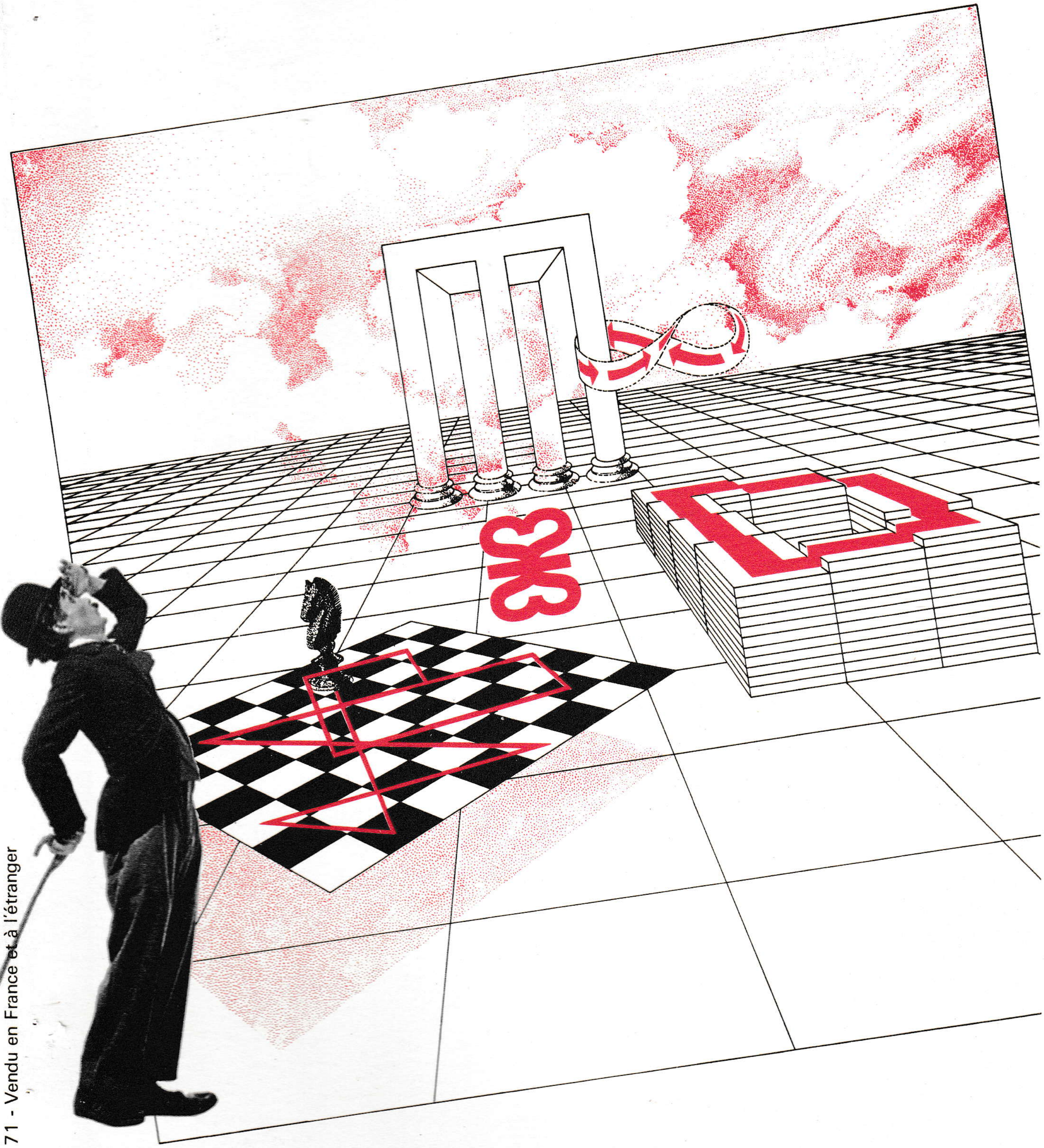
# PLOT

N°40

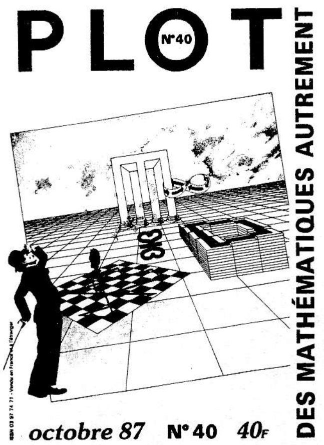
DES MATHÉMATIQUES AUTREMENT



ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger

*octobre 87*

40F




**Directrice de publication**
Marie-Laure Darche-Giorgi

**Comité de rédaction**
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Michel Clinard, Jacqueline Collet, Roger Crépin, René Gauthier, Georges Le Nezet, Ginette Mison, Serge Parpay, Raymond Torrent,

**Rédaction**
Michel Darche, Michel Mirault

**Secrétariat**
Madeleine Schlienger

**Diffusion - Ventes**
Patrick Marthe, Pierre Daudin

**Publicité**
Pascal Monsellier

**Abonnements**
PLOT APMEP-Université, BP 6759
45067 Orléans-Cedex 2

**Prix d'abonnement**
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F
Abonnement étranger : 120 F

**Photocomposition et maquette**
Graphi'Style - Orléans

**Photogravure et impression**
Fabrègue-Imprimeur, Limoges

**Commission paritaire**
63181 - ISSN 0397-7471

**Editeur**
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans, Tours, Nantes, Rennes et Rouen avec le concours du Ministère de la Coopération

