode se généralise sans problème aux approximations de la racine $k^{ième}$ avec les mêmes propriétés : on considère la moyenne arithmétique des k côtés d'un hypercube, k-1 côtés ont pour mesure x, le dernier a pour mesure A/x^{k-1}

On a alors la suite d'approximation :

$$x_{n-1} = \frac{1}{k}[(k-1)\,x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}]$$

On peut aussi appliquer la méthode Newton à partir de la fonction f :

$f(x) = x^k - A$; $f(x) = 0$ ayant pour racine $\sqrt[k]{A}$.

La rapidité de l'algorithme Héron-Newton peut-elle être mise en défaut ?

Dans [4], il est proposé de trouver en exercice une méthode pour améliorer la convergence de l'algorithme de Newton en déterminant h(x) dans $G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} + h(x)\,[\frac{F(x)}{F'(x)}]^2$ pour obtenir une convergence cubique.

En appliquant cette idée à $F(x) = x^2 - A$, on obtient une condition nécessaire $h(\sqrt{a}) = -1/2\sqrt{A}$ - on peut prendre la fonction constante définie par $h_1(x) = -1/2\sqrt{A}$ mais $h_2(x) = -x/(x^2 + a)$ convient mieux car les erreurs sont plus petites. Dans les deux cas la convergence est d'ordre 4.

Avec $h_2(x)$ on obtient donc $G_4(x) = (x^4 + 6Ax2 + A^2)/(4x^3 + 4Ax)$ qui permet de définir la suite des approximations. Avec l'algorithme de Héron on a

$$G_2(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x}) = \frac{x^2 + A}{2x}$$

On peut alors généraliser en utilisant le développement du binôme $(x + \sqrt{a})^n$:

$$G_n(x) = \frac{x^n + C_n^{n-2}\, A\, x^{n-2} + C_n^{n-4}\, A^2\, x^{x-4} + \ldots}{C_n^{n-1}\, x^{n-1} + C_n^{n-3}\, A\, x^{n-3} + C_n^{n-5}\, A^2\, x^{n-5} + \ldots}$$

On obtient une suite décroissante vers $\sqrt{A}$ à partir du deuxième terme x_1 et convergente d'ordre n.

Les tableaux en annexe permettent de constater les apports de cet algorithme : la vitesse de convergence double quand on passe de l'ordre 2 à l'ordre 4 (ce qui était prévisible). Ce gain de vitesse n'existe plus quand on passe à l'ordre 6. En général une seule itération supplémentaire avec l'ordre 4 suffit pour retrouver le résultat obtenu avec l'ordre 6, ce qui peut s'expliquer par le fait que la différence entre e^6 et e^4 est négligeable quand e est petit.

Cette méthode généralisée sera connue et utilisée désormais sous le nom de «Recette du Plot» pour la distinguer de celle de ses ancêtres célèbres (à moins qu'un lecteur apporte le témoignage de son existence plus ancienne).

On peut aussi raisonnablement penser que l'algorithme de Héron-Newton continuera à être utilisé et étudié en tant qu'outil et objet d'enseignement pour sa simplicité, pour la richesse des apports historiques, mathématiques et didactiques (s'ils sont explicités).

Tant pis pour le PLOT qui ne fera pas recette.

Michel CLINARD

■

Extraction de la racine carrée d'un nombre

Ce procédé, qui était enseigné dans les classes de troisième il y a encore quelques décennies (voir Monge et Guinchan) mérite quelque attention.

Il s'agit d'une variante de méthodes anciennes, en particulier celle d'Alkarchi (algébriste se référant à Diophante - début 11e siècle), qui est une interpolation linéaire conduisant à des approximations par défaut de $\sqrt{A}$: ... x_n, x_{n+1}, ...

avec $x_{n+1} = x_n + \dfrac{A - x_n^2}{1 + 2x_n}$ et $x_0 < \sqrt{A}$

Si on considère la courbe représentative de la fonction $f : f(x) = x^2 - A$,

x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite (PQ) telle que

$P(x_n\,;\, f(x_n))$ et $Q(1 + x_n\,;\, f(1 + x_n))$

La correction apportée à x_n est toujours inférieure à 1. En effet :

$(x_n)^2 < A < (1 + x_n)^2$

Soit $0 < A - x_n^2 < 1 + 2x_n$

L'extraction de racine proposée apparaît quelque peu mystérieuse pour ceux qui la découvre ou la redécouvre. Elle repose sur une double séquentialité : celle des approximations successives et celle des unités d'ordre n : ... milliers, centaines, dizaines, unités, qui rend possible des calculs simples «à la main».

On considère x_0, l'approximation par défaut de $\sqrt{A}$ telle que $x_0 = \bar{x}_0 \times 10^n$ (x_0 est le nombre d'unité d'ordre x : $\bar{x}_0$ entier et $1 < x_0 < 9$). Il existe h tel que

$A = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0h + h^2$

soit $A - x_0^2 = (2x_0 + h) \times h$.

Il s'agit alors de trouver h' de la forme $h' = \bar{h}' \times 10^{n-1}$ ($\bar{h}'$, nombre d'unités d'ordre n-1, $\bar{h}'$ entier et $1 \leqslant \bar{h}' \leqslant 9$) tel que $(2x_0 + h') \times h' \leqslant A - x_0^2$. On comprend alors l'algorithme décrit : multiplier l'approximation par 2, rechercher l'entier h' qui convient, prendre la nouvelle approximation $x_1 = x_0 + h'$.

Le fait de ne travailler qu'avec des «tranches de deux chiffres», correspond à la seconde séquentialité décrite précédemment, permet d'«alléger» les calculs et se justifie par le fait que

$(\bar{x}_0 \times 10^n)^2 \leqslant A < [(\bar{x}_0 + 1) \times 10^n]^2$

Bien que cet algorithme corresponde à une convergence d'ordre 1 (comme celui d'Alkarchi), son efficacité (en l'absence de calculettes), réside dans la simplicité des calculs, il demande toutefois un effort d'apprentissage et de mémorisation tel qu'il est présenté ici, en l'absence de toute construction susceptible de lui donner un sens.

De tels algorithmes risquent fort de contribuer à développer une vision magique des mathématiques même si - ou parce que - ils sont efficaces ; ils deviennent alors des obstacles à la compréhension ou à la formation des notions sous-jacentes.

Paradoxalement, c'est parce que ces algorithmes simples existent que les concepts associés sont si performants (pour plus de détails voir «Introduction du débat scientifique en situation d'enseignement» [5]).

Bibliographie

[1] Mathématiques et informatique. A. Engel, Cedic.

[2] Démarches algorithmiques en classe de mathématiques. Bouquard, Clinard. IREM Orléans-Tours, Novembre 1986.

[3] Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. G. Brousseau. Thèse d'état, Bordeaux I, Décembre 1986.

[4] Introduction à l'analyse numérique. Baranger. Hermann.

[5] Textes et comptes rendus de la 4e Ecole d'Eté de Didactique. Orléans, Juillet 1986, IREM - Paris - Sud.

[6] Nombre, Mesure, Continu. Jean Dhombres. Cedic, IREM - Nantes.

[7] A la recherche de ses racines... M. Glaymann - in B. Vert 354, p. 331.

ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

Programmes de 1947

LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES

ARITHMÉTIQUE
ALGÈBRE
GÉOMÉTRIE

par

M. MONGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure.
Professeur agrégé au Lycée Michelet.

et

M. GUINCHAN
Licencié ès Sciences.
Professeur de Cours Complémentaire

CLASSE DE 3e

(Enseignement court)

TROISIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE CLASSIQUE, EUGÈNE BELIN
8, rue Férou

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE ENTIER

Deux cas sont à envisager :

86. Premier cas : Le nombre entier donné est inférieur à 100.

La racine carrée est inférieure à 10 et on doit connaître de mémoire les carrés des nombres entiers inférieurs à 10.

Exemple : Soit à calculer $\sqrt{57}$

57 est compris entre $49 = 7^2$ et $64 = 8^2$.

La racine carrée de 57 est donc 7; le reste est égal à $57 - 7^2 = 8$.

87. Deuxième cas : Le nombre entier donné est supérieur à 100.

On applique la règle suivante :

Règle :

On partage le nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite (la première tranche à gauche peut n'avoir qu'un chiffre).

. . . .

On extrait la racine carrée de la première tranche à gauche ce qui donne le premier chiffre de la racine et l'on soustrait de la première tranche le carré de ce chiffre (la différence est le premier reste partiel).

A la droite de ce reste, on abaisse la tranche suivante dont on sépare, par un point, le dernier chiffre à droite.

. . . .

On divise le nombre placé à gauche du point par le double du chiffre trouvé à la racine.

Le quotient est le deuxième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort.

Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du double du premier chiffre de la racine et on multiplie le nombre ainsi obtenu par le chiffre à essayer.

Si le produit peut se retrancher du premier reste partiel suivi de la deuxième tranche, le chiffre essayé est exact (la différence est le deuxième reste partiel); sinon il faut effectuer un essai avec le chiffre inférieur d'une unité jusqu'à ce que la soustraction soit possible. Le premier chiffre remplissant cette condition est le deuxième chiffre de la racine.

A la droite du deuxième reste partiel, on abaisse la troisième tranche dont on sépare, par un point, le dernier chiffre à droite.

. . . .

On divise le nombre placé à gauche du point par le double de la racine trouvée le quotient est le troisième chiffre de la racine ou un chiffre trop fort; on le vérifie comme on a vérifié le deuxième chiffre.

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait abaissé toutes les tranches du nombre donné.

Le dernier reste est le reste de l'opération.

88. Exemple : Extraire la racine carrée du nombre 76 528.

Partageons ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite.

La racine de 7 est 2; nous écrivons 2 à la racine. Le carré de 2, soit 4, retranché de 7 donne pour reste 3. A la droite de ce reste nous abaissons la tranche suivante 65 et nous séparons par un point le dernier chiffre à droite 5.

```
 7'6 5'2 8 | 2
-4         |
 3 6.5     |
```

. . . .

Nous doublons la racine trouvée 2, soit 4 et nous divisons 36 par 4.

Essayons le quotient 8. Écrivons 8 à la droite de 4 et multiplions 48 par 8. Il vient 384 qui ne peut être soustrait de 365; 8 est donc un quotient trop fort, essayons 7. Écrivons 7 à la droite de 4 et multiplions 47 par 7. Il vient 329 qui peut être retranché de 365; 7 est donc le deuxième chiffre de la racine et le deuxième reste partiel est 36.

A la droite de ce reste nous abaissons la tranche suivante 28 et nous séparons par un point le dernier chiffre à droite 8.

```
 7'6 5'2 8 | 2 7
-4         | 4 8 x 8 = 3 8 4
 3 6.5     | 4 7 x 7 = 3 2 9
-3 2 9     |
   3 6 2.8 |
```

```
 7'6 5'2 8   | 2 7 6
-4           | 4 8 x 8 = 3 8 4
 3 6.5       | 4 7 x 7 =   3 2 9
-3 2 9       | 5 4 6 x 6 = 3 2 7 6
   3 6 2.8   |
 - 3 2 7 6   |
     3 5 2   |
```

Nous doublons la racine 27 soit 54 et nous divisons 362 par 54; essayons le quotient 6. Écrivons 6 à la droite de 54 et multiplions 546 par 6; il vient 3 276 qui peut être soustrait de 3 628. 6 est donc le troisième chiffre de la racine et le reste de l'opération est 352.

89. *Remarques :*

```
7'6 5'2 8 | 2 7 6
3 6.5     | 4 8 x 8 = 3 8 4
  3 6 2.8 | 4 7 x 7 =   3 2 9
    3 5 2 | 5 4 6 x 6 = 3 2 7 6
```

1. Dans la pratique on simplifie l'opération en effectuant directement les soustractions sans écrire les produits à retrancher.

```
4'3 6'9 7 | 2 0 9
0 3 6.9 7 | 4 0 9 x 9 = 3 6 8 1
      1 6 |
```

2. Si l'une des divisions donnait zéro pour quotient on écrirait un zéro à la droite de la racine et on abaisserait la tranche suivante.

3. Il découle de la règle d'extraction de la racine que le nombre des chiffres de la racine est égal au nombre des tranches partagées dans le nombre.

90. Preuve de la racine carrée.

On vérifie que :

1o Le reste de l'opération est au plus égal au double de la racine.

2o Le nombre donné est égal au carré de la racine trouvée augmenté du reste.

```
RACINE CARREE DE   2

APPROXIMATION DE DEPART  : 1000

ITERATION N°  1

ORDRE 2 :  500.001
ORDRE 4 :  250.002499996
ORDRE 6 :  166.6705555389631

ITERATION N°  2

ORDRE 2 :  250.002499996
ORDRE 4 :  62.51062464301703
ORDRE 6 :  27.80175512906461

ITERATION N°  3

ORDRE 2 :  125.0052499580005
ORDRE 4 :  15.66763299486837
ORDRE 6 :  4.772738729456669

ITERATION N°  4

ORDRE 2 :  62.51062464301703
ORDRE 4 :  4.075441240519499
ORDRE 6 :  1.488486956359724

ITERATION N°  5

ORDRE 2 :  31.27130960206219
ORDRE 4 :  1.579548752406015
ORDRE 6 :  1.414213563166932

ITERATION N°  6

ORDRE 2 :  15.66763299486837
ORDRE 4 :  1.414239873591531
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  7

ORDRE 2 :  7.897642347856358
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  8

ORDRE 2 :  4.075441240519499
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  9

ORDRE 2 :  2.283092824392554
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  10

ORDRE 2 :  1.579548752406015
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  11

ORDRE 2 :  1.422866579578668
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  12

ORDRE 2 :  1.414239873591531
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  13

ORDRE 2 :  1.414213562617848
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  14

ORDRE 2 :  1.414213562373095
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095
```

```
RACINE CARREE DE   2

APPROXIMATION DE DEPART  : .001

ITERATION N°  1

ORDRE 2 :  1000.0005
ORDRE 4 :  500.0012499995
ORDRE 6 :  333.3352777757037

ITERATION N°  2

ORDRE 2 :  500.0012499995
ORDRE 4 :  125.0053124553755
ORDRE 6 :  55.56754577992679

ITERATION N°  3

ORDRE 2 :  250.00262499475
ORDRE 4 :  31.2713252164103
ORDRE 6 :  9.331146001789546

ITERATION N°  4

ORDRE 2 :  125.0053124553755
ORDRE 4 :  7.897646211720405
ORDRE 6 :  1.952807928195619

ITERATION N°  5

ORDRE 2 :  62.51065588770507
ORDRE 4 :  2.283093646797556
ORDRE 6 :  1.414260948124878

ITERATION N°  6

ORDRE 2 :  31.2713252164103
ORDRE 4 :  1.422866604717229
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  7

ORDRE 2 :  15.66764078607512
ORDRE 4 :  1.414213562617851
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  8

ORDRE 2 :  7.897646211720405
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  9

ORDRE 2 :  4.075443110503606
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  10

ORDRE 2 :  2.283093646797556
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  11

ORDRE 2 :  1.579549005833422
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  12

ORDRE 2 :  1.422866604717229
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  13

ORDRE 2 :  1.414239873743944
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  14

ORDRE 2 :  1.414213562617851
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095
```

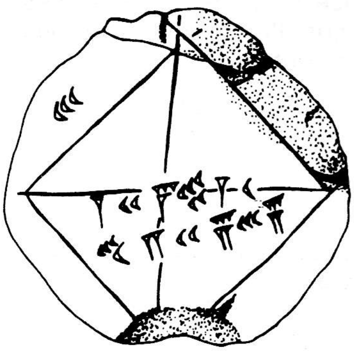
```
RACINE CARREE DE   2

APPROXIMATION DE DEPART  : 1

ITERATION N°  1

ORDRE 2 :  1.5
ORDRE 4 :  1.416666666666667
ORDRE 6 :  1.414285714285714

ITERATION N°  2

ORDRE 2 :  1.416666666666667
ORDRE 4 :  1.41421356237469
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  3

ORDRE 2 :  1.41421568627451
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  4

ORDRE 2 :  1.41421356237469
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095

ITERATION N°  5

ORDRE 2 :  1.414213562373095
ORDRE 4 :  1.414213562373095
ORDRE 6 :  1.414213562373095
```

LA DIAGONALE IRRATIONNELLE

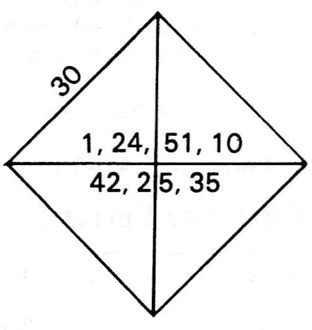
Michel DARCHE - Orléans

DEPUIS la découverte de ce que nous appelons aujourd'hui "le théorème de Pythagore", de nombreuses tentatives ont été faites pour approcher sinon atteindre $\sqrt{2}$. Nous vous en proposons ici quelques-unes.

La plus ancienne de ces approximations se trouve sur une tablette babylonienne de 8 centimètres de côté.



Copie d'une tablette babylonienne (grandeur réelle)



Transcription moderne

(icono Yale Babylonian Collection Pl. 8b. YBC 7289)

Cette tablette, représente un carré et ses diagonales. Elle donne en plus un message composé de trois nombres écrits en base soixante :

a = 30
b = 1, 24, 51, 10
c = 42, 25, 35

Vérifions que a x b = c :

1, 24, 51, 10
x 30

= 30, 720, 1530, 300
= 30, 720, 1535
= 30, 745, 35
= 42, 25, 35

Multiplier le côté du carré par b donne donc la diagonale de ce même carré. Connaissant, de nos jours, le théorème de Pythagore, nous pouvons en déduire que b est une bonne approximation de $\sqrt{2}$. On le vérifie de deux façons :

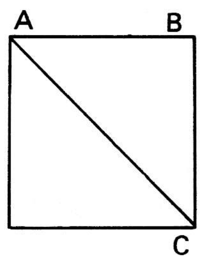
- le carré de b, en base soixante, est égal à 1, 59, 59, 59, 38, 1, 40.
- b, en base dix, s'écrit 1,414212963... alors que $\sqrt{2}$ s'écrit 1,414221356... soit une erreur de un cent millième !

Dans un livre indien d'Apastamba - Sulba - Sutra datant de 800 ans avant notre ère, on trouve une autre approximation de $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} \quad \text{soit} \quad \frac{577}{408}$$

Les cinq premiers chiffres de l'écriture décimale de cette fraction sont les mêmes que pour $\sqrt{2}$.
Les Grecs semblent avoir été les premiers à reconnaître que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Il est "incommensurable" c'est-à-dire qu'il ne peut être écrit comme rapport de deux nombres entiers.

Voici la preuve fournie par Aristote :



Supposons que AC soit "commensurable" avec AB
Posons AC/AB = d/a
avec a et d sans diviseur commun.
On a d > a et $AC^2/AB^2 = d^2/a^2$

De $AC^2 = 2.AB^2$, $d^2 = 2.a^2$ on déduit que d^2 et donc d sont pairs.

Posons d = 2c. Alors $d^2 = 2.a^2$ s'écrit $4.c^2 = 2.a^2$, soit $2.c^2 = a^2$.
On en déduit que a est pair, ce qui est en contradiction avec le fait que a et d n'ont pas de diviseur commun. L'hypothèse de départ est donc fausse.

Ce sont les **Pythagoriciens** qui ont, les premiers, inventé une méthode pour calculer des approximations de $\sqrt{2}$ de plus en plus précises.

Le procédé repose sur une autre approximation : si d/a est une valeur approchée de $\sqrt{2}$, alors le triangle isocèle est presque... rectangle.

La mesure de l'erreur est donnée par le théorème de Pythagore : $e = d^2 - 2.a^2$. Si le triangle isocèle (a, a, d) est presque rectangle, une formule, dûe à Euclide : $2.a^2 - d^2 = (2.a + d)^2 - 2(a + d)^2$, permet d'ajouter qu'il en est de même du triangle $(a + d, a + d, a + 2.d)$ et $\frac{2.a+d}{a+d}$ est une autre approximation de $\sqrt{2}$, meilleure que d/a !

A la règle et au compas

La méthode qui suit est décrite par Théon de Smyrne (130 ap. J.-C.), "l'unité étant le commencement de toute chose, il doit en être de même du coté et de sa diagonale, au moins au début !"

Commençons avec deux longueurs unités, l'une est celle du premier coté a_1,

l'autre est celle de la première diagonale d_1.

Les seconds coté et diagonale (a_2, d_2) sont construits à partir des premiers, les troisièmes (a_3, d_3) et les suivants le sont comme suit :

$a_2 = a_1 + d_1$, $d_2 = 2.a_1 + d_1$,

$a_3 = a_2 + d_2$, $d_3 = 2.a_2 + d_2$,

$a_4 = a_3 + d_3$, $d_4 = 2.a_3 + d_3$, etc.

puisque $a_1 = d_1 = 1$, il en résulte que :

$a_2 = 1 + 1 = 2$ et $d_2 = 2.1 + 1 = 3$ d'où $\sqrt{2} \simeq 3/2$,

$a_3 = 2 + 3 = 5$ et $d_3 = 2.2 + 3 = 7$ d'où $\sqrt{2} \simeq 7/5$,

$a_4 = 5 + 7 = 12$ et $d_4 = 2.5 + 7 = 17$ d'où $\sqrt{2} \simeq 17/12$, et ainsi de suite.

Cette méthode était connue de Platon 5 siècles avant J.-C.

Une autre approximation de $\sqrt{2}$ fait appel aux fractions continues. Cette méthode, parfois appelée méthode de Héron, est utilisée plus généralement pour trouver une mesure approchée de la racine carrée d'un nombre A.

Elle est décrite au XIVeme siècle par Rhabdas.
Si a est le plus grand nombre dont le carré est inférieur à A, alors, si nous posons $A = a^2 + b$, les nombres

$$a + \frac{b}{2a}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}, \quad a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a}}}$$

... fournissent des approximations de $\sqrt{2}$.

Avec $A = 2$ on obtient 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, 99/70, 239/169, 577/408,... qui est la séquence fournie par la méthode des Pythagoriciens.
La septième approximation est celle fournie par Apastamba - Sulba - Sutra.