**Diffusion**
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

•

**PLOT**
**mathématiques**
**et**
**enseignement**

# sommaire

**Des maths autrement**
G. Mison, Y. Guichard - Lyon ............ p. 3 à 6

**Anamorphose et perspective**
Noël Blotti - Paris ............ p 7 à 10

**Nœuds et entrelacs**
Claude Pagano - La Seyne s/Mer ............ p 11 à 16

**Empilements de sphères**
François Sigrist - Neuchatel ............ p 17 à 21

**Dessins et répétitions**
Michel Fleury - Montréal ............ p 23 à 28

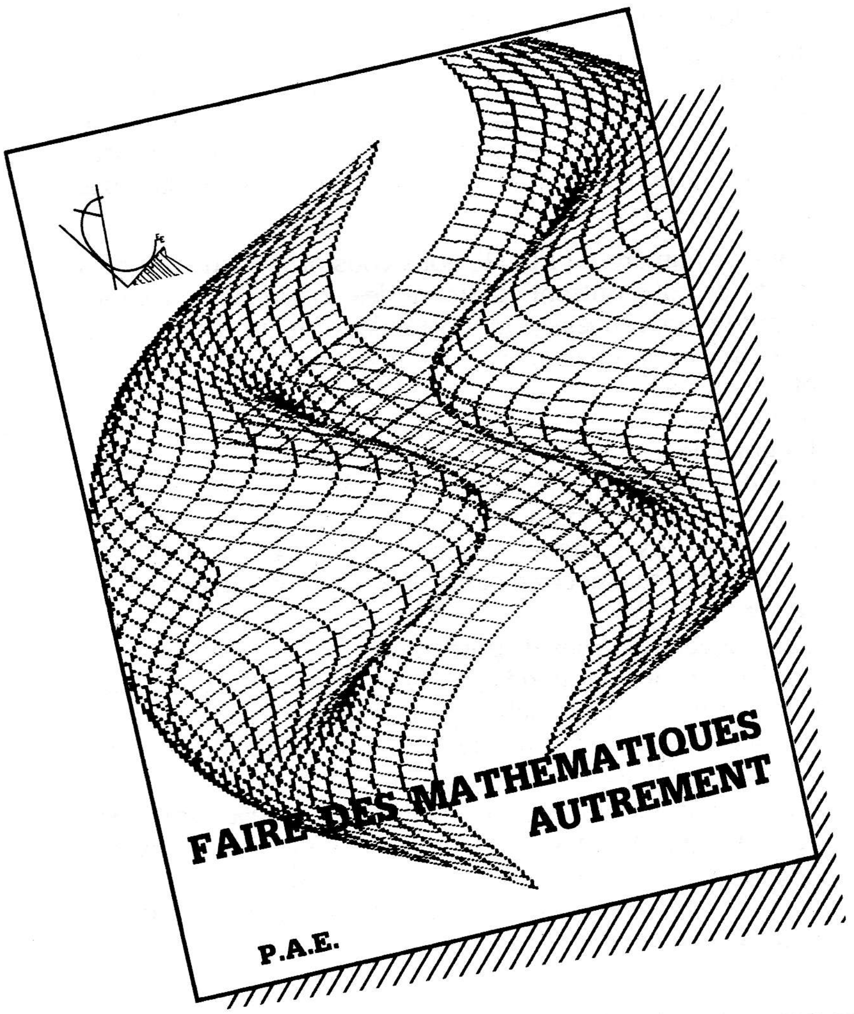
**Des maths dans le train ?**
Georges Le Nezet - Rennes ............ p 29 à 30

**Courbures et géodésiques**
René Gauthier - Lyon ............ p 31 à 34

**Formes et structures**
Jacky Patras - Venissieux ............ p 35 à 41

**Aplostrophe et Courriers de lecteurs** ............ p 42 à 44

**Maths et physique**
Gaud et Cacougnole - Poitiers ............ p 45 à 48



# éditorial

## Les maths (et mathématiciens) A quoi ça sert ?

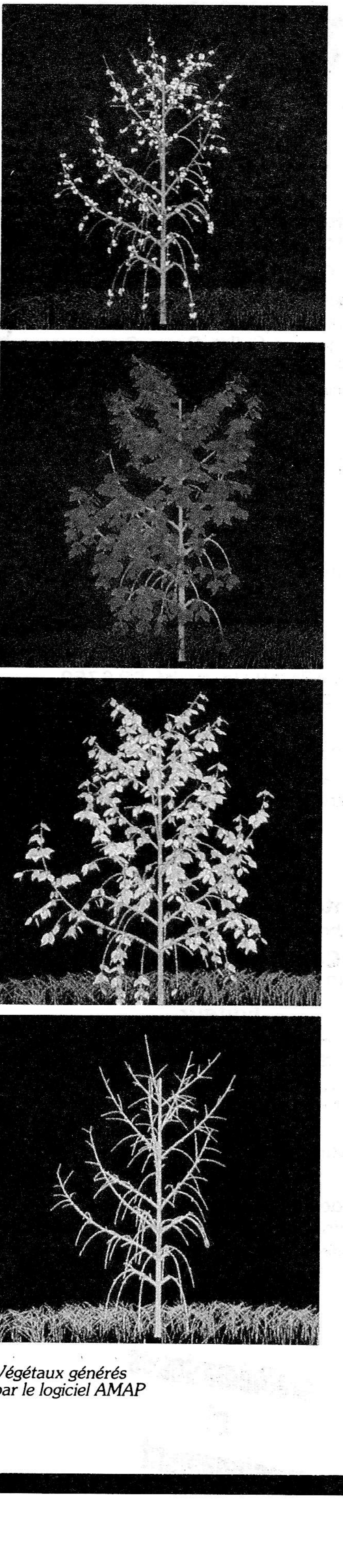
Alors que les mathématiciens (Kahanne, Méla, Berger...) poussent des cris d'alarme, que les physiciens s'inquiètent à leur tour, que se passe-t-il à la base ? Que font les enseignants pour répondre à ces appels ? Qu'est-ce qui bouge dans l'Education Nationale ? Attend-on à nouveau des directives ministérielles ? Qu'est-ce qui peut donner le goût aux élèves de faire des maths, de la physique, pour leur plaisir, de devenir des scientifiques en herbe ? Comment initier le tout-public aux sciences et aux techniques alors qu'elles évoluent à Très Grande Vitesse.

Ne parlons pas uniquement des forts en thèmes... mathématiques, qui se repèrent par les résultats scolaires et autres concours et olympiades, mais surtout de ceux pour qui l'approche des sciences, dites " dures ", au lieu d'être un jogging de l'esprit est devenu un parcours du combattant.

De multiples approches sont possibles, qui permettent de sortir du cercle vicieux, du cycle infernal " programmes ⇒ enseignement ⇒ contrôle ⇒ sélection " où tout ce qui est dit à l'élève est pesé, jaugé et doit être évalué.

Déjà, les programmes montrent de nouvelles possibilités - les manuels commencent à suivre, plus au collège qu'au lycée (on le verra de plus près dans un prochain numéro du PLOT) - les nouvelles formes de rallyes par classe essaient de rompre avec l'esprit élitiste des concours et olympiades. On peut donc déjà répondre NON ! l'école ne prépare pas qu'à Polytechnique !!

Dans ce numéro du PLOT, nous vous proposons une série d'articles qui montrent comment des enseignants, à la base, allient un apprentissage en profondeur (et sur un long terme) avec une approche plus globale, avec plus de court-circuit, étant ainsi à la fois formateurs et médiateurs scientifiques et techniques.
La grille de lecture de ce numéro ressemble à une arborescence, à un arbre dans lequel les racines sont les savoirs scientifiques et techniques déjà établis ou en train de se construire, les branches et leurs feuillages étant les différentes possibilités d'accès à ces savoirs et de diffusion de ces savoirs.
Ces nouvelles formes d'approche des Sciences ne s'opposent d'aucune façon aux autres mais au contraire les complètent, les enrichissent et, pourquoi pas, relativisent les différents savoirs à acquérir à 12 ans, à 15 ans, à 18 ans et ceci pour la vie!!!
Quelles mathématiques, quelle physique, quelles connaissances scientifiques un adolescent s'approprie-t-il à l'école ? Qu'en reste-t-il après dans sa vie d'adulte ? Et nous, enseignants, qu'avons-nous appris en math, en physique, depuis la fin de nos chères études ??



*Végétaux générés par le logiciel AMAP*

# FAIRE DES MATHS AUTREMENT

*Ginette MISON - Yves GUICHARD - Lyon*

**POURQUOI UN P.A.E.-EXPOS ?**
**En liaison avec l'exposition "Horizons Mathématiques" un P.A.E. à été proposé dans notre lycée Juliette Récamier de Lyon en Mars 1987.**

**Son objectif était d'intéresser les élèves aux activités scientifiques par des recherches personnelles, des travaux et des réflexions de groupes, des manipulations, par la résolution de problèmes ouverts. Il s'agissait d'élargir le champ des réflexions mathématiques à des domaines plus variés ou plus inattendus.**

**Cette initiative fut l'occasion privilégiée d'un large travail inter-disciplinaire mettant en complémentarité les mathématiques, les lettres, les sciences naturelles, la géographie, l'informatique, les langues vivantes, la musique, et surtout, les arts plastiques.**

## CE QUI S'EST PASSÉ

**Des conférences** s'adressant aux élèves et ouvertes au public :

- *Cartographie et utilisation des mathématiques :* par un spécialiste de l'IGN (Institut Géographique National). Elle s'est déroulée avant le début du PAE, et plusieurs groupes ont travaillé sur ce thème (les différentes projections, mesure du méridien,...)
- *Du nombre d'or à l'ordinateur :* rapports privilégiés mathématiques / création artistique dans le champ de l'image
- *Religion, démocratie et mathématiques :* Etude du lien entre la naissance de la démocratie et la volonté de démontrer en mathématiques dans la Grèce Antique.
- *Les graphes ;* Des sept ponts de Koenigsberg à l'ordonnancement des travaux du métro. (Des groupes d'élèves avaient déjà étudié certaines applications des graphes dans le cadre du P.A.E.).

**Le mur à problèmes** (dans le hall d'entrée)
Nous souhaitions que tous les élèves du lycée soient concernés par le P.A.E. Tous les collègues de mathématiques ont distribué à leurs élèves une feuille sur laquelle figuraient dix "Problèmes ouverts" (plus ou moins ouverts...). De plus chaque énoncé était reporté en haut d'une grande feuille. Les élèves étaient invités à venir y écrire leurs remarques, leurs propositions, leurs ébauches de solutions ; ils pouvaient de plus proposer de nouveaux énoncés.

Nous n'avons pas obtenu autant **d'échanges écrits** que nous le souhaitions, les discussions étaient nombreuses devant "le mur" mais n'ont pas toujours été retranscrites sur les affiches. Nous souhaitons renouveller cette expérience mais en incitant davantage les élèves à laisser des traces écrites.

**Les expositions**

Plusieurs expositions ont été mises en place :

- **la cartographie et la photographie aérienne** (documentation prêtée par l'IGN)
- **ouvrages mathématiques anciens ou récents** (livres édités grâce aux crédits, prêtés par les élèves ou les collègues...)
- **"la salle 305".** A partir d'idées d'élèves et de professeurs, confection de panneaux sur certaines propriétés curieuses des nombres, approche visuelle des fractals, sans oublier les mille cinq cents premières décimales de $\pi$ (le Palais de la Découverte est battu...). Les panneaux furent exposés en "salle 305", salle où nous travaillons d'habitude ; une vingtaine d'affichettes humoristiques disposées dans tout le lycée interpellaient les élèves et les conviaient dans cette salle.

● **Les Mathématiques en URSS : les élèves du cours de russe ont décoré un couloir du lycée sur ce thème**
● **l'exposition proprement dite :**

Elle fut composée d'environ cent panneaux regroupés par thèmes, et confectionnés par les élèves. Pour imiter notre grande sœur "Horizons mathématiques", nous avons incité les élèves à imaginer des manipulations qui complètaient leurs panneaux... Elle a été ouverte une dizaine de jours au grand public. Un parcours codé, chronologique, inspiré de l'art contemporain a été mis en place par les élèves du cours d'arts plastiques. Une présentation de films vidéo et de diapositives de travaux d'élèves concernant l'étude de la perspective et la liaison arts-mathématiques animait l'exposition.

*Les grands thèmes :*

*Les nombres :* histoire, nombres figurés, nombres premiers...

*Le nombre d'or :* en géométrie, en algèbre, en architecture, dans la nature...

$\pi$ : son histoire, ses approximations.

*Les fractals :* approches géométriques, numériques, les attracteurs...

*Géométrie :* les transformations, notamment l'anamorphose circulaire, les pavages, Pythagore, les polygones réguliers ou non, les polyèdres, les volumes,...

*Astronomie et cartographie :* une mention spéciale pour le ciel à Lyon le 24 mars à 22 h...

*Mathématiques et Musique*

Nous n'avons pas prévu de visites guidées de cette exposition. Il aurait été souhaitable que les élèves expliquent eux-mêmes à leurs camarades ou aux visiteurs leurs réalisations.

## COMMENT NOUS AVONS TRAVAILLE ?

Trois classes de seconde - qui avaient mathématiques le mercredi de 8 à 10 h - ont été regroupées et réparties en plusieurs groupes de recherche de 4 ou 5 élèves. De même pour deux classes de 1ère S (le samedi de 8 à 10).

Les trois professeurs de mathématiques avaient préparé pour chacun des groupes un dossier sur un sujet donné et ont proposé tous ces sujets à l'ensemble des classes. Les élèves se sont répartis suivant leurs goûts. Nous avons travaillé 3 fois deux heures pour chaque niveau. De nombreuses affiches et manipulations ont été terminées en dehors du temps scolaire avec l'aide précieuse de la documentaliste et du professeur de dessin.

De plus, des travaux de recherche individuelle avec production d'affiches ont été exécutés en dehors des cours par des élèves volontaires avec l'aide des professeurs.

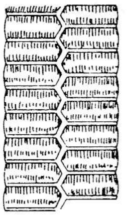
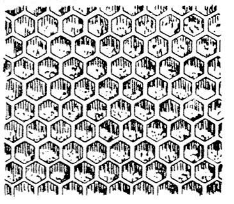
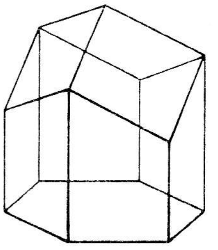
## QUELQUES EXEMPLES DE TRAVAUX

## LE TRAVAIL DES ABEILLES

Pourquoi les abeilles, qui veulent économiser la cire, ont-elles choisi les formes ci-contre pour construire leurs alvéoles ?