Avant l'ère des calculettes

Rappelez-vous, l'extraction de racine de 2!!!

2.00 00 00 00 00	1,414213	
−1	1	
1.00		
96	24 x 4 = 96	(A)
4 00		
2 81	281 x 1 = 281	(B)
1 19 00		
1 12 96	2824 x 4 = 11296	(C)
6 04 00		
5 65 64	28282 x 2 = 56564	
38 36 00		
28 28 41	282841 x 1 = 282841	
10 07 59 00	2828423 x 3 = ...	

La méthode est rappelée par ailleurs par Monge et Guinchan dans l'annexe à l'article de Michel Clinard.
Pourquoi ça marche si bien ?
A l'étape A,
il s'agit de trouver le plus grand entier n d'un chiffre tel que : $(10 + n)^2 \leqslant 200$.
Puisque $(10 + n)^2 = 100 + (20 + n)\,n$,
cela revient à trouver n tel que $(20 + n)\,n \leqslant 100$.

A l'étape B,
il faut trouver n tel que $(140 + n)^2 \leqslant 20\,000$, soit : $(280 + n)\,n \leqslant 400$.
A l'étape suivante : $(1410 + n)^2 \leqslant 2\,000\,000$, soit : $(2820 + n)\,n \leqslant 11\,900$.
Cette méthode était connue des Grecs mais ils utilisaient pour ce faire la base soixante, héritage des Babyloniens. C'est ainsi que l'on trouve chez les Babyloniens, 1600 ans avant notre ère :

$$\sqrt{2} \simeq 1^\circ + 24' + 51'' = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600}$$

soit environ 1,41416.

Cherchez l'erreur

- Avec la méthode de Newton :

En partant de $x = 1$, avec $y = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

on obtient $y_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{x}) = 1{,}5$

puis $y_2 = \frac{1}{2}(1{,}5 + \frac{1}{1{,}5}) = 1{,}417$

puis $y_3 = \frac{1}{2}(1{,}417 + \frac{1}{1{,}417}) = 1{,}414216$

Après 3 approximations, l'erreur est inférieure à deux millionièmes.

- Avec la méthode des fractions continues.

Posons $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + x_n}$ et notons e_n l'erreur d'approximation.

On a $e_{n+1} = [-(\sqrt{2} - 1)\,e_n] \simeq [(-\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} + 1)]\,e_n$ soit environ $-1/6$ de e_n.

L'erreur est réduite par un facteur 6 à chaque étape. C'est une méthode linéaire puisque e_{n+1} est proportionnel à e_n.

Pour la méthode de Newton, les erreurs successives sont liées par la relation : $e_{n+1} = e_n^2 / 2(\sqrt{2} + e_n)$ soit environ $e_n^2 / 2\sqrt{2}$.

On a là une méthode d'approximation quadratique puisque e_{n+1} est proportionnel au carré de e_n.

Si x_n a p décimales correctes, alors x_{n+1} aura 2p décimales correctes. ■

APPROCHEZ LE NOMBRE D'OR

J.-J. PAROT et Abd el Aziz CHEIKH - Nouakchott

LA première manifestation humaine de la connaissance du nombre d'or remonterait à 10 000 ans comme cela aurait été constaté dans le temple d'Andros découvert sous la mer des Bahamas. La pyramide de Chéops (2 800 av. J.-C.) a des dimensions qui mettent en évidence l'importance que son architecte attachait au nombre d'or. Les bâtisseurs de cathédrales faisaient appel au nombre d'or qui donnait " la divine proportion " permettant d'obtenir les meilleures perspectives. Le nombre d'or n'apparaît pas seulement dans les constructions humaines ; on en trouve de nombreuses manifestations dans l'univers du vivant : les dimensions d'un individu qui nous semble " bien proportionné " ; les galaxies auraient une structure constituée de bras en forme de spirale logarithmique dont la raison est le nombre d'or, spirales identiques à celle de la structure d'une Ammonite !
Nous ne prétendons pas infirmer ou prouver de telles conjectures qui excitent l'imagination et la curiosité mais aborder quelques propriétés du nombre d'or en relation avec des suites de nombres et des suites de " rectangles dorés " qui vont nous permettre de construire une spirale logarithmique ressemblant à celle de la structure de l'Ammonite !

" LE NOMBRE D'OR φ " à partir d'une suite de FIBONACCI

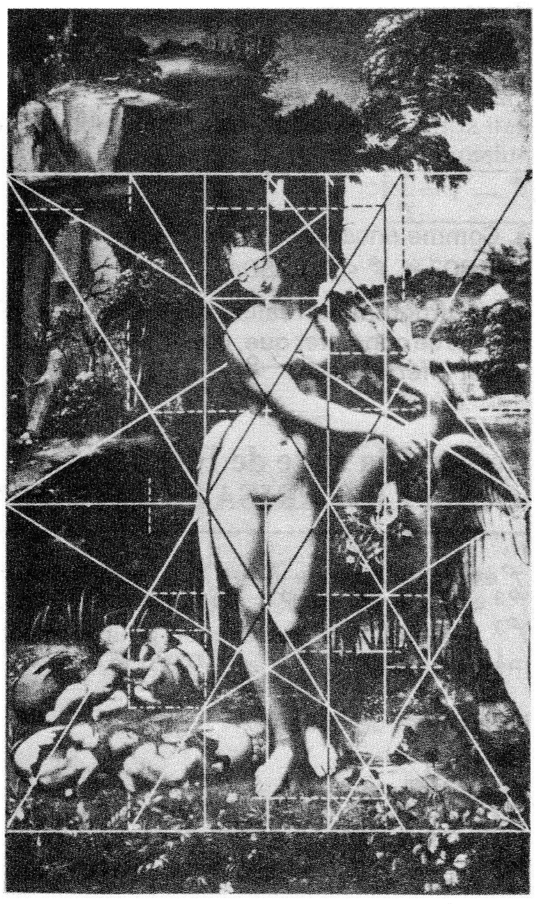
1	.	u_1	
			$1 = v_1$
1	.	u_2	
			$2 = v_2$
2	. .	u_3	
			$1,5 = v_3$
3	. . .	u_4	
			$1,66 = v_4$
5	. . . . .	u_5	
			$1,6 = v_5$
8	. . . .	u_6	
			$1,625 = v_6$
13	. . . .	u_7	

La configuration de points ci-dessus représente le début de la suite de Fibonacci définie ainsi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \qquad \forall n > 2 \end{cases}$$

A partir de la suite divergente (u_n), on définit la suite (v_n) de la façon suivante :

$$(\forall n \geqslant 1) \qquad v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$



On trouve ainsi :

$v_1 = \frac{1}{1}$	1	
$v_2 = \frac{2}{1}$		2
$v_3 = \frac{3}{2}$	1,5	
$v_4 = \frac{5}{3}$		1,666...
$v_5 = \frac{8}{5}$	1,6	
$v_6 = \frac{13}{8}$		1,625
$v_7 = \frac{21}{13}$	1,615..	
$v_8 = \frac{34}{21}$		1,6190...

Comme il apparaît clairement ci-dessus (v_n) peut être scindée en deux sous-suites :

(v_{2n}) décroissante et minorée par 1

(v_{2n+1}) croissante et majorée par 2

(Puisque $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{v_n - 1}$)

Donc ces deux suites convergent vers le même nombre positif l tel que :

$\boxed{l = 1 + \frac{1}{l}}$ ou $\boxed{l^2 = l + 1}$

La résolution de cette équation donne $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

nombre qu'on appelle :

LE NOMBRE D'OR
qu'on désignera par φ. $\boxed{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi}$

Donc : **la suite (v_n) converge vers le nombre d'or φ.**

Remarquons que :

1. Il suffit d'ajouter 1 à φ pour obtenir son carré puisque : $\boxed{\varphi + 1 = \varphi^2}$

2. Il suffit de lui retrancher 1 pour obtenir son inverse puisque :
$\boxed{\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}}$

3. Comme encadrement de φ, on peut donner :
$1{,}61803 < \varphi < 1{,}61804$

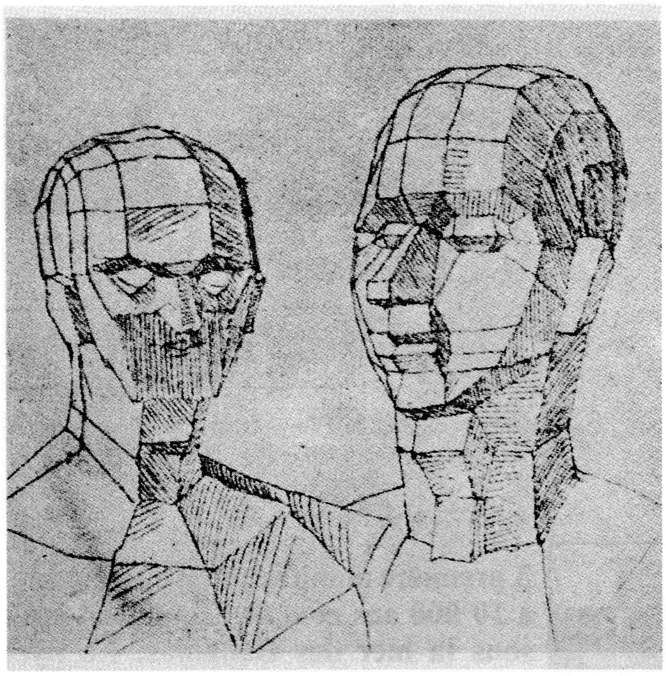
4. Un programme réalisé avec CASIO PB 700 nous a permis de constater que, pour n = 23, l'écart entre v_n et φ est inférieur à 10^{-9}.

Retour à la suite de FIBONACCI avec la LINEARISATION DE φ^n

φ étant solution de $\varphi^2 = \varphi + 1$, on obtient $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$, c'est à dire qu'on a linéarisé φ^3 ; de proche en proche, on pourra linéariser, de la même façon φ^4, φ^5, ... φ^n ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

Finalement on obtient :

$\varphi = 1\varphi$
$\varphi^2 = 1\varphi + 1$
$\varphi^3 = 2\varphi + 1$
$\varphi^4 = 3\varphi + 2$
$\varphi^5 = 5\varphi + 3$ ...



On peut démontrer que, quel que soit $n \geqslant 1$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que :

$\varphi^n = a_n\varphi + b_n$

et que chacune des deux suites (a_n) et (b_n) est la suite de Fibonacci.

En linéarisant φ^n avec $n \in \mathbb{Z}^{*-}$, on trouvera :

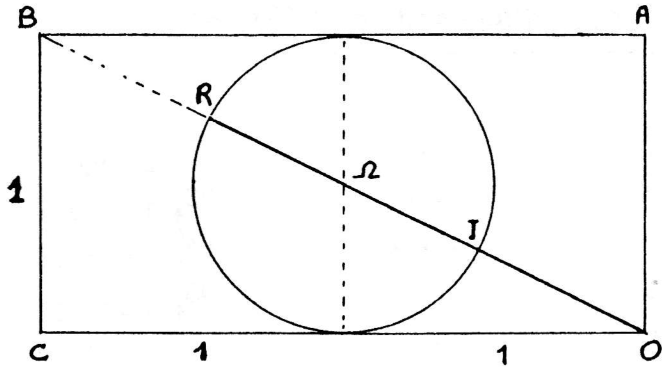
$\varphi^{-1} = 1.\varphi - 1$
$\varphi^{-2} = -1.\varphi + 1$
$\varphi^{-3} = 2.\varphi - 3$
$\varphi^{-4} = -3.\varphi + 1, \ldots$

Quel que soit $n \in \mathbb{Z}^{*-}$, il existe deux relatifs αn et βn tels que : $\varphi^n = \alpha n\,\varphi + \beta n$

on retrouve, pour $(|\alpha n|)$ et $(|\beta n|)$, la suite de Fibonacci !

Représentation géométrique du NOMBRE D'OR

Dans le rectangle (OABC) de côtés 2 et 1 :



$OB = \sqrt{5}$, $O\Omega = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\boxed{OR = \varphi}$

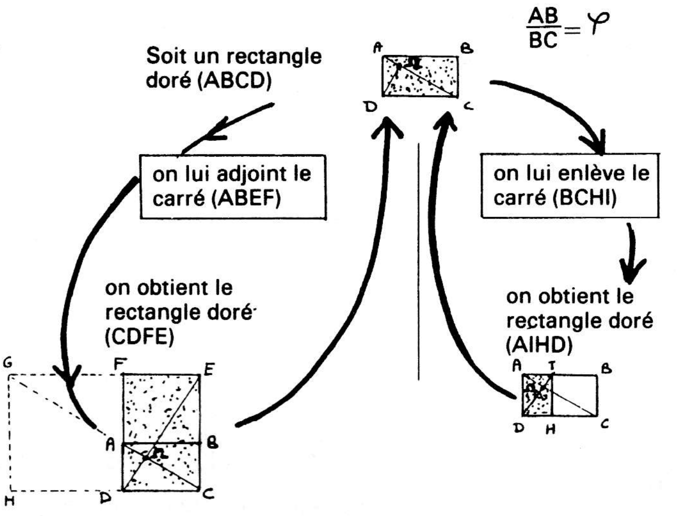
$OR = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$

$OI = OR - 1 = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$

N.B. : En considérant la puissance de O par rapport au cercle, on retrouve : OI. OR = 1 donc $OI = \frac{1}{\varphi}$

Processus récursifs pour construire des suites de RECTANGLES DORÉS

On dira qu'un rectangle est doré si le rapport de ses côtés est φ.



Ce procédé récursif en augmentation permet d'obtenir une infinité de rectangles dorés de plus en plus grands : (ABCD) étant un rectangle doré,

$AB = \varphi \times BC$. Or $EC = EB + BC = AB + BC$
donc $EC = \varphi \times BC + BC = (\varphi + 1)\,BC = \varphi^2 \times BC$
$EC = \varphi \times (\varphi BC)$ $\quad$ $EC = \varphi \times DC$

Par conséquent **(DCEF) est aussi un rectangle doré.** Si on continue en lui adjoignant un autre carré (DFGH), on obtient encore un rectangle doré, etc...

Il existe une similitude S qui transforme (ABCD) en (DCEF) ; S a
- pour rapport φ
- pour angle $+\frac{\pi}{2}$
- pour centre Ω

Dans cette similitude
$S(\Omega, \frac{\pi}{2}, \varphi)$

$\Omega \longmapsto \Omega$
$A \longmapsto D$
$B \longmapsto F$
$C \longmapsto E$
$D \longmapsto C$

$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C}) = +\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
d'où
$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) = \pi + 2k\pi$ donc $\Omega \in [AC]$
Puisque $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
et $\Omega \in [AC]$, **le point Ω est le projeté orthogonal de D sur la diagonale** [AC].

Ce procédé récursif en diminution permet d'obtenir une infinité de rectangles dorés de plus en plus petits : (ABCD) étant un rectangle doré,
$AB = \varphi \times BC$, $AI + IB = \varphi \times BC$
$AI = (\varphi - 1) - BC$ $\quad$ $AI = \frac{1}{\varphi} \times BC$
$\varphi \times AI = AD$

Par conséquent, **(AIHD) est aussi un rectangle doré.** Si on continue en lui enlevant un autre carré (DHKL), on obtient encore un rectangle doré (AIKL), etc...

Il existe une similitude S' qui transforme (ABCD) en (AIHD) ; S'a
- pour rapport $\frac{1}{\varphi}$
- pour angle $-\frac{\pi}{2}$
- pour centre Ω

Dans cette similitude
$S'(\Omega', -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\varphi})$

$\Omega' \longmapsto \Omega'$
$A \longmapsto I$
$B \longmapsto H$
$C \longmapsto D$
$D \longmapsto A$

$(\overrightarrow{\Omega' C}, \overrightarrow{\Omega' D}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$(\overrightarrow{\Omega' D}, \overrightarrow{\Omega' A}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
d'où
$(\overrightarrow{\Omega' C}, \overrightarrow{\Omega' A}) = -\pi + 2k\pi$ donc $\Omega' \in [AC]$
Puisque $(\overrightarrow{\Omega' D}, \overrightarrow{\Omega' A}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
et $\Omega' \in [AC]$, **le point Ω' est le projeté orthogonal de D sur la diagonale** [AC].

Par conséquent : S et S' ont le même centre Ω, S et S' sont deux similitudes réciproques.

La diagonale [AC] du rectangle doré (ABCD) a pour image la diagonale [DE] du rectangle doré (DFEC) qui lui est perpendiculaire ; donc le point Ω est aussi le projeté orthogonal de C sur la diagonale [DE].

La diagonale [AC] du rectangle doré (ABCD) a pour image la diagonale [ID] du rectangle doré (IHDA) qui lui est perpendiculaire ; donc le point Ω est aussi le projeté orthogonal de A sur la diagonale [DI].

Si on poursuit la production de rectangles dorés en utilisant les processus indiqués, c'est toujours :

$S(\Omega, \frac{\pi}{2}, \varphi)$
qui permet de passer d'un rectangle doré au rectangle doré suivant plus grand.

$S'(\Omega, -\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\varphi})$
qui permet de passer d'un rectangle doré au rectangle doré suivant plus petit.

A partir d'un rectangle doré (ABCD), on obtient donc :

une suite de rectangles dorés "croissants" images de (ABCD) par S, S o S = S^2, ... , S^n

une suite de rectangles dorés "décroissants" images de (ABCD) par S^{-1}, $(S^{-1})^2$, ...$(S^{-1})^n$.

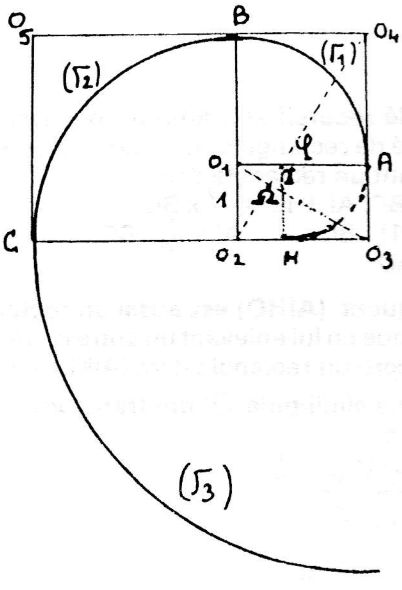
Procédé pour représenter l'Ammonite

1. Après avoir construit le rectangle doré ($O_1\,O_2\,O_3\,A$) de côtés φ et 1, on construit le carré ($O_1\ A\ O_4\ B$) de façon à obtenir le rectangle doré ($O_2\ O_3\ O_4\ B$) de côtés φ^2 et φ.

Soit (Γ_1) l'arc de cercle [AB] quart du cercle de centre O_1 et de rayon $\varphi^1 = O_1\,A$.

2. On construit le carré ($O_2\ BO_5\ C$) de façon à obtenir le rectangle doré ($O_3\ O_4\ O_5\ C$) de côtés φ^3 et φ^2.

Soit (Γ_2) l'arc de cercle [BC] quart du cercle de centre O_2 et de rayon $\varphi^2 = O_2\,B$.



En poursuivant indéfiniment ce processus, on obtient une courbe réunion de (Γ_1), (Γ_2) (Γ_3),... en décrivant des arcs de cercles inscrits dans des rectangles dorés.

Imaginons une puce qui tourne ainsi en se déplaçant sur cette courbe; si au lieu de tourner en allant de A vers B, elle décide de tourner dans l'autre sens en allant de B vers A, quelle va être la suite de sa trajectoire après être arrivée en A?

Il suffit de procéder comme précédemment mais, cette fois-ci, en suivant le processus en diminution : c'est en enlevant le carré (IAO_3H) de côté 1 qu'on obtient le rectangle doré ($O_1\ I\ HO_2$) de côté 1 et φ^{-1}. On pourra désigner par (Γ_{-1}) l'arc de cercle [AH], quart du cercle de centre I et de rayon IA. [AH] sera donc le début de la suite de la trajectoire de la puce après son arrivée en A.

Si elle continue à décrire de tels quarts de cercles obtenus de cette façon en suivant le processus en diminution elle va se rapprocher de plus en plus du point Ω centre des similitudes (Ω est le point d'intersection des segments [O_1O_3] et [O_2O_4]).

Si on désigne par (Γ) la réunion des branches (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3),... obtenues par le "procédé en augmentation", et par (Γ_{-1}), (Γ_{-2}),... celles obtenues par le "procédé en diminution", on peut considérer que (Γ) est une représentation approchée de l'enroulement d'une ammonite.

Structure de l'Ammonite et Nombre d'Or

La courbe (Γ) ainsi obtenue ressemble à une spirale ($\mathcal{C}$) qui aurait pour pôle Ω et qui passerait par les points A, B, C,..., H,... extrémités des "quarts de cercles" utilisés pour construire (Γ).

Pour déterminer une équation polaire d'une telle courbe ($\mathcal{C}$), nous pouvons choisir comme repère :
- le pôle Ω (centre des similitudes)
- la demi-droite [Ω A) comme axe polaire
- $1 = \|\overrightarrow{\Omega A}\|$

Dans ce repère :
- les coordonnées polaires de A sont (1,0)
- puisque B est l'image de A dans la similitude S de centre Ω, de rapport φ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, les coordonnées de B sont (φ, $\frac{\pi}{2}$)
- C étant l'image de B par S, C (φ^2, π)

Lorsque l'angle polaire augmente de $\frac{\pi}{2}$, le module r est multiplié par le nombre d'or φ.

$$\theta = 0 \qquad r = \varphi^0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad r = \varphi^1 = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}}$$

$$\theta = \pi \qquad r = \varphi^2 = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}}$$

ce qui nous amène à l'équation

$$\boxed{r = \varphi^{\theta \times \frac{2}{\pi}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{r = e^{\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \varphi\right)\theta}}$$

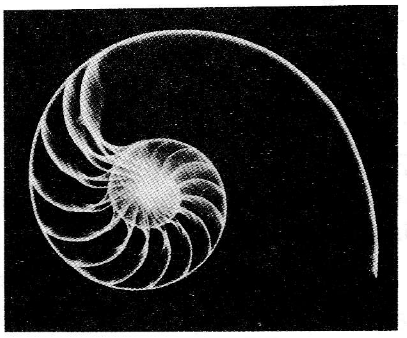
équation d'une **spirale logarithmique qui fait apparaître le nombre d'or** φ.