Ce problème comporte deux aspects :

- dans le plan : pourquoi des hexagones réguliers ?
- dans l'espace : pourquoi les prismes à base hexagonale sont-ils "fermés" par des losanges très particuliers ?

● *Première phase :* nous commençons par une étude mathématique de polygones réguliers : quels polygones réguliers permettant de paver le plan ? On trouve sans trop de peine le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone régulier : mais, à aire égale, quel est celui qui présente le périmètre minimum ?

Suivent alors des calculs laborieux, mais on trouve bien l'hexagone. Quant au problème de l'espace, c'est une autre affaire, hors de portée de nos élèves : le volume est maximum pour une surface minimum lorsque les losanges de "raccordement" ont des angles de 109° 28′ et 70° 32′ !!!

● *Seconde phase :* ces informations données, les élèves, en équipe, construisent des alvéoles en papier fort, qui s'emboitent par le fond.

L'absence de participation d'un professeur de travail manuel fut un handicap et la construction des alvéoles s'en ressent...

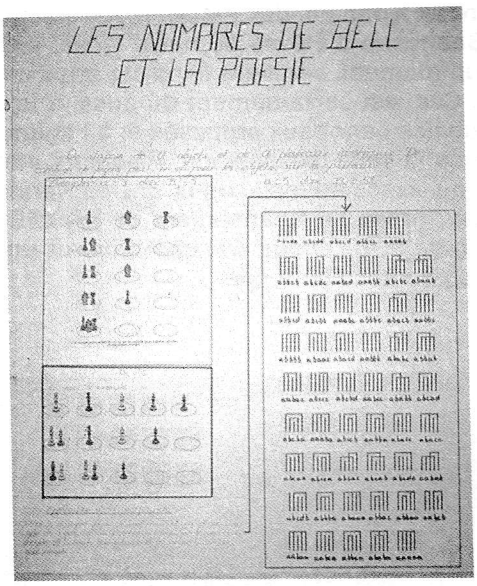
Grâce à l'étude faite aussi en cours de sciences naturelles, notre stand de présentation fut non seulement composé de résultats géométriques, mais également d'informations sur la vie des abeilles.

## NOMBRES DE BELL ET POESIE

(d'après une idée prise dans "Pour la Science", référence : N° 9 juillet 1978.)

*Le vieux marin breton de tabac prit sa prise*
*D'aucuns par-dessus tout prisent les escargots*
*Sur l'antique bahut il choisit sa cerise*
*Qui sait si le requin boulotte les turbots ?*

*R. Queneau*




Le problème peut être présenté de la façon suivante : combien de manières de faire rimer des vers pour une strophe de 4 vers ? pour une strophe de 5 vers... ?

● *Première phase :* en liaison avec le cours de français, on a recherché, dans des livres de poésies, un certain nombre d'exemples.

Pour un sonnet, c'est facile : abba ou aa bb,...
Un premier panneau fut réalisé avec toutes les réponses possibles pour des quatrains (on a pu trouver quinze poèmes).
On trouve donc, à la main, le nombre de Bell $B_4$ égal à 15.

Les élèves poursuivent la recherche avec des strophes de cinq vers pour tenter de trouver le nombre $B_5$...
Il s'avère que la poésie française ne donne pas tous les cas théoriquement possibles...

● *Seconde phase :* une approche mathématique est alors faite pendant les heures réservées au P.A.E.

Pour $B_5$, il s'agit de déterminer le nombre de façon de disposer des objets, au nombre de cinq, sur cinq plateaux identiques.

Théoriquement, on sait que $B_5 = 52$ (voir le n° de "Pour la science" cité).

Les élèves ont dû se contenter d'un décompte à la main : le dénombrement théorique fait appel aux partitions d'un ensemble de Cardinal 5.

Un panneau réalisé par un groupe d'élèves rend compte de cette recherche et montre les 52 possibilités de rimes pour un quintrain.

**LE SCRABBLE**

● *Problème* :Avec un scrabble français, peut-on jouer valablement dans d'autres langues ?

● *Première phase :* nous avons choisi des textes de journaux et de livres variés en catalan, flamand, anglais, allemand et espagnol. Les élèves, passent un temps assez long à chercher la fréquence des lettres dans chacune de ces langues.

● *Seconde phase :* Après avoir examiné sur le scrabble français le lien entre la fréquence d'apparition d'une lettre, le nombre de jetons portant cette lettre et la valeur qui lui est attribuée, les élèves ont construit un scrabble pour chacune des langues étudiées.

Deux sortes de production ont été réalisées :

- d'une part, l'histogramme des fréquences pour chacune des langues,
- d'autre part, la confection de tous les scrabbles. En plus, un scrabble en hébreu fut construit par un groupe d'élèves et un, en russe, nous fut prêté.

Pendant l'exposition, les jeux furent mis à la disposition des visiteurs, un groupe d'élèves allemands a pu ainsi vérifier la validité des travaux dans leur langue.

**CONCLUSION**

La grande majorité de nos élèves s'est largement investie dans le P.A.E.; nous en avons senti les retombées jusqu'à la fin de l'année.

Certains peuvent affirmer que c'est du temps perdu. Bien au contraire, nous avons retiré beaucoup de bénéfices de cette expérience.

- les élèves étaient en situation de recherche. Ils ont mené leur travail du débroussaillage jusqu'à la production - de qualité - d'un document lisible par les autres.

- Ils ont fait un véritable travail de recherche mathématique : nous nous sommes efforcés pour chaque classe de trouver des thèmes en relation avec leur programme.

- Ils ont travaillé en équipe. L'exposition eut un succès important : auprès de nombreux parents, des lecteurs des journaux lyonnais, des élèves d'autres établissements. Beaucoup d'élèves de notre lycée, dès qu'ils avaient un moment, venaient dans cet espace mathématique. Ceci est certainement dû aussi à la qualité esthétique des panneaux proposés et à l'agencement agréable de la salle d'exposition. Plusieurs établissements - ou associations - nous ont demandé cette exposition ; grâce au financement de l'APMEP cette exposition va être rendue transportable et une nouvelle vie commence pour elle... ■

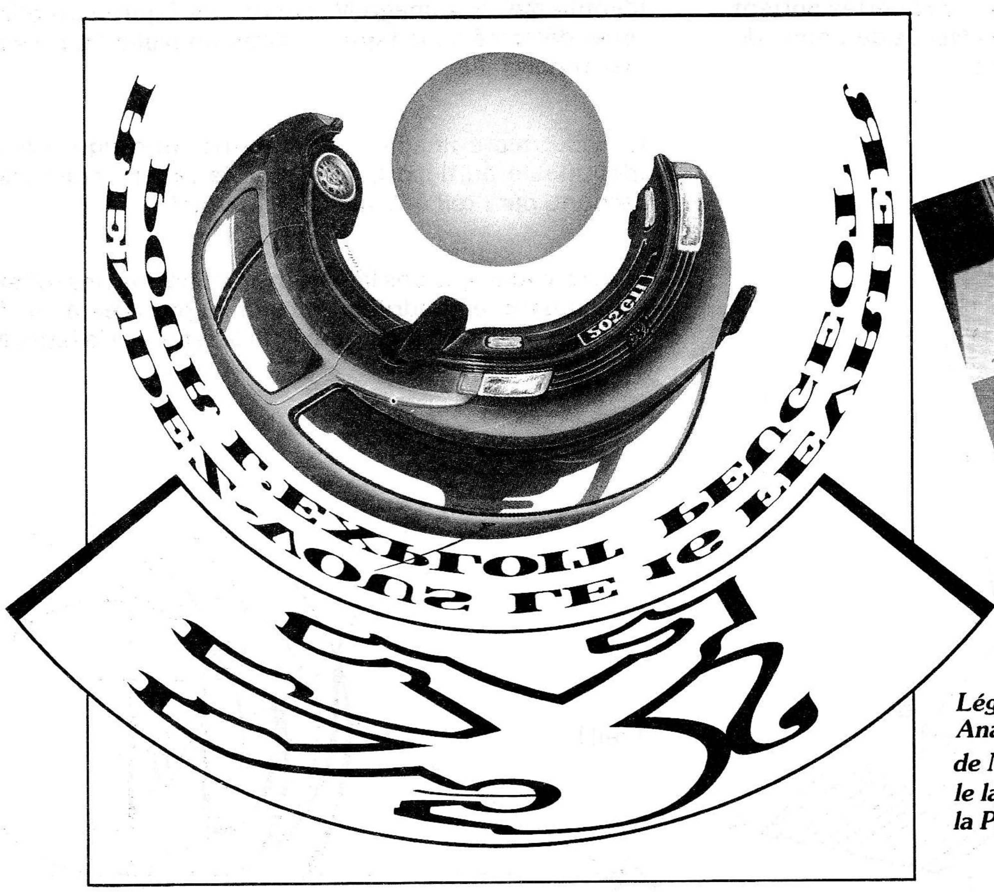
# ANAMORPHOSE ET PERSPECTIVE

*Noël BLOTTI - Paris*

**ANAMORPHOSE ? Le jeu de perspective auquel on a donné le nom d'anamorphose consiste à déformer l'image jusqu'à son anéantissement, de sorte qu'elle se redresse, ressuscitée, lorsqu'on la regarde d'un point de vue déterminé. (...) L'anamorphose fait son apparition dès le début du XVI^e^ siècle ; Léonard de Vinci, Dürer semblent en avoir été les promoteurs.**

**(...) C'est à la France, dans la première moitié du XVII^e^ siècle, que l'on doit leur renouveau.**

**(...) Nous assistons d'ailleurs à une reprise de ces astuces optiques au sein des différents courants modernes. (...) L'anamorphose se restitue dans toute sa diversité, comme un mystère d'autrefois ou comme un raffinement à la pointe du progrès. Une pensée d'avant-garde (Cocteau, Barthes, Lacan, entre autres) a été fascinée par ces machinations optiques.**



***Légende :***
***Anamorphose cylindrique 50 x 65 cm de Noël Blotti (1984) réalisée par le lancement d'une voiture, la Peugeot 205 GTI.***

***Noël Blotti a conçu et réalisé les anamorphoses de l'exposition "Horizons mathématiques".***

## LE PROBLEME

Dès le XVe siècle, les artistes italiens tentent de donner une représentation satisfaisante sur le plan scientifique, des figures de l'espace, à partir du "point de vue" constitué par l'œil humain. Ils mettent au point des règles géométriques permettant de traduire la ressemblance avec le réel.

La perspective était née.

## LA PERSPECTIVE CENTRALE

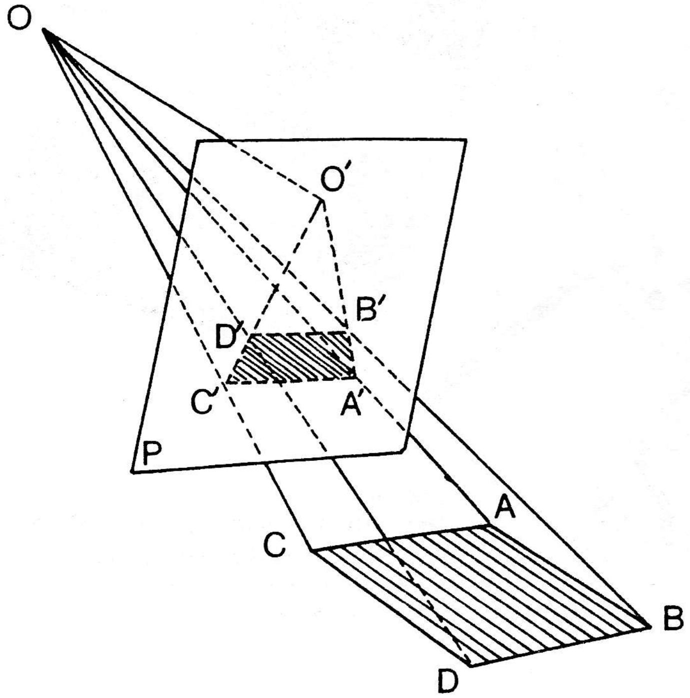
Le point de vue est en O. L'objet à représenter est par exemple une plaque carrée.

Le plan de projection est le plan oblique P. Il s'agit d'y représenter l'objet vu de O. Le point A est représenté par l'intersection de la droite (OA) avec le plan oblique. Et ainsi de suite pour tous les points...

Sur ce dessin, le carré est représenté par un trapèze.

La perspective d'un objet est l'intersection, avec le plan oblique d'une surface conique, de sommet O s'appuyant sur les contours de l'objet à dessiner.

Les principes géométriques de la perspective centrale sont assez complexes et il n'est pas question de les résumer ici. De tout temps, les artistes ont pris des libertés avec ces règles géométriques, pour des raisons esthétiques ou descriptives. Ces libertés portent le nom de "dérogation" (Ex : "Les Noces de Cana" de Véronèse - Encyclopédie Larousse).




## QU'EST-CE QUE L'ANAMORPHOSE ?

En optique, c'est un phénomène qui se produit lorsque la grandeur apparente de l'image d'un objet n'est pas la même horizontalement et verticalement.