$(\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2} \Rightarrow r_1 = r \times \varphi)$

Cette spirale ($\mathcal{C}$) qui est une courbe "continue" a en commun avec (Γ) tous les points ayant pour angle polaire $\theta = k \times \frac{\pi}{2}$ (avec $k \in Z$). On peut donc la considérer comme "voisine" de (Γ) et tout aussi représentative que (Γ) de la structure de l'ammonite.

Dans ce contexte, on pourra admettre que :

la structure de l'ammonite ressemble à une spirale logarithmique dont la raison est le nombre d'or.



Bibliographie :

"Les nombres et leurs mystères", par A. Warusfel. Editions du Seuil. Paris.

"Le nombre d'or, clé du monde vivant", par D. Neroman Dervy-livres, 6, rue de Savoie, Paris Ve.

"Les nombres cachés, Esotérisme arithmologique" par G. Jouven Dervy-livres, 6, rue de Savoie, Paris Ve.
Gödel, Escher, Bach. "Les brins d'une guirlande éternelle" Inter Editions, 87, avenue du Maine, 75014 Paris.

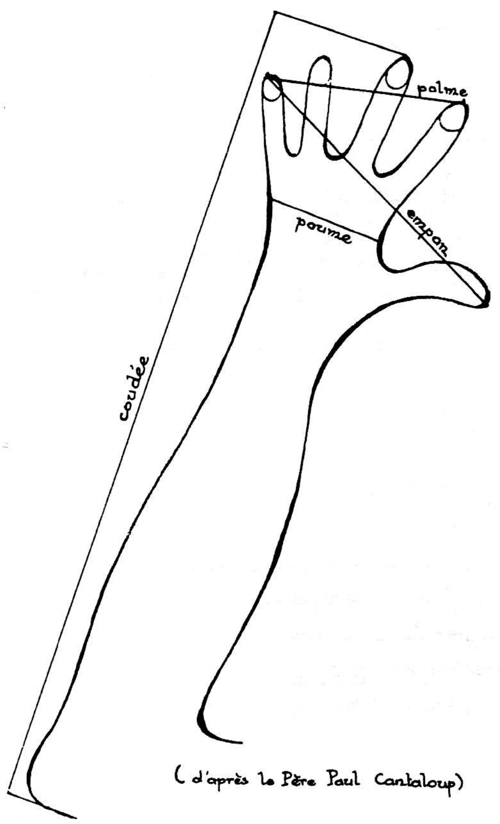
"The geometry of art and life" par Matila Ghyka - Dover Pub. 1977.

MESURES APPROCHEES A LA MAIN

De l'Abbaye de Boscodon

VOICI des pages écrites à la main par un instituteur et extraites des «Cahiers de l'Abbaye de Boscodon». Abbaye qui se trouve dans les Hautes-Alpes et qui mérite assurément le détour.

La main. Le pentagone. Les mesures.



(d'après le Père Paul Cantaloup)

Lorsque l'on veut évaluer la longueur d'une table, on porte successivement la longueur de la main, doigts écartés : on utilise l'empan.

Cette longueur est généralement comprise entre 20 et 23 cm.

Elle donne naissance à un système de mesures variables suivant l'époque et la région.

Le passage d'une unité à l'autre se fait en numération duodécimale.

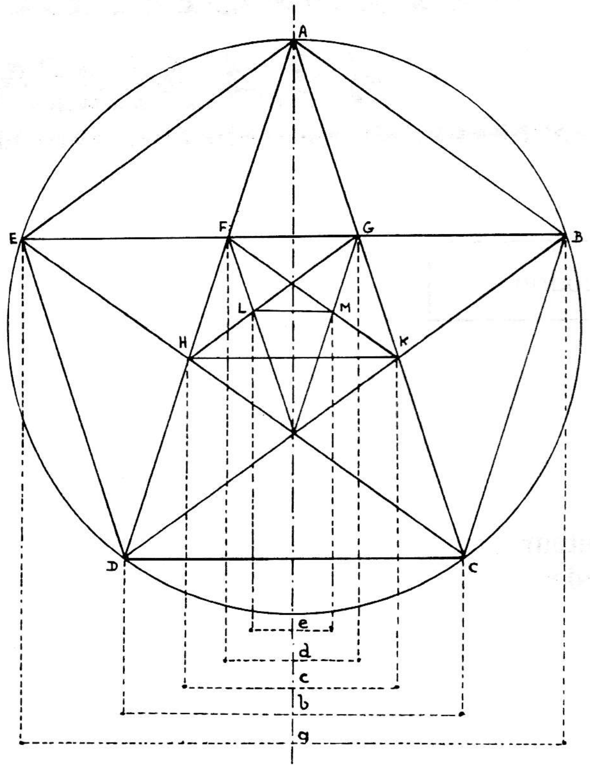
	Unités	équivalence	étalon du Chatelet-Paris (en cm)	étalon de Vallouise (H.A) (en cm)	étalon des initiés (en cm)
	ligne	diamètre d'un grain d'orge	0,22558	0,2523	0,2247
	pouce	12 lignes	2,7069	3,027	
	pied	12 pouces	32,48	36,33	
	toise	6 pieds	194,9	218,	
La Quine	poume	34 lignes *	7,66		7,64
La Quine	palme	55 lignes	12,40		12,36
La Quine	empan	89 lignes	20,07	22,45	20,
La Quine	pied	144 lignes	32,48 **	36,33	32,36
La Quine	coudée ***	233 lignes	52,56		52,36

* → 3.2.. suite de Fibonacci.

** mesure appelée "le pied de Charlemagne".

*** → 1.4.3

La main . Le pentagone . Les mesures.



(d'après le Père Jean Betous.)

La Quine des Maîtres de l'Oeuvre, réservée aux initiés, se référait aux mesures humaines, mais présentait une progression directement liée à la section d'or, [→1.3.2] et au pentagone régulier [→1.4.1]

	paume	palme	empan	pied	coudée royale.
	$\frac{1}{\varphi^2}$	$\frac{1}{\varphi}$	1	φ	φ^2
	0,382	0,618	1	1,618	2,618 *
(en cm)	7,64	12,36	20	32,36	52,36

Cette "coudée royale" semble être une constante architecturale qui a traversé le temps et qui s'est répondue dans le monde ...

Calculs: Grande étoile: ABC (h.8) $\frac{EB}{EA} = \varphi$ EA = DC donc $\frac{a}{b} = \varphi$

AHK (h.7) $\frac{AH}{HK} = \varphi$

Les triangles AFG, AHK et ADC sont semblables: (a11)

$AH = AF \times \varphi$ $AD = AH \times \varphi$ donc $DC = HK \times \varphi$ $HK = FG \times \varphi$

et $\frac{b}{c} = \varphi$ $\frac{c}{d} = \varphi$

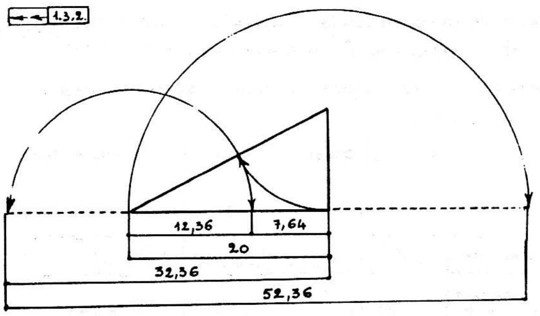
Petite étoile: une observation semblable conduit à écrire: $\frac{FG}{LM} = \varphi$ donc $\frac{d}{e} = \varphi$

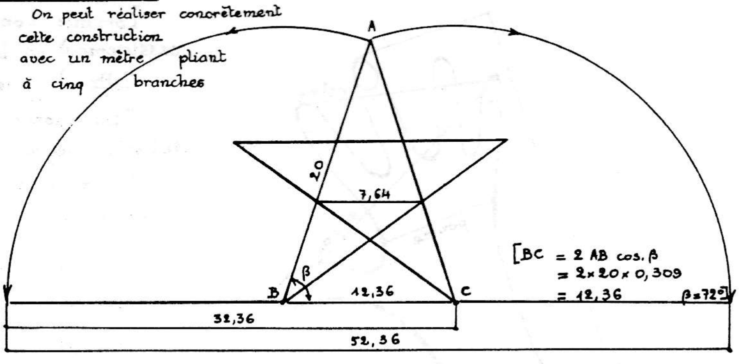
---

* [→1.3.1.]

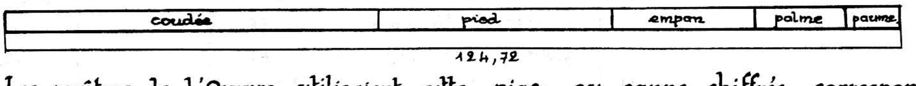
Autres approches de ces mesures.

[→1.3.2]





La canne des maîtres de l'Oeuvre.



Les maîtres de l'Oeuvre utilisaient cette pige ou canne chiffrée, correspondant à une longueur de 555 lignes de 0,2247 cm (!), soit deux coudées plus un empan.
Pour plus de commodité, elle pouvait être formée de cinq segments articulés, matérialisation de la double progression arithmétique et géométrique. [→1.3.1]

(d'après J. Bétous)

Remarques: . L'aune de Vallouise mesurait 1,25 m
. Le cicero utilisé en imprimerie est le 1/6 du pouce.

UN NOUVEAU FLIRT SUR NOS PAGES : UNE CALCULATRICE TENTE UNE APPROCHE

Yves OLIVIER - Blois

1re tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un logarithme décimal. Sa démarche est la suivante :
Pour s'approcher de $\log_{10}a$, elle procède par élévations successives à la puissance 10. Mais dans le calcul de a^{10^n} la machine est vite saturée (en général la valeur maximale correspond à $10^{12}-1$). En conséquence de quoi, après chaque élévation à la puissance 10 on divise le résultat par une puissance entière de 10 de telle façon que le résultat trouvé a soit compris entre 1 et 10.

Voici par exemple $\log_{10}2$:

$2^{10} \simeq 1.024 \times 10^3$

$2^{100} = 2^{10 \times 10} \simeq 1.024^{10} \times 10^{30} \simeq 1.26765 \times 10^{30}$

$2^{1000} = 2^{100 \times 10} \simeq 1.26765^{10} \times 10^{300}$

$\simeq 1.07150 \times 10^{301}$

$2^{10^5} \simeq 9.99002 \times 10^{30\,102}$

$2^{10^8} \simeq 3.68454 \times 10^{30\,102\,999}$

$2^{10^{12}} \simeq 6.90178 \times 10^{301\,029\,995\,663}$

ainsi $\log_{10}2 \simeq 0.301\,029\,995\,663$

Quelques remarques

Ce processus peut s'exécuter même avec une calculatrice "non scientifique" entendons par là une calculatrice quatre opérations.

Ce processus peut se généraliser avec plus ou moins de bonheur pour un logarithme de base quelconque puisqu'il est justifié par la formule :

$\log_{10}a^{10^n} = 10^n \times \log_{10}a$

2eme tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un logarithme décimal. La démarche est la suivante :
on considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par les relations suivantes :

$a_0 = 10$ et $b_0 = 1$ $\qquad (a_0 = 10^{b_0})$

$a_1 = \sqrt{10}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad (a_1 = 10^{b_1})$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$ pour $n \geqslant 0$

Soit c le réel strictement supérieur à 1 dont on veut déterminer le logarithme, et k le plus petit entier tel que $a_k \leqslant c$.

On a alors $\log c = \log \frac{c}{a_k} + b_k$. Si $\frac{c}{a_k} = 1$ alors $\log c = b_k$ sinon on a $\frac{c}{a_k} > 1$ et on peut itérer le procédé en considérant comme nouveau c la quantité $\frac{c}{a_k}$. On obtient log c en faisant la somme des b_k trouvés. On itère jusqu'à ce que $\log c = \log y + L$ où $L \in \mathbf{R}$ et $a_p \leqslant y < a_{p-1}$ pour trouver log c avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{2^p}$. D'où l'algorithme suivant :

```
L ← 0, B ← 1, A ← 10, Pres ← 10—6
lire C
si C < 1 alors C ← 1/C, Z ← 1
             sinon Z ← 2
tant que C ≠ 1 et B > Pres faire
  début
    tant que C ≥ A faire
      début
        L ← L + B, C ← C/A
      fin
    A ← rac(A), B ← B/2
  fin
L ← L*(—1)^Z
afficher L
```

Quelques remarques sur cet algorithme :
On peut approcher n'importe quel logarithme d'un nombre réel strictement positif car Z est ici le témoin de l'appartenance de ce réel à l'un des 2 intervalles]0,1[ou [1,+∞[.

Pour le calcul d'un logarithme de base A, il suffit d'initialiser A à la bonne valeur.

La traduction de cet algorithme sur des calculatrices programmables en basic ou dans un langage simple ne doit pas poser de problèmes. Il n'en est pas de même pour des petites calculatrices du style Casio fx180p ou TI57. En effet, le nombre de pas est limité à 50 au plus et ce nombre diminue de 8 à chaque fois que l'on utilise une mémoire supplémentaire !

De plus la Casio ne permet pas de relire les instructions afin de corriger d'éventuelles erreurs de programmation !

Reportez-vous au BGV de septembre 87 qui donne quelques recommandations de choix.

3eme tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un nombre avec une suite (dans les idées ?). Nous ne parlerons pas ici de cas limite que la morale mathématique réprouve.

Comment extraire une racine carrée ?

Nous redonnons ici la méthode classique dite des babyloniens. Elle correspond à une méthode plus générale utilisée dans l'approximation de solutions d'une équation à savoir la méthode de Newton.

La suite est définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$
α désigne une valeur proche de celle cherchée et a le nombre dont on cherche la racine carrée.

Par exemple si a = 2 et si on prend $u_0 = 1$, on obtient :
$u_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) \simeq 1.5$ $u_2 \simeq \frac{1}{2}(1,5 + \frac{2}{1,5}) \simeq 1.4166667$
$u_3 \simeq 1,4142157$ $u_4 \simeq 1,4142136$ $u_5 \simeq 1,4142136$

Quelques remarques : on appréciera toujours la rapidité de convergence de cette méthode

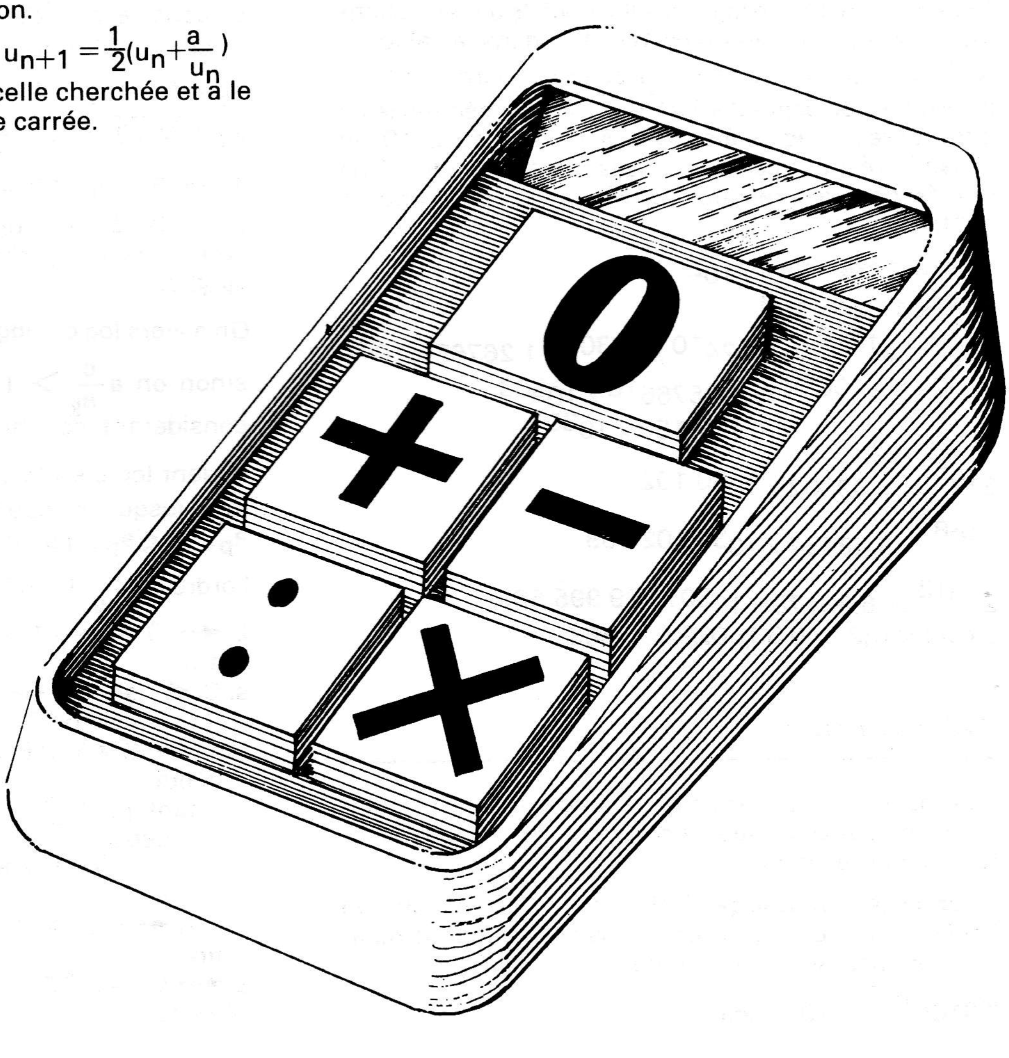
l'algorithme peut s'écrire :

```
lire A, U, PRES
V ← (U+A/U)/2
tant que abs (U—V) > PRES faire
  début
    écrire V
    U ← V
    V ← (U+A/U)/2
  fin
écrire V
```

ou encore :

```
lire A, U, PRES
répète
  écrire U
  V ← U
  U ← (U+A/U)/2
jusqu'à ce que abs (U—V) ≤ PRES
écrire U
```

MACHINE A CALCULER SIMPLIFIÉE
Dès l'école maternelle apprenez à vos enfants le maniement des machines à calculer modernes. Celle-ci, avec son chiffre unique, sera une bonne initiation aux machines plus complexes dont ils auront à se servir plus tard.



Avec une T157, on modifie l'algorithme en supprimant le test de précision mais en gardant la boucle évidemment.

Cela donne : lire A, U
  répète
    U ← (U+A/U)/2
    écrire U
  tant que l'on veut

D'où la série d'instructions :

AND Part 2 .... cela réserve deux mémoires
LRN .... on passe en mode programmation
R/S .... le programme s'arrêtera pour
STO 0 .... entrer A dans la mémoire 0
R/S .... même remarque pour entrer u_0
STO 1 .... dans la mémoire 1
LBL 1 .... début de la boucle 1
RCL 0 .... rappel du contenu de la mémoire 0
/ .... divisé par
RCL 1 .... le contenu de la mémoire 1
\+ .... Plus
RCL 1 .... le contenu de la mémoire 1
= .... effectue les calculs précédents
/ .... divisé par
2 2
= .... effectue le calcul précédent qui
STO 1 .... est mis dans la mémoire 1
R/S (ou PAUSE) ... stoppe le programme pour lire le résultat
GTO 1 .... retour au début de la boucle 1

Pour conclure un autre exemple de convergence vers une racine carrée : deux suites pour encadrer un réel !

L'utilisation des suites adjacentes est classique. Elles permettent à chaque itération d'avoir un encadrement du réel cherché !

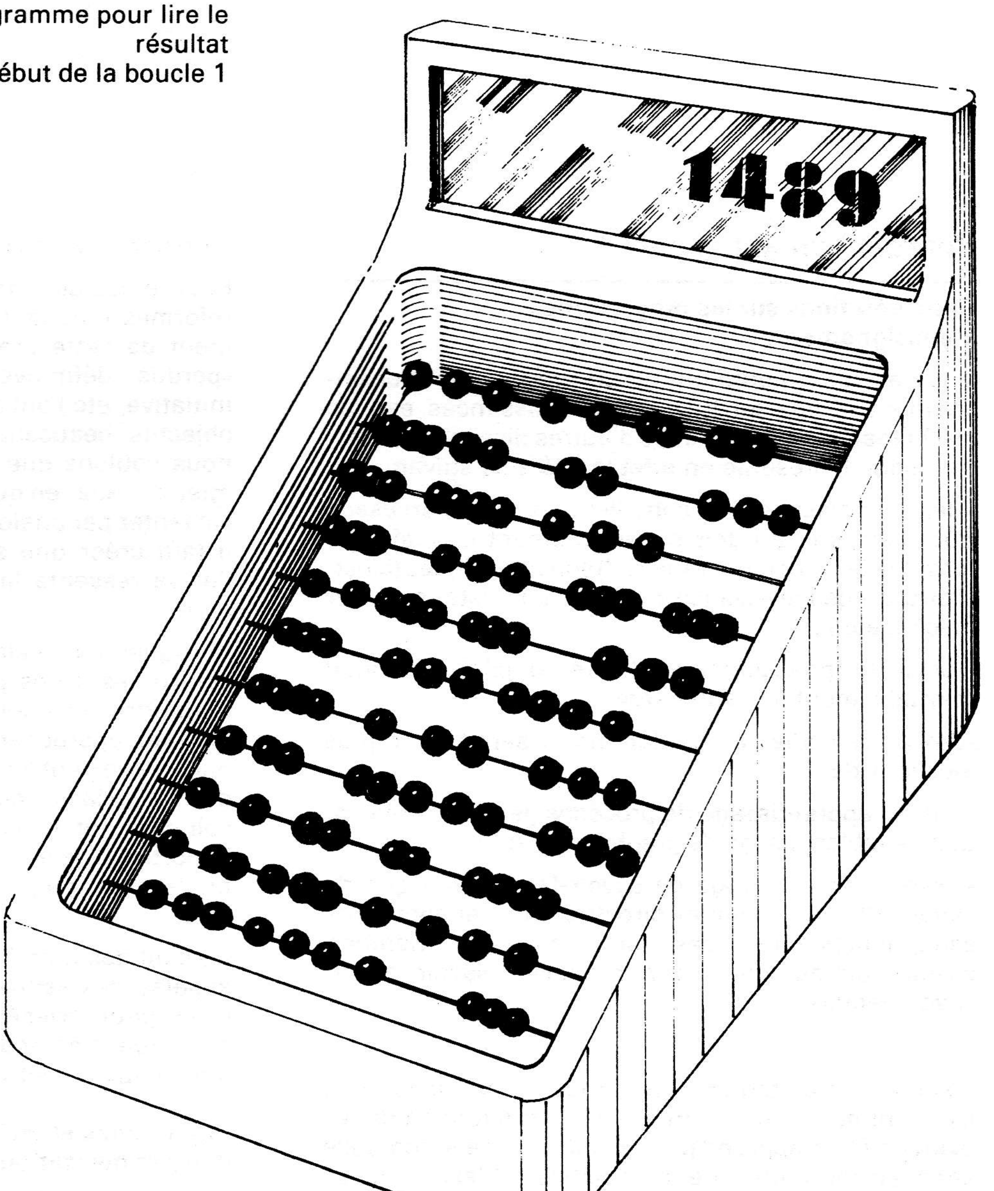
On pose ici $u_0 = A$ et $v_0 = 1$ si $A > 1$ sinon on inverse les valeurs de u_0 et de v_0.