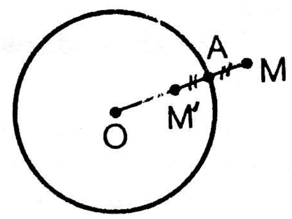
C'est ce que l'on utilise dans le cinémascope à l'aide de miroirs et de lentilles.

C'est aussi, par extension, une image grotesque et difforme d'un objet donnée par un miroir courbe, conique ou cylindrique.

En mathématique, c'est la transformation d'une figure par laquelle les abscisses et les ordonnées sont multipliées par des facteurs différents.

## ANAMORPHOSE CYLINDRIQUE

Si l'on dispose d'un miroir cylindrique dont la trace sur le plan est un cercle, tout point M aura une image virtuelle M' ou "reflet", ainsi construite.

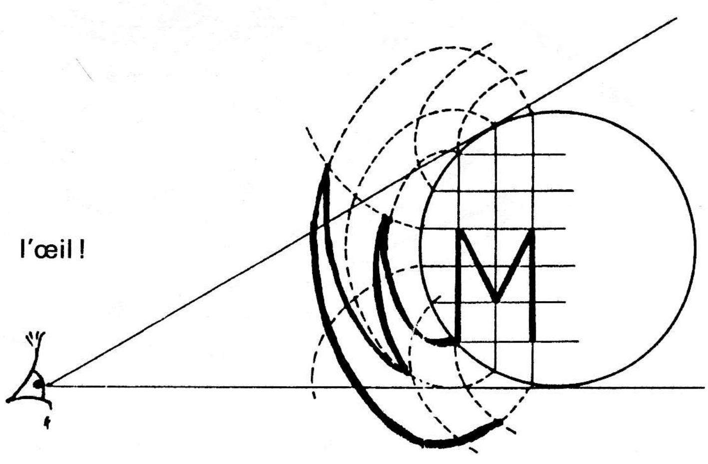



AM = AM'

Lorsque M décrit dans le plan une figure F simple et identifiable, son image M' décrit une figure virtuelle, reflet déformé de la figure F, cette nouvelle figure est méconnaissable.

On peut alors imaginer de dessiner une figure non identifiable au départ, dont seul le reflet virtuel soit reconnu par l'œil à "travers" le miroir !

Voici par exemple des lignes en pointillé dont les reflets constituent le quadrillage virtuel vu par l'œil à l'intérieur du cercle, et une figure dont le reflet est la lettre M à l'intérieur du cercle.



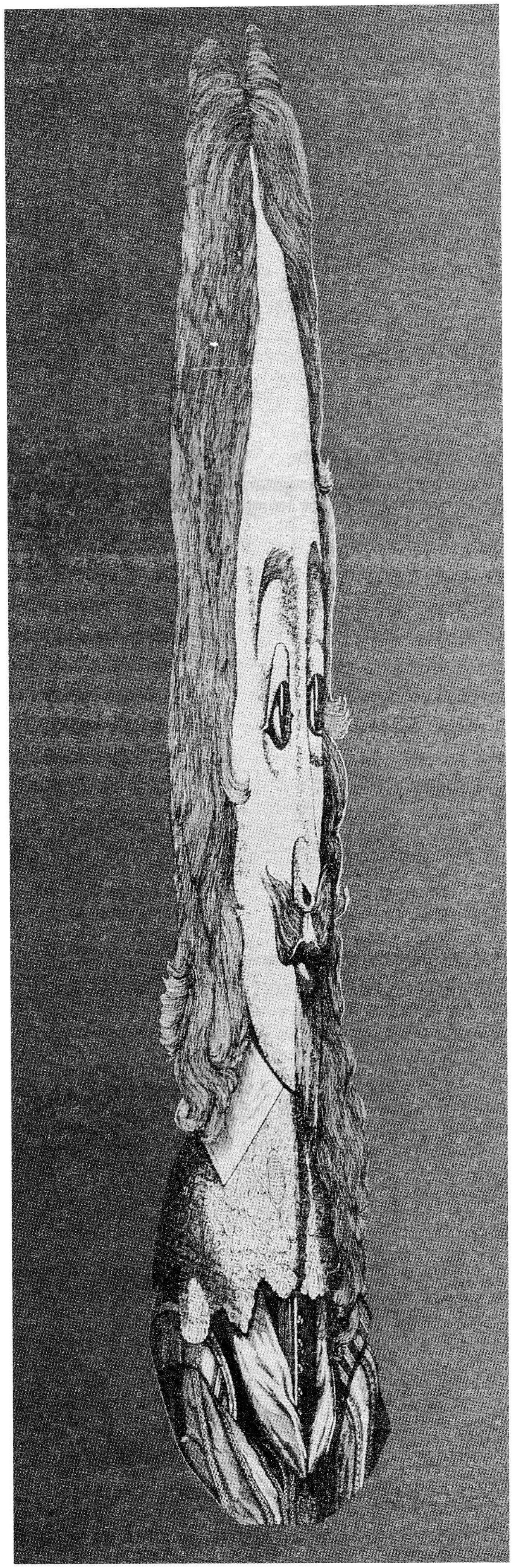
# Anamorphoses directes ou linéaires

Les ambassadeurs de Han Holbein (1533 Londres national Gallery).

Hommage aux sciences et aux arts, ce célèbre tableau est surtout une démonstration magistrale des perspectives : ici le trompe- l'œil et l'anamorphose. Les 2 ambassadeurs français : Jean de Dinteville et l'évêque Georges de Selve sont représentés grandeur nature. Derrière eux, sur une console, une savante composition d'objets, tous chargés de sens et de symboles : un globe terrestre une horloge solaire, des instruments astronomiques, une équerre, 1 compas, des livres, un luth...!!

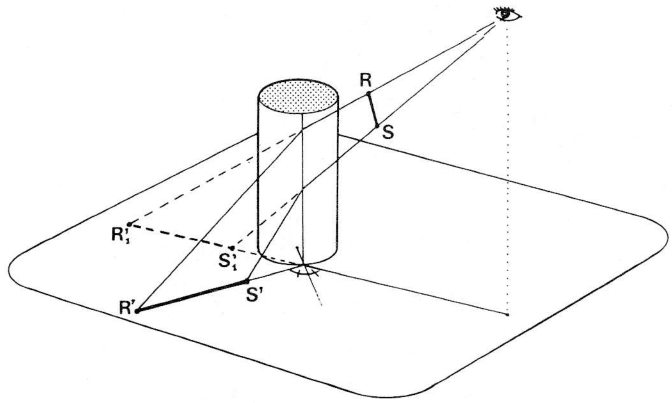
Hommage rendu ici aux 4 arts libéraux : l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie, la musique.

Et puis au premier plan, un objet étrange, qui bouscule les certitudes des Sciences, illisible au regard frontal : c'est l'anamorphose linéaire d'un crâne. De près, un regard oblique placé en bas à gauche et l'image est révélée : la présence cachée du sacré là où il semble absent.



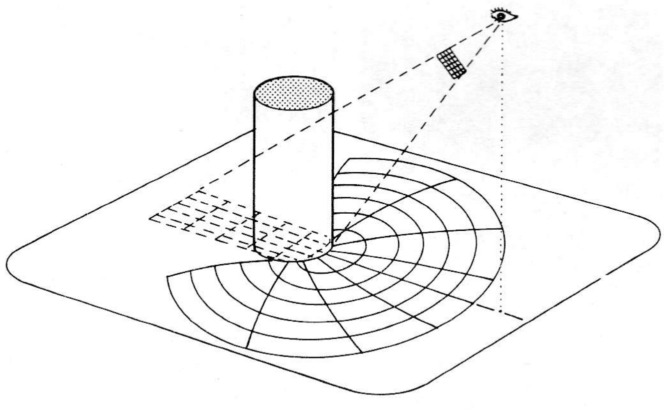
Portrait secret de Charles 1er après 1649. Londres. Collection Anthony d'Ottay.

# Anamorphoses cylindriques



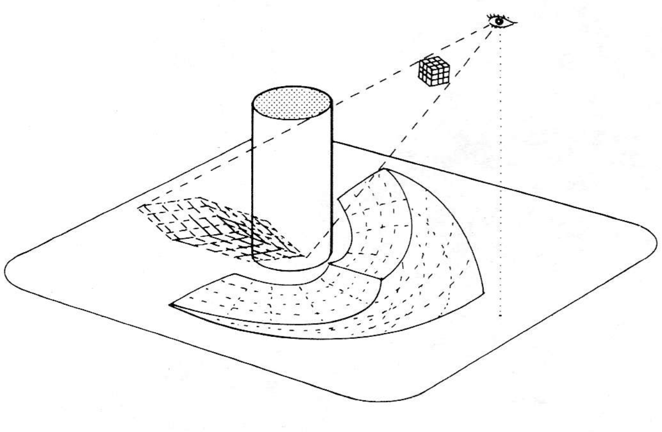

**Projection d'une droite**

Seules les droites se projetant suivant une génératrice sur le cylindre ont pour image une droite.



**Projection d'un quadrillage oblique**

Toutes les droites du quadrillage se construisent point par point. C'est la disposition à adopter pour projeter une image plane dans les meilleures conditions.



**Projection d'un cube quadrillé**

On imagine ici la difficulté pour construire un objet dans l'espace.

**POUR EN SAVOIR PLUS :**

L'anamorphose a donné lieu à de nombreuses œuvres artistiques ou ludiques.

- Une réalisation optique de ce prodédé est proposée en 1780 par l'Abbé Guillon in "Récréations mathématiques amusantes". Paris.

- "The Magic Mirror, An Antique Optical Toy". Edition américaine récente présente 24 gravures françaises éditées par les frères Walter en 1860

- Anno's Magical ABC où Mitsumasi Anno présente en 1981 l'alphabet anamorphosique de A à Z.

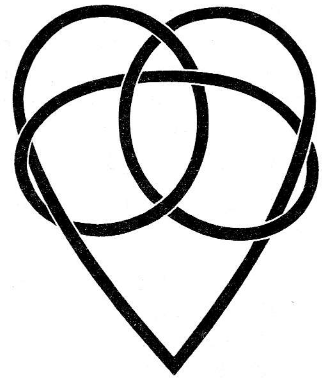
- Pino Zac a créé en 1983 un jeu de cartes anamorphosées édité par J.-M. Simon - France - Carte.

Et bien sur J. Baltrusaïtis - Anamorphoses : Les perspectives dépravées - Flammarion - 1984 - 260 F - où vous saurez tout sur le sujet.

- Attendre enfin un prochain numéro du Plot sur la perspective : "Les écrans du réel". ■

# NŒUDS ET ENTRELACS

Claude PAGANO - La Seyne-sur-Mer



« ... un certain M. Klein affirme avoir prouvé que les nœuds ne peuvent exister dans un espace à quatre dimensions. Voilà qui est déjà assez dur ; mais s'il se trouvait encore quelqu'un pour prouver que le paradis n'existe pas en trois dimensions, quel serait l'avenir de l'expert en nœuds ?

Clifford W. Ashley dans « Le grand livre des nœuds »

**Sauriez-vous citer tous les sports, tous les corps de métiers qui actuellement font des nœuds ?**
**Le marin, bien sûr, le pêcheur aussi, l'alpiniste, sont les plus connus avec la couturière, le cordonnier et, plus précis encore, le chirurgien. En voyez-vous d'autres ? Le mathématicien en a fait, il y a une centaine d'année, un sujet d'étude qui est loin d'être clos.**

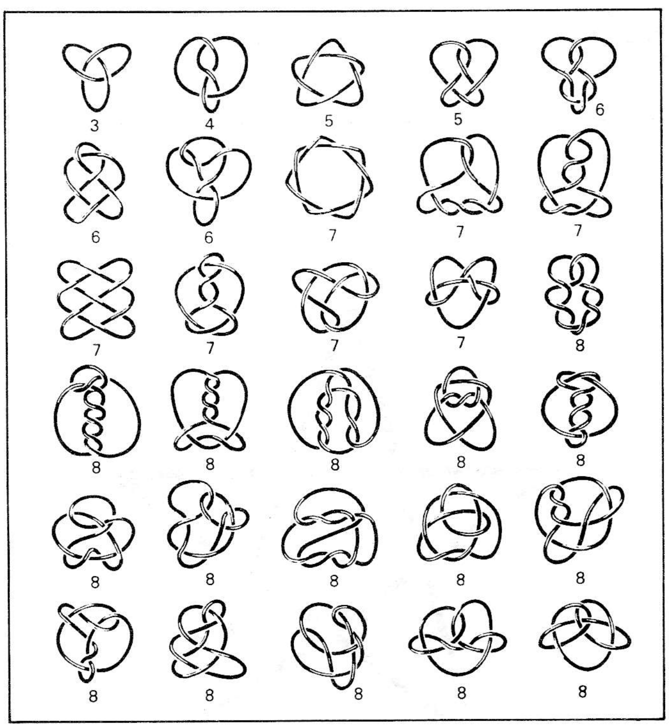
Pour étudier les nœuds et les classer, les mathématiciens utilisent la topologie. Cette branche récente de la géométrie est moins élaborée que la géométrie projective ou la géométrie différentielle. C'est un outil plus sommaire fait pour étudier l'espace. En topologie il n'y a pas de droites perpendiculaires ou parallèles, de points alignés ou de distance. On dit que la topologie est la géométrie de la membrane de caoutchouc.

La théorie des nœuds et entrelacs est, en quelque sorte, l'étude du (ou des) bord de cette membrane.