Ensuite on pose : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

En effet le terme u_n correspond à la moyenne géométrique tandis que le terme v_n à la moyenne arithmétique des termes précédents.

On peut montrer facilement que les suites sont adjacentes. De ce fait elles ont même limite l qui vérifie $l^2 = A$ car d'une part la suite $(u_n v_n)$ est constante et d'autre par $u_0 v_0 = 1 \times A = A$.

■



BOULIER ÉLECTRONIQUE
Les Anciens Chinois ont inventé le boulier. Les Japonais modernes, eux, l'ont amélioré en le dotant de tous les perfectionnements de la technologie contemporaine. Vous utilisez ce boulier comme son ancêtre, et grâce à un subtil circuit électronique les chiffres s'inscrivent sur un écran.

μ GRANDEUR ET DECADENCE D'UN NOMBRE DANS L'ENSEIGNEMENT

Un antiexposé de G. CHARRIERE - Lausanne

COMMENT approcher, cerner, un nombre que l'on ne connait pas mais que l'on peut... définir facilement. Voilà ce que nous propose un collègue suisse dans le bulletin des maîtres de mathématique vaudois n° 30 - 1984 avec réponse d'un étudiant dans le n° 38 - 1987. N'attendez pas aussi longtemps pour prolonger cet article et pour approcher μ d'encore plus près !!!

Pourquoi un antiexposé ?

Considérations sur les programmes d'enseignement.

Il est acquis aujourd'hui qu'un programme d'enseignement rédigé en liste de connaissances est, en mathématique comme dans d'autres disciplines, insatisfaisant. Il présente en effet les défauts suivants :

- les connaissances de cette liste sont soit d'un usage trop restreint (qui doit nécessairement connaître la formule de l'aire d'un trapèze ?) soit spécifiques (c'est-à-dire à l'usage exclusif du futur chimiste, du futur maçon, etc.) ;
- si un tel programme veut être complet, il conduit inévitablement à la surcharge.

Afin de remédier à ces défauts, il serait donc plus judicieux de :

- viser l'apprentissage de procédés généraux (utilisation de tables, usage de graphiques, etc.) ;
- viser l'apprentissage de savoir-faire plutôt que de savoirs et fixer les lignes directrices de cet apprentissage, lignes directrices qui sont savoir chercher, savoir communiquer, savoir choisir, savoir coder, savoir déduire.

Il serait vain de tenter d'enseigner ces savoir-faire en excluant de vouloir mettre l'élève en situation de les exercer. On n'apprend pas à conduire une automobile sans entrer dans une automobile ! C'est dans ce contexte que s'inscrit tout particulièrement bien la technique des situations.

La technique des situations.

Pour le cas des mathématiques, les mouvements de réformes émanant de l'insatisfaction de l'enseignement de cette branche (trop d'échecs ; des élèves «perdus» définitivement ; des «forts en math» sans initiative, etc.) ont amené une nouvelle définition des objectifs beaucoup plus précise qu'auparavant. Si nous voulons que l'élève sache «choisir, choisir au mieux», «aller en quête d'informations, les organiser», «inventer par analogie», «formuler un problème», etc., il faut créer une situation dans la classe telle que l'élève ressente la nécessité ou l'envie d'agir de la sorte.

Pratiquement, cela implique que les élèves soient confrontés à des problèmes assez peu définis pour permettre un choix quant au plan d'attaque, et se laissant approcher par sous-problèmes plus précis que l'élève peut formuler lui-même. Le point de départ doit être à la portée de l'élève, pour qu'il ait «envie d'y voir clair», et de plus, si les choix doivent être réels, il importe que le maître n'ait pas en tête une solution, ou un point du programme auquel il faut aboutir à tout prix.

Ce sont des problèmes choisis dans ces buts qu'on a appelés des «situations», mais il est clair que leur forme peut varier énormément. Le problème lui-même n'est que le point de départ : c'est l'attitude du maître qui en fait une situation.

Inquiétudes et vicissitudes d'un groupe d'expérimentation.

La technique dite «des situations» doit permettre à chaque élève de réussir quelque chose qui ait une valeur mathématique, à propos d'une question ouverte. Il importe qu'il découvre et qu'il comprenne par lui-même une idée nouvelle qui soit à sa portée. Le maître a pour tâche de favoriser cette démarche peut-être laborieuse, sans imposer sa propre vision.

Où et comment trouver des situations problématiques qui se prêtent à ce genre d'enseignement ? Comment faut-il les présenter aux élèves ? Quel est le comportement des élèves devant des situations de ce type ? Par quels procédés le maître peut-il relancer la curiosité des élèves ? Comment amener les élèves à rendre compte de leur travail ? De quelle documentation le maître a-t-il besoin ? Voilà quelques-unes des questions auxquelles, avant d'espérer une application plus étendue de cette méthode d'enseignement, tente de répondre un groupe d'étude du Centre Vaudois pour l'Enseignement Mathématique.

Lisbonne, août 1983
(35e rencontre de la CIEAEM).

Présenter ses travaux dans une rencontre internationale et faire partager ses problèmes aux participants était, pour le groupe, une entreprise difficile. Une seule solution s'imposait, basée sur l'évidence qu'il est impossible de faire l'économie de l'expérience : un antiexposé.

Et c'est ainsi que naquît un titre insolite... suivi d'une séance où quelques-uns des mystères du nombre μ se dévoilèrent.

Le nombre μ.

$\mu_1 = 0,1$
$\mu_2 = 0,12$
$\mu_3 = 0,123$
.
.
.
$\mu_{12} = 0,123456789101112$
.
.
.
$\mu = 0,$.................

Le nombre μ fait partie de l'ensemble des nombres dont le développement décimal peut être décrit par une formule explicite :

0, f(1) f(2) f(3)...

où les nombres entiers f(1), f(2), ... sont écrits l'un après l'autre à la suite de la virgule.

Dans ce cas : f(n) = n.

Les participants, une fois mis au courant de l'existence de ce nombre, en arrivèrent à se demander :

- combient y a-t-il de chiffres dans $\mu_{100}, \mu_{200}, \mu_n$?
- quelle est la 734eme décimale de μ ?
- combien y a-t-il de 7 dans les mille premiers chiffres à droite de la virgule de μ ?
- comment μ se note-t-il dans le système binaire ?
- quelles sont les propriétés de la suite $\mu_1 + \mu_2, \mu_2 + \mu_3, \mu_3 + \mu_4, \dots$?
- et celles de la suite $\mu_n + 1 / \mu_n$?
- peut-on imaginer une représentation géométrique de la suite $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$?
- μ est-il transcendant ?
- μ porte-t-il un nom ?!

...

- μ peut-il (ou doit-il) jouer un rôle dans l'enseignement élémentaire ?

...

- inventer un problème du μ que personne, dans la salle, ne saurait résoudre !!

En imaginant de telles questions, en tentant dans certains cas de les résoudre, en discutant des intérêts mathématiques et pédagogiques de μ, il est certain que participants et animateurs prirent mieux conscience de ce qu'est, de ce que devrait être, ... une situation.

Réponse d'un lecteur, Daniel Venditti, étudiant.

Je me suis penché sur la question suivante : combien y a-t-il de chiffres dans $\mu_{100}, \mu_{200}, \mu_n$. J'ai découvert une formule dont je vais vous donner la démonstration. Mais auparavant, dans le livre «Les nombres remarquables», de François le Lionnais, voici ce qu'il est dit : Nombre de Champernowne obtenu en écrivant successivement les nombres entiers consécutifs. Ce nombre est normal en base 10 (Un nombre x est normal en base b si toute suite de k chiffres apparaît dans les «b-cimales» de x avec la fréquence $1/b^k$. Tous ces nombres sont irrationnels mais on ne connait à ce jour que des nombres normaux artificiellement construits.). D'où la démonstration suivante :

Introduction

- E [x], représente la partie entière de x. log x, est le log décimal de x.
- Pour plus de facilité, j'ai pris un exemple numérique et je vais calculer μ_n pour n = 8537.
- Je poserai m = E [log n], où m représente le nombre de chiffres moins un du nombre n ; donc dans l'exemple numérique n = 8537 alors m = E [log 8537] = 3.

Démonstration

- J'ai décomposé n en une somme, ici 8537=7538+999 ce qui est très pratique car

$\mu_{8537} = 0,12345...998999\underbrace{...853585368537}$ et l'on remarque que, dans la partie sous l'accolade, tous les nombres ont le même nombre de chiffres, ici 4 ou m+1.

- Il faut déterminer quel est le 9, 99, 999, 9999, qu'il faut soustraire à n. Il suffit de prendre le dernier de ces nombres qui ait m chiffres et ce nombre sera égal à 10^m-1, ici 999 = 10^3-1.
- Donc sous l'accolade il y a n-(10^m-1) nombres à m + 1 chiffres.
n-(10^m -1) = n-10^m +1, ici 8537 - 10^3 + 1 = 7538.
- Il en découle tout naturellement que (m+1). (n-10^m+1) est le nombre des décimales provenant des 7538 nombres de 1000 à 8537.
Voici la première partie de la formule.
Ici on aura (3 + 1) (8537 - 10^3 + 1) = 30152.
- La prochaine étape est d'exprimer le nombre des chiffres de
μ_{999} ; or $\mu_{999} = \underbrace{0,123456789}_{a)}\ \underbrace{10...979899}_{b)}\ \underbrace{100...997998999}_{c)}$

dans a) il y a 9.1 chiffres $10 - 1 = 9$
b) il y a 90.2 chiffres $100 - 10 = 90$
c) il y a 900.3 chiffres $1000 - 100 = 900$
d) et ainsi de suite.

d'où la série $9.1 + 90.2 + 900.3 + 9000.4 + \ldots + 9.m.10^{m-1}$.

Il faut trouver une formule qui exprime la somme de cette série !

Pas évident, mais en faisant un détour on voit que :

$9.1 = 9$	$10-9 = 1$	$9 = 10-1$
$9.1 + 90.2 = 189$	$200-189 = 11$	$189 = 200-11$
$900.3 + 90.2 + 9.1 = 2889$	$3000-2889 = 111$	$2889 = 3000-111$

or $2889 = m.10^m - 111$, où $m = 3$.

● Ici une autre série apparaît 1, 11, 111, 1111, ... qui est bien plus simple à exprimer :
$1/9 = 0,111111111111\ldots$
or pour faire $1 = E[1/9 \,.\, 10^1] = E[1,11111\ldots] = 1$
$11 = E[1/9 \,.\, 10^2] = E[11,11111\ldots] = 11$
et ainsi de suite

$$\underbrace{1111\ldots11}_{m} = E[1/9 \,.\, 10^m] = E[\underbrace{1111\ldots11}_{m},11111\ldots]$$

● Et on conclut ainsi :
$1.9 = \quad 9 = 1.10 - E[1/9 \,.\, 10^m] \qquad m = 1$
$1.9 + 2.90 = 189 = 2.10 - E[1/9 \,.\, 10^m] \qquad m = 2$
le terme général $m.10^m - E[1/9 \,.\, 10^m]$.

● Il ne nous reste plus qu'à assembler les deux bouts de formule.

Nombres de chiffres $= (m+1)(n-10^m+1) + m.10^m - E[1/9 \,.\, 10^m]$
où $m = E[\log n]$.
Pour notre exemple $n = 8537$ donc $m = 3$ puis
$(3+1)(8537 - 10^3 + 1) + 3.10^3 - 111 = 33041$.

D'une manière générale on obtient la formule :

$$y = (E[\log n] + 1)(n - 10^{E[\log n]} + 1) + E[\log n].10^{E[\log n]} - E[1/9.10^{E[\log n]}]$$

où y désigne le nombre des chiffres de l'entier 123... n associé à μ_n. On en tire facilement le nombre des chiffres significatifs de μ_n. Par exemple $\mu_{10} = 0,123...891$ en a 10, alors que la formule donne 11.

Remarque

On peut représenter bien plus facilement cette formule par un signe de sommation :

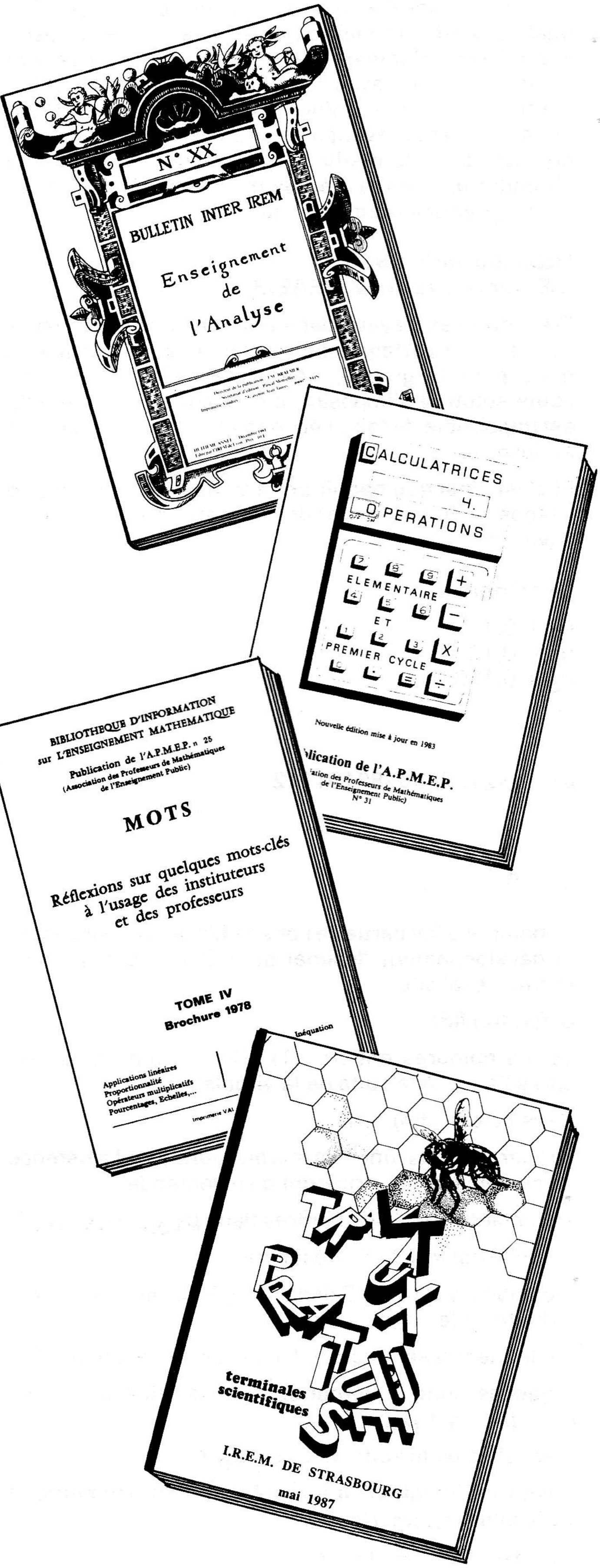
$$y = n + \sum_{i=1}^{n} E[\log i] \text{ !!}$$

$$\text{car } y = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{(E[\log i] + 1)}^{\text{Nombre des chiffres de } i}.$$

Mais cette formule n'est pas très facilement calculable. Et le temps de calcul ! La dernière formule est valable car on doit bien sommer tous les chiffres, un à un, jusqu'à n. ■

STROPHES

"spécial approximations"



CP - CE - CM
6^e - 5^e

CALCUL ET CALCULETTES

Roger CREPIN - Limoges

LES activités proposées ci-après ont pour but d'augmenter les aptitudes calculatoires des enfants en alternant les calculs mentaux, les calculs «à la main», les calculs avec calculettes. Les calculettes ont une seule mémoire. Dans les classes, suivant les activités, les enfants disposent d'une calculette individuelle ou d'une calculette pour deux.

Les travaux ont été vécus dans diverses classes de 1984 à 1987. Pour simplifier la rédaction, les niveaux seront présentés par les sigles : CP, CE, CM, 6^e, 5^e soit CP : cycle préparatoire, enfants de 6 à 7 ans ; CE : cycle élémentaire, enfants de 7 à 9 ans ; CM : cycle moyen, enfants de 9 à 11-12 ans ; 6^e, 5^e : cycle d'observation, enfants de 11 à 13 ans.

Pendant les séquences de travail, les enfants disposent des tables d'addition (CP) et de multiplication résumées dans des tableaux carrés, dits tables de Pythagore (nombres d'entrée de 0 à 10), de cahiers de brouillon avec crayon-gomme ou de feuilles polycopiées à l'avance et des calculettes. Les calculettes n'étant utilisées que lorsque la construction de la table est comprise ; pour compléter et prolonger cette table en particulier.

Dans un premier temps, les enfants prennent conscience des possibilités de la calculette par tâtonnement expérimental. Pour les aider, il leur est distribué des grilles vierges dans lesquelles ils doivent indiquer ce qu'ils font et l'interprétation mathématique qu'ils en tirent. Voici par exemple l'extrait d'un travail au CE :

f																
l																
m																

f signifie : je frappe la touche... l : je lis... sur l'écran
m : j'écris l'égalité mathématique qui correspond au calcul

f	3	+	4	=	9	-	6	=	5	+	3	=	=	=	=	--
l	3	3	4	7	9	9	6	3	5	5	3	8	11	14	17	--
m	3 + 4 = 7				9 - 6 = 3				5 + 3 = 8				8 + 3 = 11 11 + 3 = 14 ------			

Ce travail a permis de comprendre les signes inscrits sur les touches (les deux premiers exemples) mais aussi de comprendre que ces signes n'étaient pas avec une seule fonction (rôle du = dans le troisième exemple). A partir de là, une nouvelle recherche est née et s'est prolongée sur de nombreuses séances. C'est par le fonctionnement de la calculette, par la manipulation individuelle et non par l'explication verbale et magistrale que la calculette est intégrée à l'éducation du calcul numérique.

Les activités ont été vécues aussi dans des classes de perfectionnement, c'est à dire dans des classes où les enfants sont déjà en échec scolaire. Le tâtonnement expérimental est plus long et l'enseignant doit être très vigilant pour que l'outil ne soit pas simplement un jouet muni de boutons-poussoirs mais une véritable aide technique. Les élèves en échec manquent souvent d'attention pour remplir correctement la grille ; certains refusent d'associer papier-crayon-gomme à la calculette, puisque cette dernière est là « pour faire tous les calculs » . Ce passage délicat étant franchi, les enfants font du calcul avec plaisir puisqu'ils réalisent plus souvent des calculs justes. La calculette est un outil qui diminue l'échec scolaire. Le travail par équipe de deux permet en particulier d'associer la vérification à tout calcul écrit. L'utilisation de la calculette dans la construction des nombres décimaux démystifie l'écriture à virgule et évite l'idée que le nombre 16,5 est l'ensemble des naturels 16 et 5 séparés par une virgule.

L'autonomie des enfants dans l'utilisation entraîne pour l'enseignant, un rôle d'animateur vigilant, peu bavard, donc efficace, tout particulièrement dans les synthèses collectives.

Cet aperçu succinct des objectifs et de la méthode nous conduit à présenter maintenant des exemples pris dans des travaux d'élèves dans les rubriques : suites de nombres, prolongement des tables, calcul de différences et à propos de la division.

Suites de nombres - utilisation de l'itération

f	ON	1	+	1	+	1	+	1	+	--	ON	+	1	=	=	=
l	0	1	1	1	2	1	3	1	4	--	0	0	1	2	3	4
m	1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 1 = 4 suite des nombres 1, 2, 3, 4, ...										0->1->2->3->4 a1 a1 a1 a1 ad1 : additionner 1						

CP (mois de mars) pour écrire et nommer la suite des naturels-utilisation du facteur constant.

CP (juin) CE (1^er trimestre). Mêmes exercices avec utilisation du facteur constant. Partir d'un nombre connu et additionner un nombre constant.

Ex. Continuer les suites : 25, 28, 31, ... ; 77,79,81, ... ; 10 ; 20 ; 30 ; ... ; ...

f	ON	+	3	=	=	=	=	ON	3	x	1	=	2	=	3	=
l	0			3	6	9	12	0				3		6		9
m	0, 3, 6, 9, 12, 15 suite des multiples de 3							deux écritures 3x1, 3x2, 3x3,.. de la suite 3 6 9 12 ...								

CE (2^e trimestre). Approche de la multiplication par la suite des multiples d'un nombre.

f	ON	3	+	7	=	=	=	-	3	=	=	=	=	=	=	=
l	0				10	17	24			21	18	15	12	9	6	3
m	-- -> additionner 7 3 -- 10 -- 17 -- 24 soustraire 7 <- --							24 -- 21 -- 18 -- 15 -- 12 -- -> soustraire 3 additionner 3 <- --								

CE (2^e année). Suites croissantes et décroissantes. Idem en CM avec des nombres plus grands.

f		3	x	6	=	11	=	16	=	21	=	17	=	13	=	--
l					18		33		48		63		51		39	
m	x3 6->11->16->21 ÷3 18->33->48->63 multiplier et diviser par 3									21->17->13->... 63->51->39->... soustraire 4 et 12						

CM (2^e année). Comparaison de suites et fonctions numériques.

Construire à partir d'une suite croissante (ou décroissante) une suite croissante (ou décroissante).

f	75.6 ÷ 5	=	=	=	...	75.6 ÷ 3	=	=	=	=	...	...
l		15.12			0.6048		25.2	8.4	2.8	0.9333...		
m	suite de nombres décimaux obtenue à partir de 75,6 en divisant par 5					suite de nombres rationnels obtenue à partir de 75,6 en divisant par 3						

CM (2^e année) 6^e-5^e. Décimaux et rationnels non décimaux.

Les propriétés de divisibilité peuvent être étudiées par des exercices semblables.

6^e-5^e. Recherche pour trouver 20 éléments de suites dont le départ est :

56, 60, 64, ... ; 0, 12, 24, ... ; 97, 93, 89, ... ; ...

pour trouver 7 éléments

0 ; 0,1 ; 0,01 ; ... 6,3 ; 5,4 ; 4,5 ; ... 2,5 ; 4 ; 5,5 ; ... 15 ; 14,4 ; 13,8 ; ...

pour trouver 7 éléments

21 ; 7 ; $\frac{7}{3}$; ... 4,6 ; 2,3 ; 1,15 ; ...

pour trouver 10 éléments
7 ; 10 ; 9 ; 12 ; 11 ; 14 ; ... 0,7 ; 1 ; 0,99 ; 1,29 ; 1,28 ; 1,58

Pour ces dernières suites, les calculs machines ont été conduits de diverses manières, certains élèves ont vu l'alternance des termes de deux suites plus simples : 7, 9, 11 et 10, 12, 14 ; 0,7 ; 0,99 ; 1,28 ; et 1 ; 1,29 ; 1,58 ;

Prolonger les tables d'addition et de multiplication

La calculette est un répertoire qui contient les tables et leur prolongement jusqu'aux nombres de huit chiffres.

CP (fin d'année) début CE, prolonger la table d'addition.

f	ON	+	7	=	1	=	2	=	3	=	5	=	8	=	13	=
l	0			7		8		9		10		12		15		20

m :
a7 → 0 1 2 3 5 8 13
7 8 9 10 12 15 20 s7
additionner 7 — soustraire 7

CM : fonctions numériques $x \mapsto x - 7$
$y \mapsto y - 7$ dans l'ensemble des naturels.

f	7 x 1	=	2	=	0	=	3	=	30	=	40	=	73	=	
l		7		14		0		21		210		280		511	

m :
m7 → 0 1 2 3 30 40 73
0 7 14 21 210 280 511 d7
+ +
multiplier par 7

CE (fin d'année) CM 6^e^-5^e^. Prolonger la table de multiplication.
- fonctions numériques, $x \mapsto x \times 7$ et $y \mapsto y : 7$
- utilisation des propriétés des opérations «+» et «x»

→ 0	10	20	30	40	50	60	70	−
0	3	6	9	12	15	18	21	
+ 0	7	14	21	28	35	42	49	←

CE. CM. 6^e^. 5^e^ : Comparer trois suites de multiples pour constater qu'il suffit de connaître les tables de multiplication de 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Disposer comme ci-contre pour retrouver $x \mapsto x \times 7$

CM. 6^e^. 5^e^ : Des exercices semblables sont faits avec les décimaux, il suffit de les écrire sous forme de quotients $x/10^n$ où x et n entiers.

Calcul de différences

CE : lire autrement la table d'addition, par exemple la ligne 7 de cette table en écrivant :
7 = 7 - 0 = 8 - 1 = 9 - 2 = 17 - 10 = 18 - 11 = 1650 - 1643 = ...

Si l'on pense à la disposition pratique habituelle, la différence 1650-1643 se calcule à la main par la «soustraction à retenue» alors que ce n'est pas le cas de 18-11.

Les enfants constatent l'existence de la propriété connue et formalisée au collège :
Dans N si $a \geqslant b$ alors $a - b = (a + c) - (b + c)$
et si $a \geqslant b$, $b \geqslant c$ alors $a - b = (a - c) - (b - c)$

Le calcul occupe beaucoup de temps au CE parce que les enfants ont l'impression qu'il y a plusieurs soustractions : sans retenue, à une retenue, deux retenues, trois retenues, ... bien que toutes correspondent à la même définition. La calculette permet de vivre rapidement l'existence de plusieurs dispositions pratiques pour calculer une différence.

Ensuite le calcul mental soutient le calcul réel. Par exemple soit à calculer : 6342 - 2758.

```
          a2     a40      a200     s3000
    6342--->6344--->6384--->6584--->3584
    2758--->2760--->2800--->3000---> 0
          a2     a40       a200     s3000

       s2000    s700     s50      s8
    6343--->4342--->3642--->3592--->3584
    2758---> 758--->  58--->  8----> 0
       s2000    s700     s50      s8
```

ou bien combiner les fonctions s et a, en commençant par 58 (60-2) puis 2700 (3000 - 300).

Remarque. Cette méthode plus sûre plaisait aux enfants, cependant pour satisfaire le conservatisme actuel, les enseignants ont malgré tout mis en place la «ritournelle» classique. Pourtant, la méthode exposée ci-dessus a heureusement conforté les aptitudes en calcul de beaucoup d'enfants.

A propos de la division euclidienne

CE. CM. 6^e^. 5^e^. Lire autrement la table de multiplication, par exemple la ligne 7 de cette table en écrivant suivant la classe :

$$7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{210}{30} = \frac{2800}{400} = \frac{3031}{433} \text{ ou } 7 = 14 : 2 = 210 : 30 = 2800 : 400 =$$

Toutes ces divisions exactes admettent le même quotient 7. Le shéma mathématique présenté ci-dessus avec la table de 7 faisant apparaître
433 = 400 + 30 + 3 permet de mettre en place la disposition pratique.

L'écriture fractionnaire des quotients prépare à la simplification des fractions ainsi qu'à la propriété connue et formalisée au Collège.

Dans N si b ≠ 0 et c ≠ 0 alors $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$

et si b ≠ 0 et c ≠ 0 alors $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

```
 3031 | 7
-2800 |---------------
 ---- | 400 + 30 + 3
  231 |
 -210 |
  ---
   21 |
  -21 |
   --
    0 |
```

Les enfants recherchent des exemples et en partant de 78 à la calculette ils construisent des couples (Dividende, diviseur) avec des nombres de plus en plus grands. En s'aidant de la divisibilité ils écrivent dans l'autre sens
2808 : 36 = 1404 : 18 = 702 : 9 = 234 : 3 = 78

CE. CM. L'approche de la division euclidienne part d'un constat : la table de 7, la suite des multiples de 7 ne contient pas tous les naturels, il y a des trous. Les enfants ont cherché des écritures possibles d'égalités telles que :
35 = 7 x 5, 36 = (7 x 5) + 1 ; 37 × (7 x 5) + 2 ... 41 = (7 x 5) + 6, 42 = 7 x 6.

Le calcul d'un quotient et d'un reste est associé à la suite des multiples du diviseur ou la table du diviseur.

Voici les calculs par un élève de CM : 81 divisé par 13.

f	+	13	=	=	=	=	=	=	=	-13 =	M+	81 -	RM	=
1			13	26	39	52	65	78	91	78				3
m	78 < 81 < 91 13 x 6 < 81 < 13 x 7 81 = 13 x 6 + 3 on compte les touches =													

CM 2. 6^e^. 5^e^. Exemple de calcul pour la division de 23742 par 76 lorsqu'on est habile .

f	+ 7600 =	=		=	+ 760 =	+76=	=	M+	23742-RM =
1	7600	15200		22800	23560	23636	23712		30
m	7600x3 <23742< 7600x4 ; 760 <958< 760x2 ; 76 x2 <98 <76x3 23742 = 22800 + 958 958 = 760 + 198 198=76 x2+30 23742 = (7600x3)+(760x1)+(76x2)+30 = (76x312) + 30								

remarquons d'abord que 23742 est dans l'un des trous compris entre 76000 et 7600.

23742 = (7600 x 3) + (760 x 1) + (76 x 2) + 30 = (76 x 312) = 30

f	23742 - 7600	=		=	=	- 760 =	- 76	=	=
1		16142		8542	942	182		106	30
m	23 742 = 76 x 312 + 30								

Ou encore, on s'intéresse au reste en soustrayant des multiples du diviseur.

L'ensemble de ces deux tableaux permet d'écrire la disposition pratique :

```
 23742 | 76
-228   |----
 ----  | 312
   942 |
   -76 |
   ---
   182 |
  -152 |
   ---
    30 |
```

Bibliographie :
- la division à l'école élémentaire Elem. Math III
- MOTS IV (approximation, opérateurs)
- PLOT N° 3 et 10 (bouliers)
- Dictionnaire de l'APMEP Approximations.

Jacques LUBCZANSKI

SIXIEME lettre de l'alphabet grec, zeta (prononcer «dzeta») est le nom d'une fonction mathématique étudiée par Léonhard Euler au XVIIIe siècle...

...et qui, malgré les travaux acharnés de nombreux mathématiciens, ne nous a pas encore livré tous ses secrets !

La fonction ζ est définie par

$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$

lorsque cette somme infinie a un sens,

(c'est-à-dire lorsque la somme finie $\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \ldots + \frac{1}{n^x}$ a une limite quand n tend vers l'infini).

L'objet de ce travail est l'étude d'une valeur approchée, puis de la valeur exacte de

$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$

A - ETUDE DE LA SUITE : $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

1 - Soit f la fonction en escalier définie par :

$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [n, n+1[\ \Rightarrow f(x) = \frac{1}{n^2}$

Dessiner la courbre représentative de f ; calculer $\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

2 - Montrer que $\forall x > 1$, on a la double inégalité

$\frac{1}{(x-1)^2} > f(x) \geqslant \frac{1}{x^2}$

En déduire un encadrement de $\frac{1}{n^2}$ par deux intégrales.

3 - Etudier la convergence de la suite pour $n \geqslant 1$: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

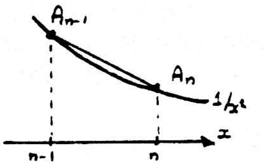
que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

B - ENCADREMENTS DE ζ (2)

1 - Déduire de la question A 2 un encadrement de la somme $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

2 - Soit An le point de coordonnées $(n, 1/n^2)$ et φ la fonction dont la restriction à l'intervalle [n-1, n] est représentée par le segment de droite $[A_{n-1}, A_n]$.



Calculer $\int_{n-1}^{n} \varphi(x)\,dx$

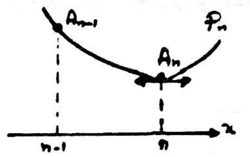
Montrer qu'on a :

$\int_{10}^{n} \varphi(x)\,dx = V_n - V_{10} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

Comparer $\varphi(x)$ et $\frac{1}{x^2}$; minorer V_n, pour $n > 10$.

Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

3 - Soit Pn la parabole d'axe vertical, de sommet An, et passant par An-1 ; soit ψ la fonction dont la restriction à l'intervalle [n -1, n] est représentée par l'arc $\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ de la parabole Pn.



Calculer l'équation de Pn dans un repère d'origine An.

Calculer $\int_{n-1}^{n} \psi(x)\, dx$

Montrer que :

$$\int_{10}^{n} \psi(x)\, dx = V_n - V_{10} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Comparer $\psi(x)$ et $\frac{1}{x^2}$; majorer n, pour $n > 10$

Que peut-on en conclure pour $\zeta(2)$?

C. CALCUL DE LA VALEUR DE $\zeta(2)$

1 - Calculer, à l'aide d'intégration par parties,

$$\int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \text{ et } \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$$

En déduire qu on peut trouver a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_0^{\pi} (ax^2 + bx) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n^2}$$

2 - Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos(nx) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Montrer que, si on pose, pour $x \in]0, \pi]$,

$$g(x) = \frac{a\, x^{x} + bx}{2 \sin\frac{x}{2}}$$

On a l'égalité :

$$V_n = \int_0^{\pi} g(x) . \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right] dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (ax^2 + bx)\, dx$$

3 - Montrer que, si on pose $g(0) = b$, g est continue et dérivable sur $[0, \pi]$, et g' est continue.

En déduire que :

$$\int_0^{\pi} g(x) . \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right] dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left(b + \int_0^{\pi} g'(x) . \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) . x\right] dx\right)$$

Quelle est la limite de cette expression quand n tend vers l'infini ?

En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

En 1736, dans le dixième volume des "Institutions du Calcul Différentiel", L. Euler calcule la valeur de la fonction ζ pour les entiers pairs :

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}\, \pi^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|$$

Dans cette formule, les nombres B_{2n} sont les "nombres de Bernouilli", introduits en 1713 par Jacob Bernouilli... ... pour calculer autre chose !

Ces nombres se calculent de proche en proche par la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k} B_k = 0$$

On trouve $B_0 = 1$; $B_1 = -\frac{1}{2}$; $B_2 = \frac{1}{6}$... puis tous les Bk avec k impair sont nuls...

Calculer des valeurs approchées de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$... avec la formule d'Euler.

Quant aux valeurs de ζ pour les entiers impairs... on ne connait toujours pas leurs valeurs !

Le résultat le plus récent (R. Apéry, 1978) dit seulement que $\zeta(3)$ est un irrationnel.

Les recherches sur la fonction ζ ont pris une autre direction : on peut définir $\zeta(x)$ pour x réel, $x > 1$ et aussi pour x complexe. Et on a pu mettre en évidence des liens étroits entre les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\zeta(z) = 0$ et la répartition des nombres premiers parmi les entiers !

Le problème le plus important dans ce domaine est d'arriver à prouver - ou à refuter - une conjecture de Bernhard Riemann (1826-1866) :

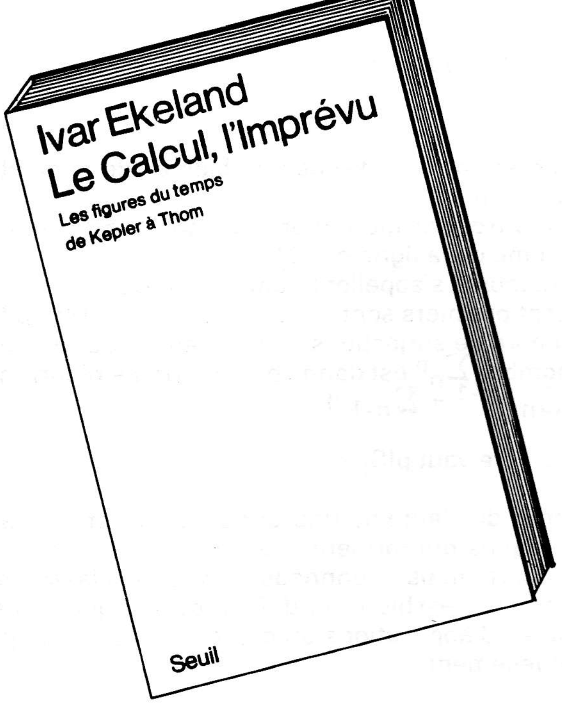
"les racines complexes de $\zeta(z) = 0$ vérifient : $\mathrm{Re}(z) = 1/2$"

L'exploration systématique des racines de $\zeta(z) = 0$ avec un ordinateur a donné raison à Riemann pour les 3 500 000 premières racines. Et après ?

(Référence : F. Le Lionnais "les nombres remarquables" p. 27).

■

A-PLOT-STROPHE



Dans son livre Ivar Ekeland, mathématicien de l'Université Dauphine, nous fait une magistrale démonstration de l'art de vulgariser les connaissances scientifiques. Cette qualité, qui lui a valu le prix J. Rostand 1985, est d'autant plus rare actuellement que peu de scientifiques osent s'y confronter laissant la place aux journalistes dits scientifiques.

Qu'est-ce qu'une théorie scientifique ? Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ? L'Univers est-il déterministe ? Y a-t-il encore une part d'imprévu ? A travers le Temps et l'Espace, l'Histoire et la Science, I. Ekeland nous décrit comment les hommes, savants et chercheurs, ont illustré ces questions par des représentations successives, s'appuyant sur des théories mathématiques disponibles à ce moment-là ou créées pour cela.

Du mouvement des astres et des planètes à la théorie des catastrophes, l'auteur nous fait évoluer des premières théories scientifiques du type déterministes (Aristote de Samos, Copernic, Képler, ...) aux théories actuelles plus... aléatoires ! La théorie des catastrophes de Thom mais aussi les attracteurs étranges et les problèmes et découvertes qui en découlent.

Pour les enseignants de Lycée, il nous propose même une annexe sur la constante de Feigenbaum qui pourrait faire un excellent thème de travail dès la seconde débouchant sur une réflexion scientifique qui est loin d'être inintéressante (du type petites causes - grands effets).

Cf. bulletin APM n° 350 - sept. 85 - p. 649.

Dans ce livre G. Th. Guilbaud nous donne de «rigoureuses» leçons d'à peu près, montrant à travers l'histoire que la rigueur mathématique est plus liée aux problèmes d'approximation qu'à l'établissement de «vérités» dites «mathématiques».

Exemples en sciences sociales :

«Vérité des chiffres : ... la vérité, s'il y en a une, c'est qu'il n'y a pas dans ce domaine de certitude statistique. Chacun, dès lors, peut se risquer à avancer son propre chiffre. Avec les réserves d'usage, celui qu'on peut estimer le plus juste, ou le moins inexact, tourne autour de quatre millions, sans doute un peu moins...»

En astronomie (ou l'on retrouve Ekeland) :

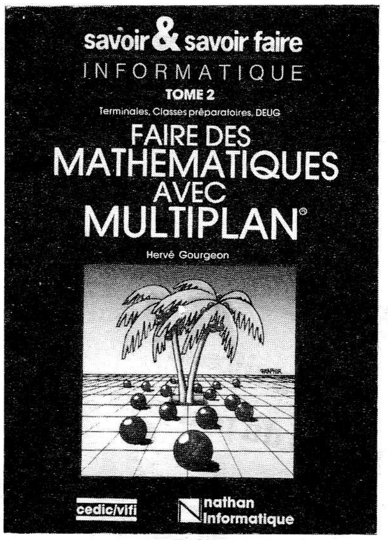
«L'orbite d'un satellite artificiel est, en première approximation, une ellipse ; les orbites sont liées entre elles par la troisième loi de Kepler, ici pratiquement rigoureuse, les masses des satellites étant négligeables devant celle du corps central...»

En mathématique où l'auteur cite Dieudonné (calcul infinitésimal, Hermann, 1968) :

«Il faut avoir appris à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit, ce qui est prépondérant de ce qui est négligeable. En d'autres termes, le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et pourrait se résumer en trois mots : Majorer, Minorer, Approcher».

A travers son livre G. Th. Guilbaud, nous donne une mine d'idées, d'activités numériques pour la classe. En commençant par pi noté π depuis... (combien de) siècles ? en passant par les racines carrées, cubiques, les élections (et oui encore !) et les harmonies musicales. Vous y trouverez toute une série de problèmes itératifs et récursifs que vos élèves pourront aborder avec leurs calculatrices (mais en ont-ils encore) ou leurs micros !

M. Laure Darche Giorgi ■



Depuis l'arrivée du matériel IPT dans les établissements scolaires, les tableurs sont utilisés ici ou là par les professeurs de mathématiques.
Quelques documents, polycopiés ou brochures de divers centres comme celui du Cueep et de l'Irem de Lille («à propos du support tableau en maths» 1987) donnaient des exemples d'utilisation.
Voici qu'apparaîssent en librairie les premiers livres consacrés à ce sujet : »**Faire des Mathématiques avec Multiplan**» en deux tomes ; l'un de Marc Laura (niveau secondes à terminales), l'autre d'Hervé Gourgeon (terminales, niveau classes préparatoires et Deug).
Ces deux ouvrages sont édités chez Cedic/Vifi - Nathan informatique. Sans doute, la volonté de les rendre indépendants a amené à quelques redites : une première partie (presque la moitié de l'ouvrage dans le tome 1, une trentaine de page dans le second) est un guide pour s'initier au tableur. Cette première partie est suivie, dans chaque livre, par un chapitre de conseils sur la réalisation d'un modèle de feuille de calcul, chapitre utile pour les débutants. Suivent, dans chaque tome, de nombreux exemples de réalisation de feuilles de calcul.
Les feuilles du premier tome sont données sous forme brute : il n'y a pas d'explication mathématique, et c'est dommage, par exemple pour un élève qui désirerait travailler seul. Par contre les feuilles du tome 2 sont introduites à partir de situations mathématiques exploitables dans les classes.
Peut-être quelques points faibles :
- pour bien maîtriser l'ITERATION de Multiplan (cas auquel Multiplan n'est plus vraiment utilisé comme tableur, la programmation redevenant impérative), il vaut mieux savoir que celui-ci calcule colonne par colonne !
- la méthode des isopérimétres peut se traiter par une suite double récurrente, on ne connaît pas de formule sommatoire pour les nombres de Stirling.

- Avouons aussi la surprise d'apprendre ~~que~~ les nombres algébriques ont des développements dont **tout professeur de mathématiques** devrait avoir connaissance.
Ces deux livres peuvent aider professeurs et élèves dans l'approche de cet outil et de son utilisation facile dans et hors la classe.
On peut le recommander pour une première approche de «tableurs et mathématiques» en attendant le numéro spécial co-édité par «le Plot» et «La Source» des informations sur la pédagogie de l'informatique. (Cf. Plot 40 p. 10).

Calcul des nombres de Stirling S^p de deuxième espèce.

Ils sont définis par :

$$S_n^p = S_{n-1}^{p-1} + p \times S_{n-1}^p$$

$S_{n,1} = 1$ pour $n \geqslant 1$

$S_{1,p} = 0$ pour $p > 1$

Ils servent à résoudre des problèmes de dénombrement comme :
- Nombre de partitions d'un ensemble (il est donné par la somme de la ligne n + 3).
Ces nombres s'appellent nombres de BELL ;
les sept premiers sont 1 ; 2 ; 5 ; 15 ; 52 ; 203 ; 877.
- Nombre de surjections d'un ensemble sur un autre. Ce nombre $\Sigma_n{}^p$ est donné par la formule récurrente : $p^* (\Sigma_{n-1}{}^{p-1} + \Sigma_{n-1}{}^p)$.

Ce nombre vaut $p! S_n{}^p$

(comme dit l'auteur, une surjection c'est p images réciproques qui forment une partition de l'ensemble de départ, mais ordonnées (il y a p! classements distincts et c'est bien plus difficile que les questions de nombres d'applications ou d'injections que l'on pose habituellement !)

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0							
1		1					
2		1	1	0	0	0	0
3		1	3	1	0	0	0
4		1	7	6	1	0	0
5		1	15	25	10	1	0
6		1	31	90	65	15	1
7		1	63	301	350	140	21
8		1	127	966	1701	1050	266
9		1	255	3025	7770	6951	2646
10		1	511	9330	34105	42525	22827
11		1	1023	28501	145750	246730	179487
12		1	2047	86526	611501	1379400	1323652
13		1	4095	261625	2532530	7508501	9321312
14		1	8191	788970	10391745	40075035	63436373
15		1	16383	2375101	42355950	210766920	420693273
16		1	32767	7141686	171798901	1,096E+09	2,735E+09
17		1	65535	21457825	694337290	5,653E+09	1,751E+10
18		1	131071	64439010	2,799E+09	2,896E+10	1,107E+11
19		1	262143	193448101	1,126E+10	1,476E+11	6,931E+11
20		1	524287	580606446	4,523E+10	7,492E+11	4,306E+12

n = 20
Sn,p 7,492E+11
p = 5

En élargissant les colonnes 4, 5, 6, on aurait obtenu l'écriture entière des nombres en bas de colonne).

Jean-Marie Chevallier ■

COLLEGES

APPROXIMATIONS ET TABLEURS

Jean-Marie CHEVALLIER - Orléans

EN attendant un futur, mais proche, numéro spécial sur "Maths et tableurs" coproduit avec le bulletin enseignement et informatique "La Source" (cf. publicité in Plot 40 - page 10), l'un des membres de cette équipe nous livre, en avant-première, deux exemples d'utilisation du tableur Multiplan en Collège.

1 - Les fractions Egyptiennes

Les Egyptiens de l'empire n'utilisaient que des fractions de numérateur 1 (sauf 2/3 !).
Une fraction quelconque s'exprimait comme somme de fractions de numérateur 1. Pour les calculs, ils utilisaient des tables donnant une décomposition des fractions de type $\frac{2}{n}$. Les calculs sur les fractions n'en étaient pas simplifiés, d'autant qu'ils utilisaient des fractions de l'unité de dénominateurs distincts.

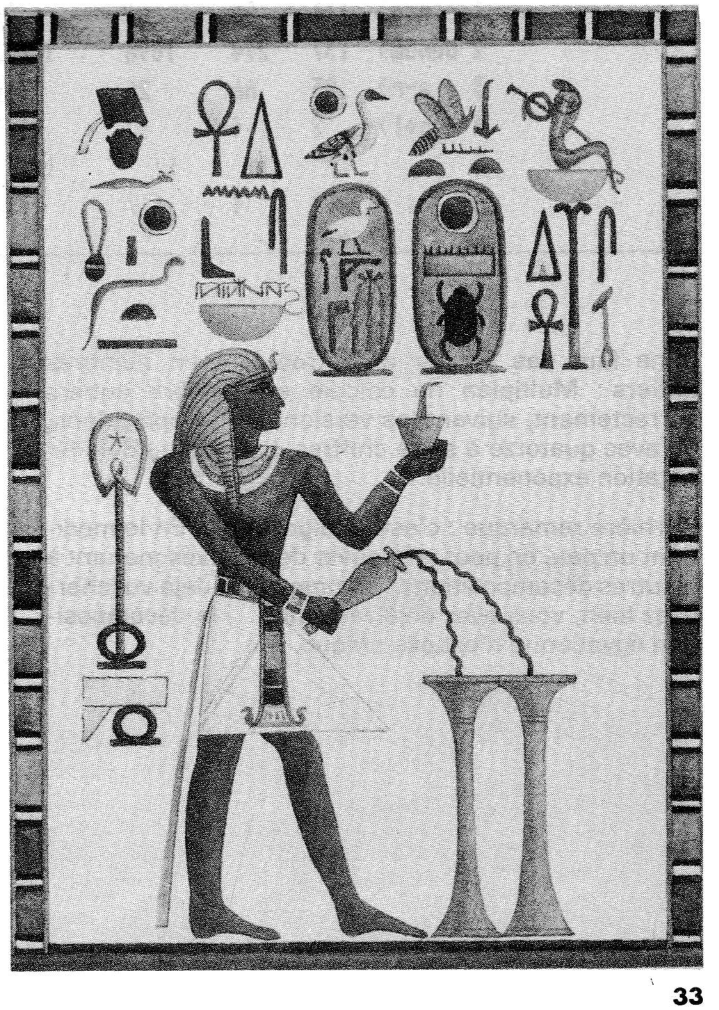
Il n'est pas évident, au départ, que tout rationnel compris entre 0 et 1 puisse s'exprimer comme somme de fractions unitaires distinctes.

Le premier algorithme décrit se trouve chez **Léonard de Pise**, qui utilisait ce type de décomposition.
L'algorithme fut redécouvert et prouvé par **Sylvester** en 1880.

L'idée est simple :
si a/b est la fraction, on prend pour premier terme la plus grande fraction unitaire inférieure à a/b. On soustrait cette fraction unitaire de a/b, et on recommence avec la fraction obtenue.

La démonstration se fait en raisonnant à partir de la division euclidienne de b par a.

Je laisse le plaisir au lecteur de s'en convaincre. Cet algorithme se déclare sans problème dans Multiplan (la recopie de colonne permettant de "recommencer avec la fraction obtenue...").



Voici le tableau des formules ; on introduit le numérateur et le dénominateur du rationnel à décomposer en ligne 1 colonne 2 et ligne 2 colonne 2 respectivement.

Le résultat se lit dans les lignes 5-6. Une tentative de convivialité a consisté à écrire le texte "+ 1/" dans chaque case de la ligne 5, au dessus du dénominateur correspondant. Le processus s'arrête lors du test en haut de chaque colonne ; s'il n'y a plus rien à calculer, on y met un **texte vide**. Les cases de la même colonne qui calculent avec le contenu numérique de la première case indiquent un profond mécontentement en affichant le message d'erreur **VALEUR** !

	1	2	3
1	"num>"	111	SI(LC(-1)=L(+2)C(-1);"";L(+2)C(-1))
2	"denom>"	137	L(+2)C(-1)*LC(-1)
3	"a-r>"	L(-2)C-MOD(L(-1)C;L(-2)C)	L(-2)C-MOD(L(-1)C;L(-2)C)
4	"q+1>"	1+((L(-2)C-(MOD(L(-2)C;L(-3)C)))/L(-3)C)	1+((L(-2)C-(MOD(L(-2)C;L(-3)C)))/L(-3)C)
5		"+ 1/"	"+ 1/"
6		SI(MOD(L(-4)C;L(-5)C)=0;L(-4)C/L(-5)C;L(-2)C)	SI(MOD(L(-4)C;L(-5)C)=0;L(-4)C/L(-5)C;L(-2)C)

Et voici deux calculs :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	num>	131	125	101	87	84	72	36		VALEUR!
2	denom>	137	274	822	7398	636228	4819427100	322595524246025000	2,891E+33	VALEUR!
3	a-r>	125	101	87	84	72	36	36	VALEUR!	VALEUR!
4	q+1>	2	3	9	86	7575	66936488	8960986784611800	VALEUR!	VALEUR!
5		+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	1/
6		2	3	9	86	7575	66936488	8960986784611800	VALEUR!	REF!

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	num>	111	85	66	26	10	6	
2	denom>	137	274	1096	18632	13359144	17846680856760	5,308E+25
3	a-r>	85	66	26	10	6	6	VALEUR!
4	q+1>	2	4	17	717	1335915	2974446809461	VALEUR!
5		1/	1/	1/	1/	1/	1/	1/
6		2	4	17	717	1335915	2974446809460	VALEUR!

Il ne faut pas vouloir aller trop loin en nombres entiers : Multiplan ne calcule en nombre entiers correctement, suivant les versions et les opérations, qu'avec quatorze à seize chiffres. Il passe au delà en notation exponentielle.

Dernière remarque : c'est un algorithme. En le modifiant un peu, on peut en trouver des dérivés menant à d'autres décompositions : comme on l'a déjà vu (cherchez bien, vous avez déjà rencontré...) la décomposition égyptienne n'est pas unique.

Bibliographie

- "Fractions Egyptiennes", in *Histoire de Mathématiques pour les collèges CEDIC*

- "Mains casse-tête et problèmes sur les nombres issus de curieuses fractions utilisées dans l'Egypte Ancienne" in *Jeux Mathématiques par Martin Gardner* - Editions "Pour la Science", reprise d'articles du n° Décembre 78.

- "1932 exercices posés à l'oral du CAPES"

Luc Moisotte

et, dans nos régionales :

- Taol Lagad : bulletin de l'Irem de Brest n° 50 et 51 - 1987

- Compte-rendu de l'Université d'été "Histoire des maths" 84 - Irem du Mans - 1986

- Algèbre et calcul en Egypte antique. Irem de Lyon - 1986.

- Cahiers d'histoire des Maths - Irem de Poitiers - 1980

2 - L'inverse d'un nombre par des multiplications

La méthode de Newton (encore elle !) permet de calculer l'inverse d'un nombre en utilisant uniquement des multiplications.

On montre, sans trop de peine (ndlr : pour ceux qui peinent, le dire à l'auteur !), que la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 \in [0, \frac{2}{b}] \\ a_{n+1} = a_n (2 - b \times a_n) \end{cases}$$

converge vers $1/b$. On peut obtenir cette suite en cherchant, par Newton, les solutions de l'équation

$$\frac{1}{x} - b = 0$$

Un logiciel de bon aloi, PHASER, appelé à la rescousse, peut d'ailleurs nous donner une image graphique "en escalier" de la suite ainsi définie, ainsi que les quinze premières valeurs obtenues pour $b = 0{,}425$, $a_0 = 0{,}1$.

On peut y vérifier que la tangente au point d'intersection de $y = x$ et $y = x(2 - bx)$ y est horizontale, et que le nombre de décimales exactes y double à chaque étape.

```
EQUATION = invers
PARAMETERS:
b = 0.425000

      TIME = 0.0.
IC 1: x1 = 0.1000000000

      TIME = 1.000000
IC 1: x1 = 0.1957500000

      TIME = 2.000000
IC 1: x1 = 0.3752148234

      TIME = 3.000000
IC 1: x1 = 0.6905955273

      TIME = 4.000000
IC 1: x1 = 1.1784991271

      TIME = 5.000000
IC 1: x1 = 1.7667326724

      TIME = 6.000000
IC 1: x1 = 2.2068940021

      TIME = 7.000000
IC 1: x1 = 2.3438760212

      TIME = 8.000000
IC 1: x1 = 2.3529062512

      TIME = 9.000000
IC 1: x1 = 2.3529411760

      TIME = 10.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

      TIME = 11.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

      TIME = 12.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

      TIME = 13.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

      TIME = 14.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

      TIME = 15.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765
```

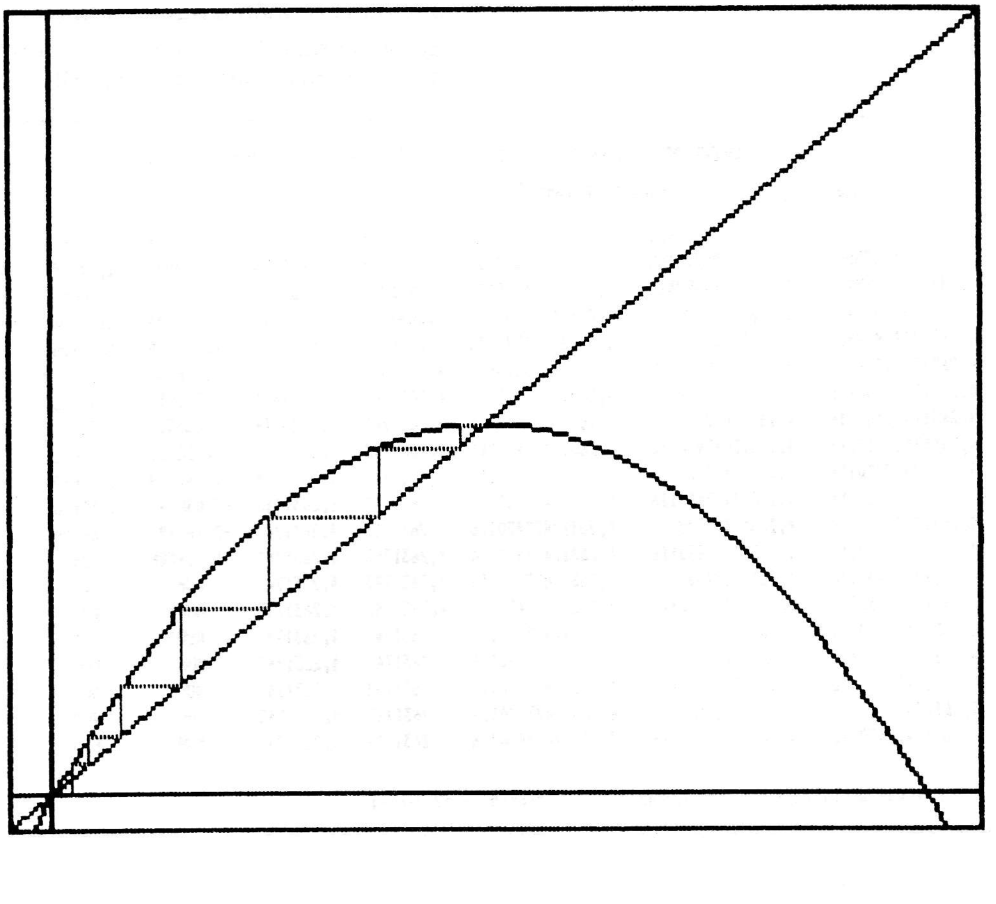
Multiplan peut nous permettre, à peu de frais, une visualisation numérique pour une série de valeurs initiales, pouvant mettre en évidence plusieurs propriétés de cette suite :

si $a_0 < 0$ la suite à l'air de diverger
$a_0 = 0$ suite constante nulle

$\frac{2}{b} > 0$, même petit : convergence vers $1/b$

$a_0 = \frac{2}{b}$: retour à l'origine !

$a_0 = \frac{2}{b}$: divergence rapide vers $+\infty$



ligne 7 colonne 3	on y place la première valeur initiale
ligne 8 colonne 2	on a nommé la cellule PAS et l'on y place (on change) la valeur numérique du pas de parcours des valeurs initiales
ligne 9 colonne 2	on a nommé la cellule B, et on y place le nombre à inverser.

Dans les cellules suivant la ligne 7, on place la formule LC (-1) + pas [ajoute à la valeur de la cellule précédente de la même ligne la valeur qui se trouve dans la cellule de nom : PAS !].

La formule fondamentale L(-1) c* (2 - B* L(-1) C) est placée en ligne 8 colonne 4, recopiée vers le bas le nombre de fois désiré et la colonne de formule recopiée dans les colonnes suivantes en une seule commande. La colonne 3 est un compteur précisant l'indice i de l'a_i.

Voici le tableau des formules :

	1	2	3	4	5
7		"x0 = "		6	LC(-1)+pas
8	"pas = "	0,6	1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
9	"nombre B ="	0,234567	L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
10			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
11			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
12			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
13			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
14			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
15			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
16			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
17			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
18			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)

Voici un des tableaux obtenu, en partant de la valeur initiale 6 (calcul dans la colonne) et avec les autres valeurs initiales obtenues par addition du pas.

On peut y voir la convergence (d'ailleurs de plus en plus lente) pour les valeurs initiales comprises entre 0 et 2/b, et une divergence rapide pour les valeurs plus grandes que 2/b. Pour voir les autres cas, il suffit de changer valeur initiale et pas sur une feuille de calcul assez grande.

Bibliographie :

- "Analyse 1" Léonard Epistemon CEDIC Nathan.
- "Mathématiques et Informatique" Arthur Engel CEDIC Nathan. 1986 - 2e édition.
- "Faire des Mathématiques avec Multiplan" t1 et 2 - CEDIC/VIFI - Nathan Informatique. 1987.

Avec un guide pour apprendre Multiplan, cf. Aplostrophe dans ce même numéro du Plot.

Et, bien entendu, la documentation Multiplan fournie avec le logiciel par la maison MICROSOFT !

CALCUL DE L'INVERSE D'UN NOMBRE PAR LA METHODE DE NEWTON

pas = 0,6 nombre B =0,234567

x0 =	6	6,6	7,2	7,8	8,4	9	9,6	10,2
1	3,555588	2,98226148	2,24004672	1,3289437	0,2489525	-0,999927	-2,417695	-4,004351
2	4,14573165915931	3,87831138082413	3,30308096410132	2,2436207	0,4833671	-2,234387	-6,206492	-11,76994
3	4,25993894612457	4,22843034002937	4,04695530107103	3,3064701	0,9119291	-5,639846	-21,44863	-56,03481
4	4,26317181900664	4,26289111886556	4,25220811589978	4,0484791	1,6287889	-18,74076	-150,8083	-848,5865
5	4,26317427429974	4,26317425549428	4,26314606606421	4,2523621	2,6352825	-119,8653	-5636,411	-170608,7
6	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427411451	4,2631469	3,6415643	-3609,915	-7463261	-6,83E+09
7	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,1725378	-3063977	-1,31E+13	-1,09E+19
8	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2612473	-2,2E+12	-4E+25	-2,81E+37
9	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631734	-1,14E+24	-3,76E+50	-1,85E+74
10	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-3,03E+47	-3,3E+100	-8E+147
11	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-2,16E+94	-2,6E+200	-1,5E+295
12	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-1,1E+188	NUM!	NUM!
13	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
14	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
15	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
16	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
17	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
18	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
19	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!

inverse de L19C4 = 0,234567 précision =2,776E-17

TABLEURS ET GRANDS NOMBRES

Jacques PINAUD - Dreux

VOICI de petits programmes développés pour apprendre à utiliser les tableurs Multiplan avec, en arrière plan, le souci pédagogique de montrer la souplesse de l'outil à travailler avec les grands nombres. Le tableur, feuille de calcul automatique et électronique, permet de présenter les résultats sans les problèmes d'affichage qui sont la plaie des débutants sur des langages type Basic.

La feuille de calcul

Elle se présente sous forme de case, appelées cellules, repérables par leurs coordonnées (ex : L3C2), que l'on peut remplir par des mots, des nombres ou des formules.

	C1	C2	C4	C5
L1				
L2				
L3		X		
L4				

Le contenu d'une cellule peut être utilisé pour le calcul du contenu d'une autre par l'intermédiaire d'un nom qui lui est donné ou de ses coordonnées absolues ou relatives.

Muni de ces quelques notions, on peut rapidement utiliser Multiplan et découvrir sa puissance de calcul et ses limites.

Puissance d'un nombre

Calculons les puissances de 2 jusqu'à 2^{90}.
Placez-vous en L1C1 et tapez 1
Descendez en L2C1 et tapez 2
Donnez lui le nom A.
Dans L3C1, il s'agit de calculer

1
2

2^2, c'est-à-dire la case du dessus multipliée par 2. Pour cela tapez «=» puis indiquez avec vos flèches ou cliquez avec votre souris la case du dessus puis tapez «*» et «A», passez à la cellule du dessous. 4 s'affiche dans L3C1. On recopie alors, au moyen de la commande Recopie, la cellule L(-1)C*A dans les cellules en dessous jusqu'à la ligne 90 et les puissances de 2 s'affichent plus vite que l'éclair !

Mais, surprise, en élargissant les colonnes au maximum on s'aperçoit qu'à partir de la puissance 49, le résultat est arrondi à la dizaine. Seuls, 13 chiffres significatifs apparaissent. Pour s'en sortir une seule solution :

Calculer par tranches

xxx	xxxxxxxxxxx	LC(-2)*A	LC(-2)*A	ENT(LC(-1)/E)
L(-1)C(+2) +L(-1)C(+4)	L(-1)C(+2) -L(-1)C(+3)			

E désigne la case où vous placez 10^{10} et Ent(LC(-1)/E) désigne la retenue partie entière au-dessus de 10 chiffres.
En répétant ces formules vers le bas (toujours par la commande recopie), on obtient les puissances suivantes jusqu'à 20 chiffres significatifs. L'extension à plus de chiffres se conçoit sans problème par répétition de la procédure sur une autre colonne.

Remarque :
Pour faire la mise au point il vaut mieux utiliser des colonnes larges de 3 caractères avec E = 10.

Puissances de 2		
multiplications par tranches de 13 chiffres		
0	0	1
1	0	2
2	0	4
3	0	8
4	0	16
---	------	-------------
43	0	8796093022208
44	1	7592186044416
45	3	5184372088832
46	7	368744177664
47	14	737488355328
48	28	1474976710656
49	56	2949953421312
50	112	5899906842312

Factorielles

Tapez :

L(-1)C+1		L(-1)C*LC(-2)

Recopiez vers le bas. A partir de 17 !, il faut recommencer à multiplier par tranches comme précédemment.

FACTORIELLES

				1	1
		0	0	2	2
		0	0	6	3
		0	0	24	4
		0	0	120	5
		0	0	720	6
		0	0	5040	7
		0	0	40320	8
		0	0	362880	9
		0	0	3628800	10
		0	0	39916800	11
		0	0	479001600	12
		0	0	6227020800	13
		0	0	87178291200	14
		0	1	307674368000	15
		0	20	922789888000	16
		0	355	687428096000	17
		0	6402	373705728000	18
		0	121645	100408832000	19
		0	2432902	8176640000	20
		0	51090942	171709440000	21
		0	1124000727	777607680000	22
		0	25852016738	884976640000	23
		0	620448401733	239439360000	24
		15	511210043330	985984000000	25
		403	291461126605	635584000000	26
		10888	869450418352	160768000000	27
		304888	344611713860	501504000000	28
		8841761	993739701954	543616000000	29
		265252859	812191058636	308480000000	30
		8222838654	177922817725	562880000000	31
		263130836933	693530167218	12160000000	32
0	8	683317618811	886495518194	401280000000	33
0	295	232799039604	140847618609	643520000000	34
0	10333	147966386144	929666651337	523200000000	35
0	371993	326789901217	467999448150	835200000000	36
0	13763753	91226345046	315979581580	902400000000	37
0	523022617	466601111760	7224100074	291200000000	38
0	20397882081	197443358640	281739902897	356800000000	39
0	815915283247	897734345611	269596115894	272000000000	40
33	452526613163	807108170062	53440751665	152000000000	41
1405	6117752879	898543142606	244511569936	384000000000	42
60415	263063373835	637355132068	513997507264	512000000000	43
2658271	574788448768	43625811014	615890319638	528000000000	44
119622220	865480194561	963161495657	715064383733	760000000000	45
5502622159	812088949850	305428800254	892961651752	960000000000	46
258623241511	168180642964	355153611979	969197632389	120000000000	47

Racines carrées

Avec la même idée d'essayer de calculer avec plus de 15 chiffres $\sqrt{a}$, il faut ici utiliser un algorithme n'utilisant que la multiplication.
C'est presque le cas avec la suite :

$$U_{n+1} = U_n(3a - U_n)/2a$$

obtenue en appliquant la méthode de Newton, décrite par ailleurs, à la fonction :

$$x \dashrightarrow 1 - a/x^2$$

Pour cela il faut faire une multiplication de deux nombres tous deux divisés en tranches de 7 chiffres.
Avec deux tranches cela donne, en adoptant la disposition classique :

	place de la virgule		
Facteur 1			
facteur 2			
	L(-1)C(-1) * L(-2)C	L(-1)C + L(-2)C	produits
L(-2)C(-1)*L(-3)C(-1)	L(-2)C * L(-3)C(-1)		case par case
	L(-1)C + L(-2)C	sommes par colonnes	
	ENT((L(-1)C+LC(+1))/E)	ENT(L(-3)C/E)	retenues
L(-3)C + L(-1)C(+1)	L(-2)C+L(-1)C(+1)-L(-1)C*E	L(-4)C-L(-1)C*E	résultats
	place de la virgule		

Il suffit d'un peu de patience pour faire une zone, appelée MULT, à cinq tranches.
La commande Recopie permet de la recopier où l'on veut ! Seules les dix premières cases seront à modifier pour aller chercher les facteurs convenables.
Le calcul d'un terme nécessite l'utilisation de trois fois cette multiplication.
Une fois un terme calculé, on le met dans un tableau récapitulatif.
L'observation des résultats montre que cette suite est d'ordre 2.
Reste le calcul de l'inverse de 2a. Dans le cas général, on peut utiliser la suite

$$U_{n+1} = U_n/(2 - aU_n)$$

obtenue en appliquant la méthode de Newton à la fonction $x \dashrightarrow a - 1/x$.

Et ainsi, la porte est ouverte à la programmation d'autres suites,... mais la performance ne saurait être supérieure.

calcul de $\sqrt{5}$ avec a = 5

u0:	2	0	0	0	0
u1:	2	2000000	0	0	0
u3:	2	2352000	0	0	0
u4:	2	2360674	7217920	0	0
u5:	2	2360679	7749961	8403173	6557169
u6:	2	2360679	7749978	9696409	1736490
u7:	2	2360679	7749978	9696409	1736686
u8:	2	2360679	7749978	9696409	1736688

MULTIPLICATION PAR TRANCHES

$2^{45} \times 2^{45} = 2^{90}$

f1:					0	35	1843	7208	8832
f2:					0	35	1843	7208	8832
					0	3E+05	2E+07	6E+07	8E+07
				0	3E+05	1E+07	5E+07	6E+07	
			0	64505	3E+06	1E+07	2E+07		
		0	1225	64505	3E+05	3E+05			
	0	0	0	0	0				
		0	1225	1E+05	4E+06	3E+07	8E+07	1E+08	
		0	0	12	390	2719	8452	12732	7800
R:	0	0	1237	9400	3928	5380	2748	9912	4224

■

CALCUL DES VARIATIONS ET BRACHYSTOCHRONE

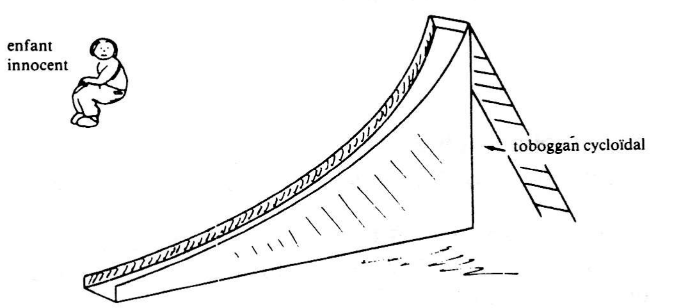
LES problèmes d'extrema ont une histoire qui remonte à la période grecque. Ainsi les problèmes isopérimétriques connus depuis l'Antiquité : de toutes les courbes simples et fermées de périmètre fixé, c'est le cercle qui a la plus grande aire. Euclide prouve, au III^ème^ siècle avant notre ère, ce résultat dans le cas des rectangles (cf. PLOT n° 33 - Décembre 85).

C'est Fermat, au XVII^e^ siècle, qui donne la traduction analytique de la méthode d'Euclide dans laquelle l'aire A est donnée par l'expression : $A(x) = x.(a - x)$, dans laquelle a désigne le demi-périmètre fixé de chaque rectangle. Il relie les points stationnaires de la courbe $(x, A(x))$ aux points qui ont une tangente horizontale, c'est-à-dire aux points où la dérivée est nulle : $A'(x) = 0$.

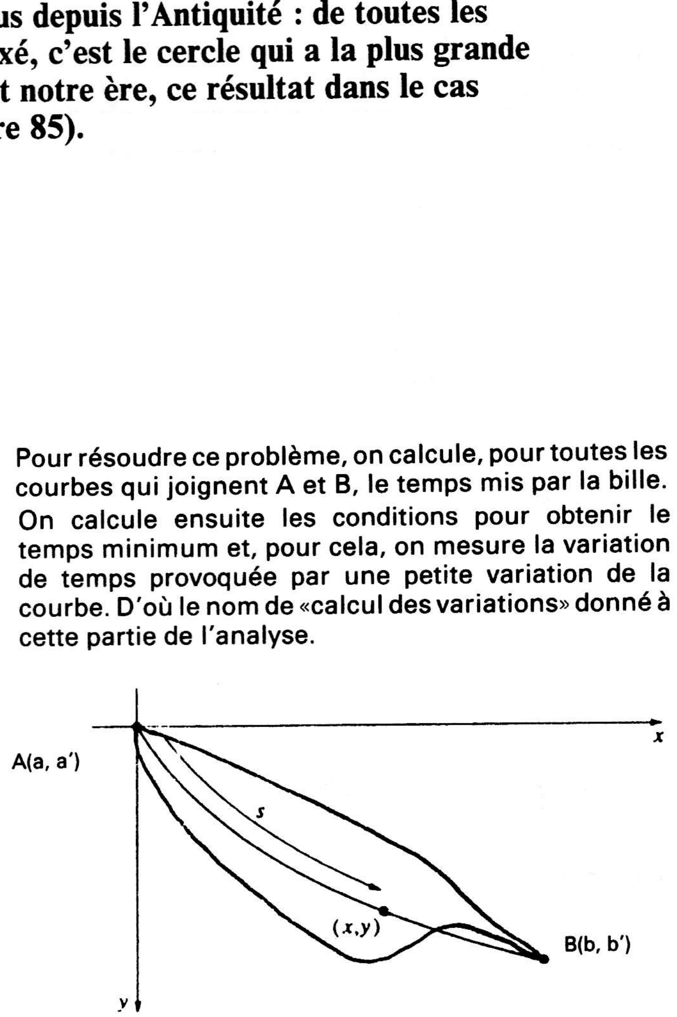
Euler, au XVIII^e^ siècle, formule le problème général d'extrema pour des fonctions données par des intégrales et déduit la condition analogue à $A'(x) = 0$. Ces équations appelées différentielles doivent être satisfaites par des solutions à des problèmes de «variations». L'artillerie analytique appliquée à ces problèmes est appelée «calcul des variations».

Pour rendre compréhensible l'important apport d'Euler, passons en revue des problèmes célèbres comme celui du brachystochrone, rendu célèbre par Bernouilli (Jean) en 1696 et qui donna naissance au calcul des variations :

quelle est la courbe qui permet à une bille de glisser le plus vite d'un point A (a, a') au point B (b, b') ?



Pour résoudre ce problème, on calcule, pour toutes les courbes qui joignent A et B, le temps mis par la bille. On calcule ensuite les conditions pour obtenir le temps minimum et, pour cela, on mesure la variation de temps provoquée par une petite variation de la courbe. D'où le nom de «calcul des variations» donné à cette partie de l'analyse.



Voici d'abord quelques problèmes voisins :

- pour trouver le plus court chemin joignant A à B, il suffit de trouver l'aire minimum sous la courbe, soit à trouver le minimum de l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$ avec les conditions $y(a) = a'$ et $y(b) = b'$

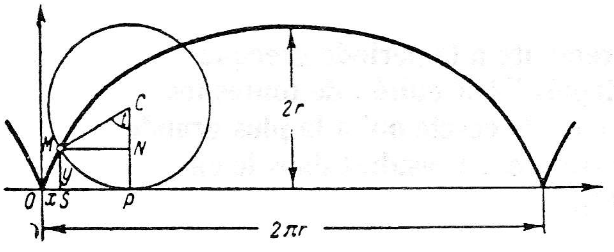
- pour trouver la courbe joignant A et B qui donne la surface, de révolution autour de l'axe des x, d'aire minimum il suffit de trouver le minimum de

$$\int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$ avec les mêmes conditions que ci-dessus.

- trouver enfin la courbe qui amène le plus vite en bas du toboggan revient à minimiser une intégrale.
Vitesse instantanée v, temps t et distance parcourue sont liés par la relation $v = ds/dt$. La vitesse est donnée en fonction de la hauteur par $v = \sqrt{2gy}$, g étant bien sûr, l'accélération de la pesanteur.

Comme ds est égal à $\sqrt{(1 + y'^2)}dx$, le temps mis par la bille est donnée par l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2\,gy}} dx$$



Construction d'une cycloïde

La solution est un arc de cycloïde
Voyons encore d'autres problèmes du même genre :
- résoudre le problème des isopérimètres revient à «maximiser» l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_t^{t'} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

sous la condition :

$$\int_t^{t'} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

reste constante.

- trouver les géodésiques (courbes de plus courte distance) sur une surface $S(x, y, z) = 0$ revient à «minimiser» l'intégrale

$$\int_t^{t'} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Dans les trois premiers exemples, le problème consiste à trouver les valeurs stationnaires y de

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx = 0.$$

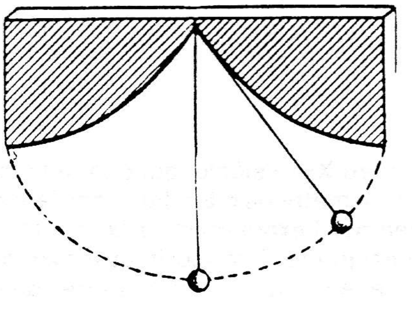
Il arrive que des fonctions y(x) satisfassent l'équation différentielle d'Euler :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(qui est analogue à la condition $d\,[g(x)]/dx = 0$, satisfaite par une solution x pour laquelle la fonction g a une valeur stationnaire).

Dans les autres exemples les valeurs stationnaires doivent satisfaire des changements appropriés de cette équation.

«Le calcul des variations a été l'une des branches majeures de l'analyse pendant plus de deux siècles. C'est un puissant outil qui peut être utilisé dans une grande variété de problèmes en mathématique pure. Il peut être aussi utilisé pour exprimer les principes de base de la physique mathématique dans les formes les plus simples et les plus élégantes.» (Simmons in Differential equations. MacGraw-Hill, 1972).


Pendule cycloïdal

L'analyse mathématique est le domaine du calcul de limite et de l'approximation. Elle est issue du calcul infinitésimal qui permet l'étude des phénomènes en évolution et leur traduction en lois physiques.

Né du travail de Newton et Leibniz au XVII^{eme} siècle, le calcul infinitésimal sera développé au XVIII^{eme}, par Euler et Lagrange, pour décrire les phénomènes physiques.
Au XIX^{eme}, ce sera le développement des équations aux dérivées partielles (propagation de la lumière, des ondes électromagnétiques, de la chaleur, ...).

Ces méthodes d'approximations, utilisées dans des espaces de dimension infinie (espaces de Hilbert) sont actuellement utilisées, par exemple, dans le contrôle des phénomènes instables. M.D.

■

Petite bibliographie :

- Petite encyclopédie des Maths - Didier ed. 1980 p. 761.
- Bulletin APM n° 353. Avril 86 - Page 248 à 252 (Tonton Lulu), ou «Comment réussir le triangle quelconque» Cedic - Belin 86.

▶▶ Rubrique itérative ▶▶

AU RYTHME DES ALGORITHMES

A bas l'impérialisme de l'Itératif ! Place au récursif !!!

Il s'agit bien d'une fronde contre le titre qualificatif de cette rubrique, contre le titre de ce numéro contre tous ces algorithmes itératifs qui risquent de nous enfermer dans une seule vision des choses :

l'itération est une démarche constructive qui part du connu (données initiales) pour aller vers l'inconnu (le résultat que l'on cherche). D'une certaine manière, on est assez proche des raisonnements inductifs (il serait intéressant de bien distinguer l'une et l'autre démarche et leurs inter-actions dans quelques situations typiques qu'il faudrait produire).

En revanche la récursion part de l'inconnu pour aller au connu en réduisant le problème, c'est l'analyse récurrente qui consiste :

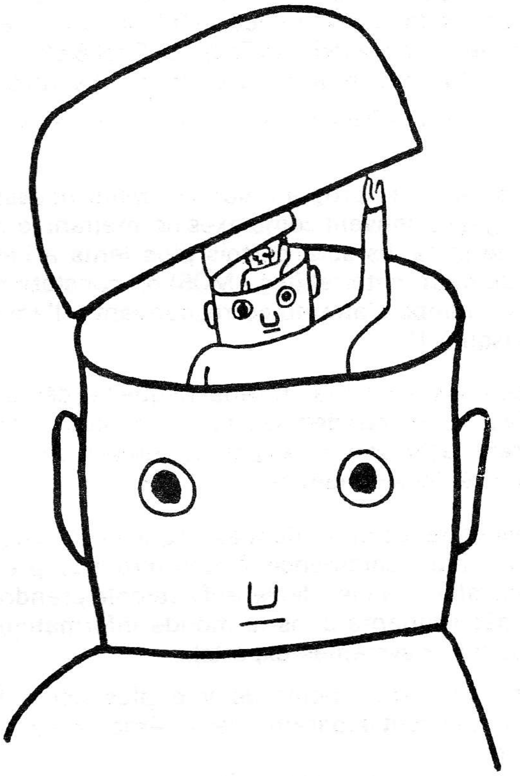
- à repérer l'information par son **type** et sa **taille**
- à la formaliser en montrant les aspects qualitatifs (type-propriété) et quantitatifs (taille),
- à faire apparaître un «découpage» de cette information (séquentialité) qui correspond à la réduction du problème en conservant le type et en réduisant la taille.

L'exemple classique de la factorielle permet de mettre en évidence le type : produit d'entiers consécutifs à partir de 1, et la taille n (pour n !). La séquentialité et la réduction du problème apparaissent avec l'écriture :

$$n\,! = (n-1)\,! \times n$$

Connaître la factorielle de n revient donc à connaître la factorielle de n-1. La difficulté avec cette analyse récurrente (comme d'ailleurs avec la mise en évidence de la formule d'itération) est de bien concevoir ce passage comme une démarche générique qui engendre un processus qui ne prendra fin que lorsqu'on arrivera à quelque chose de connu (on rappelle qu'une démarche récursive conduit de l'inconnu au connu).

Pour cet exemple le connu peut être 1 ! (ce peut être aussi 10 ! si vous connaissez ce résultat et aussi les précédents car vous ne pourrez calculer n !, que pour $n > 10$).



On écrira donc la procédure récursive suivante :

RECURSIF

```
Fact : (naturel n) ──► (naturel)
│ choix :
│ │ n = 1──►1 ............................ cas connu
│ │ n ≠ 1──►[Factoriel (n - 1)] * n   cas inconnu
│ Fin choix
│
Fin fact.
```

La démarche itérative conduit à l'algorithme suivant

ITERATIF

```
Factoriel (naturel n) → (naturel)
| F ← 1
| x ← 1
| | TANT QUE (x < n) FAIRE (x ← x + 1 ; F ← F * x)
| | FIN TANT QUE
|  → F
Fin factoriel
```

On peut améliorer ce programme pour avoir une seule variable F.

Ici, il est plus important de noter que la forme itérative permet de bien mettre en évidence l'**algorithme** de calcul :

La lecture d'une écriture itérative est donc «proche» du traitement que l'on effectue (en particulier on peut facilement utiliser une calculette - programmable ou non -).

En revanche la forme **récursive** est plus nettement **déclarative** et il est plus difficile de lui associer «spontanément» un traitement. Dans ses travaux didactiques sur la récursivité André ROUCHIER pose le problème en ces termes : comment passer de l'analyse de la situation (la factorielle pour notre exemple) qui repose sur un traitement de forme **conjonctive** (pour avoir Fact... 10 il faut avoir la suite ordonnée des antécédents Fact 9 **et** Fact 8 **et** ... et Fact 1) à l'écriture du programme de forme **disjonctive** :

$n = 1$ (on donne Fact 1) ou $n \neq 1$ (on calcule avec Fact n-1)?

D'autre part, les programmes récursifs nécessitent des langages souvent complexes permettant le traitement de piles, ils sont parfois plus lents à l'emploi (avec du petit matériel (logo M05) on constate nettement un temps d'attente correspondant à l'empilage de n jusqu'à 1).

Pour ces raisons, certains pensent que les démarches itératives plus rapides d'emploi et plus faciles à comprendre (en particulier pour les élèves) sont mieux adaptées à l'enseignement.

Il convient de rester prudent alors que la didactique de l'informatique commence à produire ses premiers travaux, alors que le «déclaratif» semble prendre une place déterminante dans le monde informatique (de multiplan aux systèmes-experts).

D'autre part, d'un point de vue plus cognitif, les heuristiques font apparaître des intéractions constantes entre :
connu → inconnu : démarche ascendante,
inconnu → connu : démarche descendante

en particulier dans les démonstrations. Ces distinctions sont d'ailleurs souvent étrangères à la recherche des problèmes et n'apparaissent que dans la formulation (ou la formalisation) des solutions. On montre en particulier qu'il y a équivalence entre itération et récursivité avec appel récursif terminal (nous reviendrons sur ce problème on peut déjà se reporter à [1] ou [2], la distinction itératif-algorithmique / récursif-déclaratif demeure toutefois).

Enfin, signalons que la démarche récursive est moins étrangère aux enfants qu'on veut bien le croire (voir [3]) et qu'elle prend tout son sens quand on a à traiter des problèmes un peu complexes qui conduisent à un appel récursif non terminal (on met des actions en réserve dans une pile qui seront traitées par la suite au dépilage) ou qui nécessitent à plusieurs appels récursifs : on peut citer les constructions fractales dont voici un exemple (facilement programmable en logo)

```
POLYFRACTAL (nombre de côté N, côté L)    image fractale

   choix : L < 5 → rien
   |        L ⩾ 5 REPETE N [POLYFRACTAL (N ; L/2)
   FIN CHOIX                        AVANCE L
                                 TOURNEDROITE 360/N]

FIN POLYFRACTAL
```

Le nombre d'appels récursifs varie avec la longueur L du côté de départ. Le fait de prendre 5 dans le test est lié au matériel (définition de l'écran) à l'image que l'on veut obtenir.

Pour terminer on peut reprendre l'approximation de $\sqrt[n]{A}$ proposée dans l'article «De Héron à Newton», en constatant qu'une analyse récurrente du calcul ne convient pas, en effet pour réduire le problème (type racine, taille n) il est nécessaire d'avoir $n = a \times b$ pour écrire $\sqrt[n]{A} = \sqrt[a]{A} \times \sqrt[b]{A}$

(avec $1 < a < n$ et $1 < b < n$).

Il faut donc connaître $\sqrt[n]{A}$ pour tout n premier !

Cela ne disqualifie pas pour autant la démarche récursive et permet d'insister sur le caractère itératif de l'approximation, le titre de ce numéro est donc bien justifié, un pléonasme en quelque sorte.

C'est tout pour aujourd'hui.

M.C.

Référence [1] : LUCAS - PEYRIN - SCHOLL Algorithmique et traitement des données - MASSON ed.
Référence [2] : Démarches algorithmiques en classe de mathématiques IREM Orléans.
Référence [3] : Piaget. Construction des raisonnements récurrentiels PUF. éd.

■

PLOT MENINGES

POUR faire chercher les élèves et leurs profs, voici quelques petits problèmes proposés dans nos régionales. Notez le TOURNOI du LIMOUSIN qui propose une formule innovante où il n'y a pas que les profs qui posent des problèmes, les élèves aussi !

UN EXERCICE DE CALCUL

Serge Parpay - Niort

Les nombres a, a', b, b' peuvent être chacun soit $+1$ soit -1.
Trouver le maximum de preuves montrant que $|ab - ab' + a'b + a'b'| = 2$.

En voici quelques-unes.

1 - Seize cas possibles. Pourquoi ? Comment les trouver ? Comment conduire les calculs ? Faut-il faire un tableau ? Et toujours $|A| = 2$.

2 - On a $A = a(b - b') + a'(b + b')$, alors :
ou b et b' sont égaux, alors $b - b' = 0$ et $b + b' = 2b$ donc $A = 2a'b$ et $|A| = 2$,
ou b et b' sont opposés, alors $b + b' = 0$ et $b - b' = 2b$, $A = 2ab$ et $|A| = 2$.

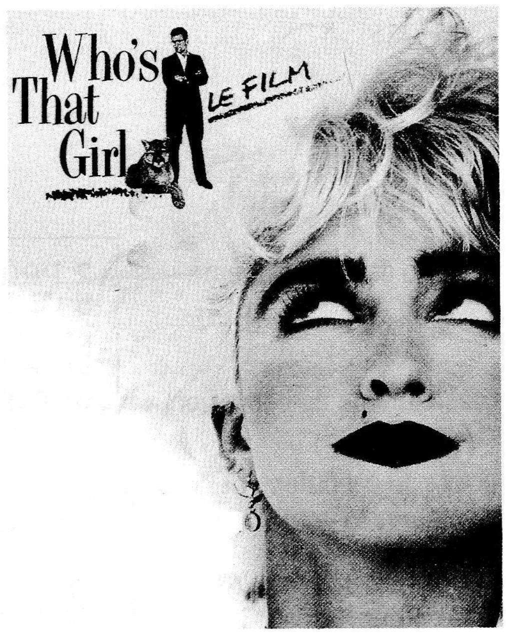
3 - Un et un seul des deux nombres $b - b'$ et $b + b'$ est nul.
En effet $(b - b')(b + b') = b^2 - b'^2 = 1 - 1 = 0$ et $(b - b') + (b + b') = 2b$ ($\neq 0$).
Alors ou $b - b' = 0$ et... ou $b + b' = 0$ et..., on retrouve la discussion ci-dessus.

4 - On a $A = (a + a')(b + b') - 2ab'$. Alors,
ou $a = a'$ et $b = b'$ alors $A = 2a.2b - 2ab = 2ab$ et $|A| = 2$,
ou un des couples (a,a') et (b, b') est formé de deux valeurs opposées et l'une des deux sommes $a + a'$ et $b + b'$ est nulle, alors $A = -2ab'$ et $|A| = 2$.

5 - On a $A = a^2(b - b')^2 + a'^2(b + b')^2 + 2aa'(b - b')(b + b')$
Mais $a^2 = a'^2 = 1$ et $(b - b')(b + b') = b^2 - b'^2 = 0$
donc $A^2 = (b - b')^2 + (b + b')^2 = 2(b^2 + b'^2) = 2(1 + 1)$
soit $|A| = 2$.

Remarque : on peut même calculer A^2 directement à partir de la forme initiale, on retrouve facilement $A^2 = 4$.

Référence : Le cantique des cantiques. Ortoli et Pharabod. Ed. La Découverte. 1982. (Inégalités de Bell et expérience de M. Alain Aspect).



Cherche blonde, moins de quarante ans,...

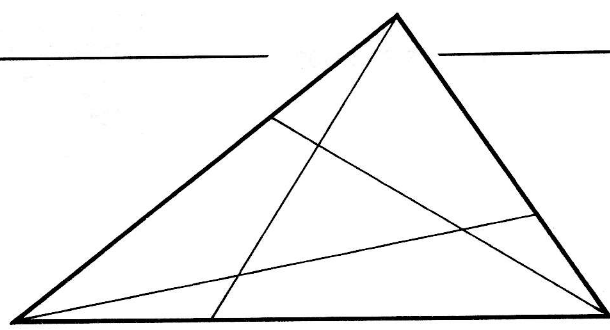
Bernard d'Espagnat parle des inégalités de Bell dans son livre «A la recherche du réel. Le regard d'un physicien» paru chez Gauthier-Villars en 82. En guise d'introduction à la présentation de ces inégalités, il cite (page 27 du livre) le théorème :

«Dans une population quelconque, le nombre de femmes de moins de quarante ans est inférieur ou égal au nombre de femmes qui fument augmenté des individus âgés de moins de quarante ans qui ne fument pas !»

C'est très facile à prouver. Sans faire de concurrence à A-P[L]ot-strophe, inutile de dire que le livre de Bernard d'Espagnat est à lire (mais cela va mieux en le disant, ce qui est fait (et n'est plus à faire). La rédaction).

Dans la tempête de Bretagne. (Valabrègue - Loctudy).

Un triangle. Trois droites qui joignent les sommets aux points qui divisent les côtés dans le rapport 1/3. Que dire de l'aire du triangle ainsi formé ?



LES VRAIES RACINES DU TRINOME

Bernard Revranche - Mandegault

Vous êtes élève de première ou terminale, vous voulez surprendre votre professeur de mathématique. Demandez-lui de résoudre, dans R, l'équation $25x^2 - 70x + 38 = 0$. Il lui faudra un certain temps, alors que votre calculatrice, munie du programme qui suit, affichera en quelques secondes de calcul, les deux solutions : $(7+\sqrt{11})/5$ et $(7-\sqrt{11})/5$.

Ce programme demande les trois coefficients entiers A, B, C du trinôme $Ax^2 + Bx + C$, et en donne les zéros exacts, réels ou complexes.
Toutes les simplifications sont effectuées ; ainsi :
>$\sqrt{50}$ apparait sous la forme $5\sqrt{2}$.
>$(8 - i\sqrt{12})/2$ apparait sous la forme $4 - i\sqrt{3}$.

La version qui suit, fonctionne sur une Sharp PC 1245. Pour qu'elle loge (de justesse !) dans la machine, il a fallu utiliser quelques astuces propres à cette calculatrice ; elles sont signalées dans l'explication du programme.

```
2: PRINT = LPRINT
5: CLEAR : DIM B(7) :
B(0)=4:B(1)=2:B(2)=4:B(3)=2
B(4)=4:B(5)=6:B(6)=2:B(7)=6
10: INPUT "A=";A, "B=";B,
   "C=";C: IF A=Ø THEN 10
20: Z = Ø: T$ = "√"
30: B=B* SGN A:C = C*
   SGN A:A = ABS A
40: K = B : L = 2A
50: GOSUB " P.G.C.D."
60: E = L
70: D = BB - 4AC
80: IF D=0 THEN
   LET X = B/E: Y = 2A/E:
GOSUB "PRINT 1":GOTO 10
90: IF D<Ø THEN LET D=-D:
   Z$ = "I"
100: Q=√D:
    IF (INT Q=Q)*(Z$="I")
   THEN LET T =Ø: M=Ø:
   G=1: F=Q: GOTO 130
110: IF INT Q=Q THEN LET
   X=-B +Q: Y=2A: W=-B-Q:
   U=2A:GOSUB "PRINT 2":
   GOTO 10
130: GOSUB "SLPF. √D"
140: K=E: L=F: IF G<>1
    THEN LET M$=STR$ G
150: GOSUB "P.G.C.D."
160: X=-B/L: Y=2A/L: F=F/L
170: GOSUB "PRINT 3"
180: GOTO 10
190: END
```

Commande de l'imprimante (2)

Chargement du vecteur B(i) i = 0 à 7. Ce vecteur sert à générer les entiers supérieurs à 7, non divisibles par 2, 3, 5. (5)

Les coefficients de l'équation, avec A non nul. (10)

Au cours du déroulement du programme, la variable chaîne Z$ contient "i" ou est vide, la variable T$ contient "√" ou est vide. Pour "vider" Z$, on peut sur le PC, poser Z=Ø. (20)

On peut toujours choisir A > 0 (30)

La variable E contient le pgcd de 2A et de |B|. (40-60)

Le virus bien connu de la trinômite (ici * peut être omis -soi qui mal y pense) (rappel des Plot précédents : connaissez-vous :BB - 3AC ?) (70)

Si D=Ø, on écrit la racine double avec le sous-programme "Print 1". (80)

Si D<Ø, alors on travaille dans C; on met i dans Z$. (90)

Si -D est un carré, on vide T$ et M$ pour écrire les racines sous la forme (a ± ib)/c. (100)

Si D est un carré, on écrit les 2 racines rationnelles avec le sous programme "Print 2". (110)

On sort les carrés de √D. On a √D = F√G. (130)

Simplification éventuelle de X, F, Y. (160)

Ecriture des solutions. (170)

LES SOUS - PROGRAMMES

```
500: "P.G.C.D."
510: K = ABS K
520: R = K - L * INT (K/L)
    :IF R = Ø THEN RETURN
530: K = L: L = R: GOTO 520
540: *
```

```
600: "SLPF. √D"
610: F = 1: G = D
620: N = 2:GOSUB "DIVICAR"
    : IF Y = 1 THEN RETURN
630: N = 3:GOSUB "DIVICAR"
    : IF Y = 1 THEN RETURN
640: N = 5:GOSUB "DIVICAR"
    : IF Y = 1 THEN RETURN
650: N = 7:GOSUB "DIVICAR"
    :IF Y = 1 THEN RETURN
660: I = Ø
670: IF I > 7 THEN LET I = Ø
680: N = N + B(I)
690: GOSUB "DIVICAR"
    :IF Y = 1 THEN RETURN
695: I = I + 1: GOTO 670
699: *
700: "DIVICAR"
710: IF NN >G THEN LET Y=1
    : RETURN
720: P = G/(NN): IF INT P = P
    THEN LET F = FN: G = P
    : GOTO 710
730: Y = Ø
740: RETURN
750: *
```

```
800: "PRINT 1"
810: IF Y = 1 THEN PRINT
    "X1 = X2 = "; STR$ X
    : RETURN
820: PRINT "X1 = X2 ="
    STR$ Y: RETURN
```

```
830: "PRINT 2"
840: K = X: L = Y
    : GOSUB "P.G.C.D."
    : X=X/L: Y=Y/L: K=W: L=U
    : GOSUB "P.G.C.D."
    : W=W/L: U=U/L
850: IF Y = 1 THEN PRINT
    "X1="; STR$ X: GOTO 870
860: PRINT "X1="; STR$ X;
    "/"; STR$ Y
880: PRINT "X2="; STR$ W;
    "/"; STR$ U: RETURN
```

1. Sous-programme PGCD
Il calcule le pgcd de K et L et l'inscrit dans L.

2. Sous-programme de simplification de √D.
Il donne √D sous la forme F√G où G n'est pas divisible par un carré.

- de 610 à 660 on teste si N^2 divise D pour 2, 3, 5, 7; et, le cas échéant, pour N supérieur à 7 et non divisible par 2, 3, 5. On décrit, pour cela, les entiers de la forme 30.n + k, où k=1 ; 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

- la variable Y, "booléenne", provoque la fin du déroulement du sous-programme dès que la valeur prend la valeur 1.

3. Sous-programme d'écriture des solutions quand D=Ø.

4. Sous-programme d'écriture des solutions quand D est un carré.

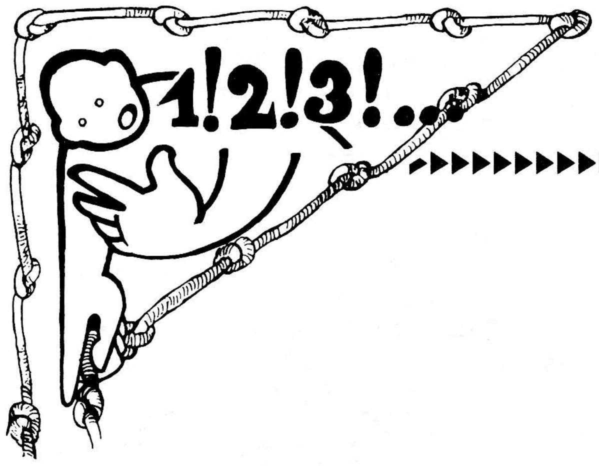
- en 840, simplification des fractions.

- en 850 et 870, si le dénominateur est égal à 1, on n'écrit que le numérateur.

5. Sous-programme d'écriture des solutions quand D<Ø ou quand D n'est pas un carré.

```
900: "PRINT 3"
    : J = (F=1)+2*(Y=1)+4*(X=Ø)
    : GOTO 910 + J
910: PRINT " X1 = ("; STR$ X;
    "+"; Z$; STR$ F; T$; M$;
    ")/"; STR$ Y:
    PRINT "X2 = ("; STR$ X;
    "-"; Z$; STR$ F; T$; M$;
    ")/"; STR$ Y: RETURN
911: PRINT " X1 = ("; STR$ X;
    "+"; Z$;T$; M$;")/"; STR$ Y
    : PRINT "X2 = ("; STR$ X;
    "-"; Z$;T$; M$;")/"; STR$ Y:
    RETURN
912: PRINT "X 1="; STR$ X;
    "+"; Z$; STR$ F T$; M$
    : PRINT "X2 ="; STR$ X;
    "-"; Z$; STR$ F; T$; M$:
    RETURN
913: PRINT "X1 ="; STR$ X;
    "+"; Z$; T$; M$
    : PRINT "X2 ="; STR$ X;
    "-"; Z$; T$; M$ : RETURN
914: PRINT "X1 ="; Z$;
    STR$ F; T$; M$; "/"; STR$ Y
    : PRINT "X2 =-"; Z$;
    STR$ F; T$; M$; "/"; STR$ Y
    : RETURN
915: PRINT "X1 ="; Z$; T$;
    M$; "/";STR$ Y
    : PRINT "X2 =-"; Z$; T$;
    M$; "/"; STR$ Y
    : RETURN
916: PRINT "X1="; Z$;
    STR$ F; T$; M$
    : PRINT "X2=-"; Z$;
    STR$ F; T$; M$
    : RETURN
917: PRINT "X1="; Z$; T$; M$
    : PRINT "X2=-";Z$; T$; M$
    : RETURN
```

.En 900, aiguillage
.La variable J prend les valeurs entières de 0 à 7 suivant que :
- le dénominateur Y = 1 ou non
- le facteur F = 1 ou non,
- le terme x = Ø ou non



LE TOURNOI DU LIMOUSIN

LE TOURNOI MATHEMATIQUE DU LIMOUSIN a été organisé en 1987, sous la présidence d'honneur de Monsieur le Recteur de l'Académie de Limoges pour les élèves de toutes Premières et de toutes Terminales de l'Académie par :
- la Régionale Apmep et l'Irem de Limoges
- le Département de Mathématiques de l'U.F.R. des Sciences de Limoges.
- l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de l'Académie.

Les objectifs déclarés de ce 1er tournoi étaient :
- développer chez les élèves le goût de la recherche
- éviter l'élitisme
- faire participer un maximum de jeunes
- juger, plus que leur niveau, l'aptitude des jeunes à s'adapter à une situation nouvelle.

Ces objectifs sont ceux que l'A.P.M. veut mettre en avant et notre Régionale est donc une composante naturelle de ce tournoi.

A l'issue de cette première expérience, nous nous félicitons d'avoir été partie prenante dès le départ. Non seulement nous pensons que les objectifs ont été atteints mais qu'en intéressant pendant 4 heures, un mercredi après midi, sur un même sujet, plus de 800 élèves de premières et de terminales de toutes origines, de toutes sections, de toute formation scientifique ou littéraire, technologique ou économique, nous avons montré qu'il n'y a pas qu'une seule façon de faire des maths. Que de chercher, d'imaginer, de trouver n'est pas le privilège des «forts en maths», que plusieurs voies possibles mènent à la découverte et aux mathématiques.

La recherche des lots, confiée à une équipe particulièrement dynamique a permis, par une rencontre originale avec les entreprises, de faire connaître notre enseignement à un large public et de promouvoir notre discipline auprès d'organismes publics et privés.

Pour attribuer les différentes récompenses nous avons voulu éviter toute idée de classement et encourager un maximum de jeunes qui avaient participé et trouvé (même partiellement).

Mais là où réside, nous semble-t-il, la plus grande originalité des récompenses c'est dans leur nature même : prix tournés vers la vie active, ouverts sur le monde du travail (visite d'une centrale hydroélectrique de l'EDF ; aller-retour à Paris dans la cabine du conducteur du Capitole ; une journée à la Météorologie, à Radio France, à FR3, une nuit dans les locaux des journaux régionaux, une visite de librairie, etc...).

Nous joignons les textes des exercices proposés et des éléments de correction (si vous trouvez pour le carré mieux que 6 cercles...).

Une grande fête des mathématiques avec remise des prix, vin d'honneur, a cloturé dans la joie ce 1er tournoi.

La presse, la radio et la télévision locales ont largement rendu compte de cette manifestation.

Nous voici prêts à recommencer et à recevoir de tous, conseils, critiques et... encouragements.

Les organisateurs du Tournoi

Tournoi mathématique du Limousin 1987

Quelques recommandations

Voici le sujet proposé pour le premier Tournoi Mathématique du Limousin. Vous travaillez, peut-être à plusieurs dans une même salle. Pensez à respecter le travail de vos camarades. Vous pouvez parler avec votre équipier mais... en silence !
Pour chacun des 3 textes composant le sujet, vous ne devez pas hésiter à proposer :

- plusieurs démonstrations, éventuellement...
- des solutions partielles
- des prolongements
- de nouvelles questions, même si vous n'y répondez pas...

Par exemple : pour le texte n° 2, vous pouvez envisagez d'autres configurations de points...
Bref, place à votre imagination créatrice, aux idées même insolites et au plaisir de chercher.
Chaque équipe ne remet qu'une copie. N'oubliez pas de mettre les noms des équipiers en tête de la copie ainsi que : classe, section et établissement.

BONNE CHANCE
à tous les chevaliers du Tournoi 1987 !

■

Sujet du Tournoi

Texte n° 1

Un tournoi de tennis oppose 1987 joueurs numérotés de 1 à 1987. A chaque tour, on oppose les joueurs restants deux par deux dans l'ordre de leurs numéros ; si le nombre de joueurs qualifiés est impair, le dernier est automatiquement qualifié pour le tour suivant (ainsi le premier tour est composé des matches 1-2, 3-4,..., 1985-1986 et le joueur 1987 est qualifié pour le deuxième tour).

Combien de matches auront été joués au cours de ce tournoi ?

Texte n° 2

Dans le plan, pouvez-vous contruire, avec le compas seulement, 4 points situés :

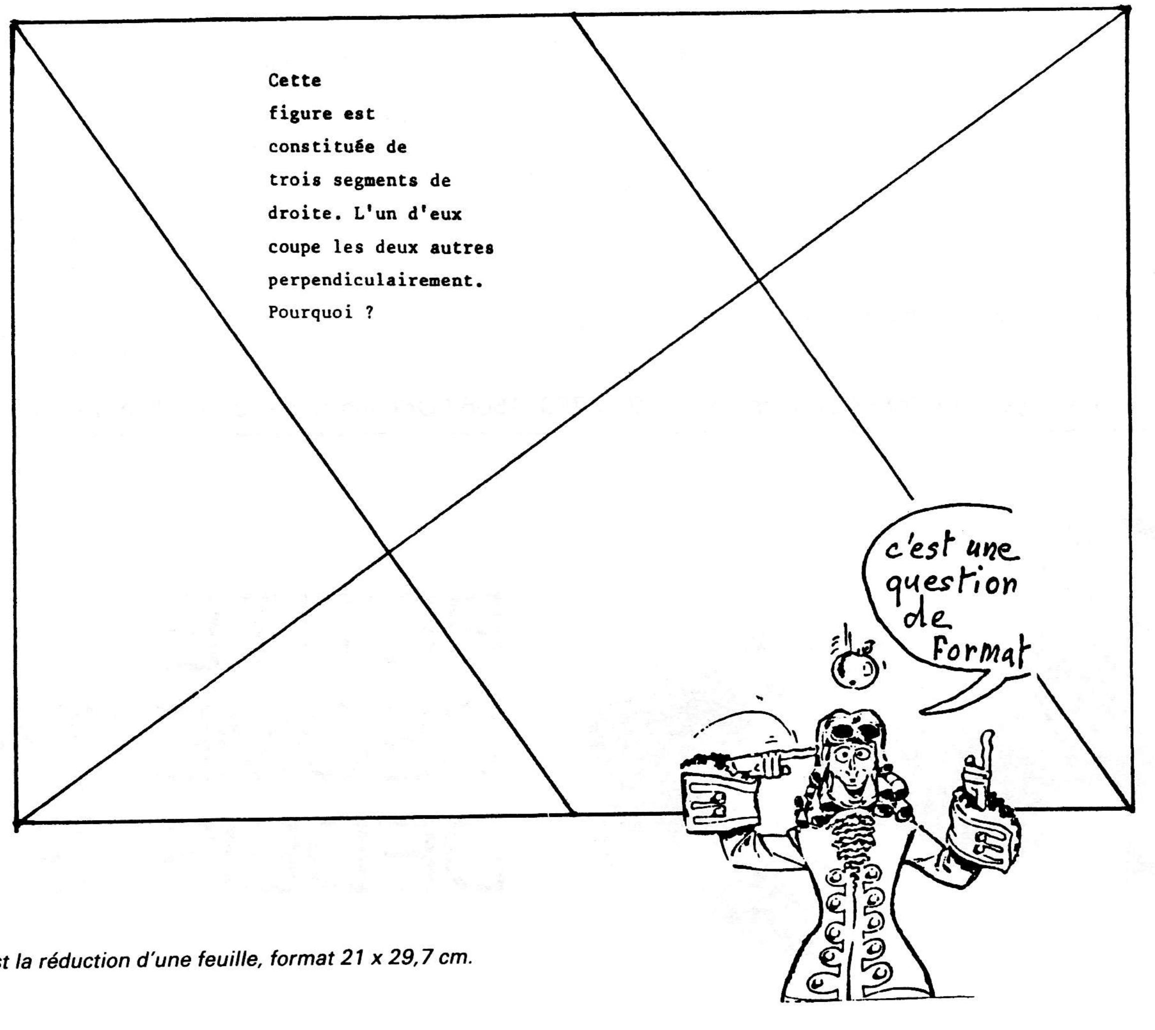
a) aux sommets d'un losange
b) aux sommets d'un rectangle
c) aux sommets d'un carré.

Pensez à justifier vos constructions !

Texte n° 3

Voir dessin ci-dessous.

Le plus grand des 3 segments est une diagonale de la feuille, les 2 autres joignent un coin de la feuille au milieu du bord !



ndlr : ceci est la réduction d'une feuille, format 21 x 29,7 cm.