## D'abord qu'est-ce qu'un nœud pour un mathématicien ?

Prenez une ficelle en nylon de préférence ou un tuyau comme dans l'exposition. Faites un nœud usuel et devenez mathématicien en... joignant les deux bouts (en les soudant par exemple). Vous obtenez alors une « courbe fermée sans points d'intersection » qui est une définition mathématique d'un nœud (1). Et un entrelac ? C'est une figure formée de 2, 3 (ou plus) nœuds disjoints, emboîtés ou non.

*Nœud « premiers » avec leurs nombres de croisement*




*(1) Brochure expo « H.M. » Nœuds et entrelacs à la portée de tous.*

*J.-Y. Le Dimet, irem de Nantes 1985.*

*Il y a une véritable théorie mathématique des nœuds. Elle est née il y a cent ans environ. Elle utilise de nos jours ce que les mathématiciens appellent la topologie.*
*Dans la pratique, on convient que les extrémités libres de la corde sont attachées 2 à 2. Un nœud simple ne comporte qu'un seul brin pour sa fabrication.*
*Un point de croisement est un point où se croisent deux morceaux de la courbe qui représente le nœud.*
*Si, sur une ficelle, apparaissent deux nœuds côte à côte, A et B, le nœud obtenu est le nœud produit A ✱ B = C. On dit alors que A divise C (ou B divise C). Un nœud « premier » est un nœud qui n'est divisible que par le nœud « simple » bien connu.*

## En quoi consiste l'étude mathématique des nœuds ?

Les géomètres sont des maniaques. Leur obsession est de « classer » les objets géométriques, c'est-à-dire de dresser des listes de ces objets en fonction de leurs propriétés, sans omissions ni redondances. Pour arriver à ses fins, dans le cas des nœuds en particulier, le géomètre doit pouvoir décider si deux nœuds donnés sont semblables, si non dire ce qu'ils ont de commun.

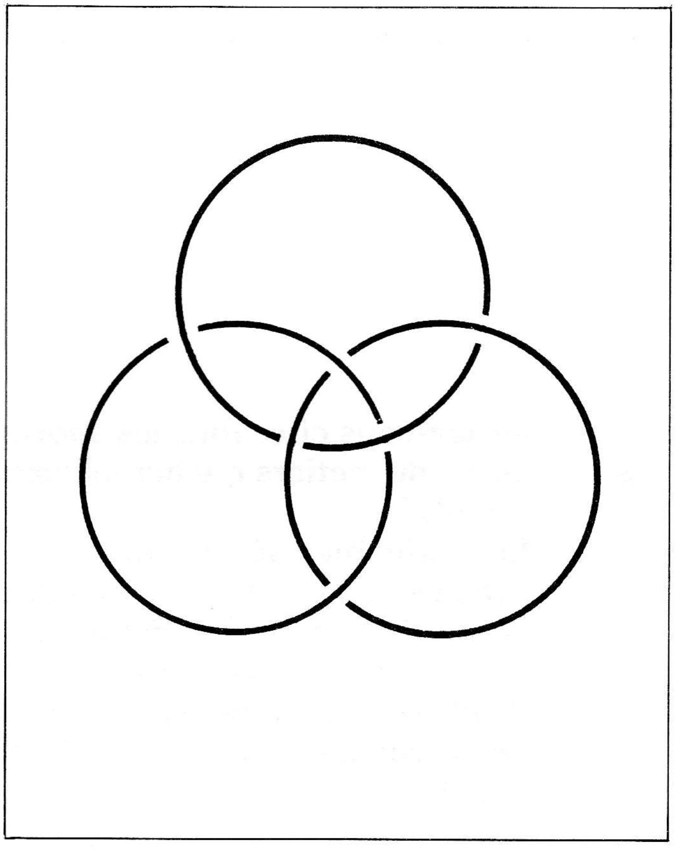
Dans ce but, les mathématiciens ont créé des outils appelés « invariants de nœuds ». Un invariant de nœuds est, grosso modo, une fonction f qui assigne à chaque nœud A un objet f(A) raisonnablement calculable — par exemple un nombre entier, un polynôme — de sorte que, si A et B sont des nœuds semblables, les objets f(A) et f(B) soient égaux.

Il existe un grand nombre d'invariants de nœuds. Citons :

1 - Le nombre de croisements
2 - L'indice de pont
3 - L'indice gordien
4 - Le genre du nœud
5 - Le groupe du nœud
6 - L'invariant de Arf. Kervaire
7 - La signature
8 - Le polynôme d'Alexander
9 - L'invariant de Casson-Gordon
6, 7, 8 et 9 sont des outils beaucoup plus sophistiqués.

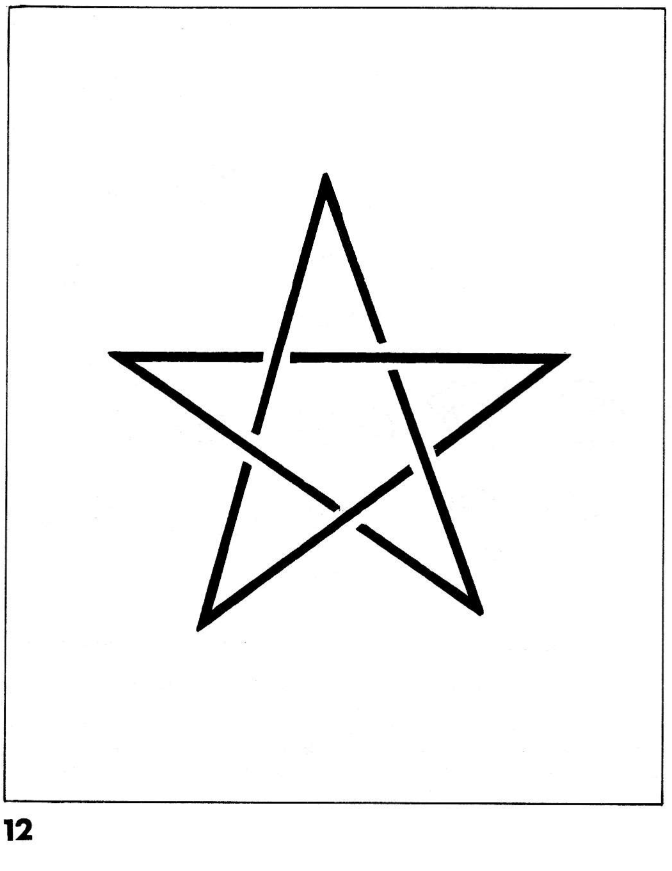
**Un entrelac**

Les anneaux boroméens : cet emblème figure dans les armoiries de la famille italienne Boromée. Il symbolise l'union des trois branches de la famille : si l'on oublie un des anneaux, les deux autres se détachent.

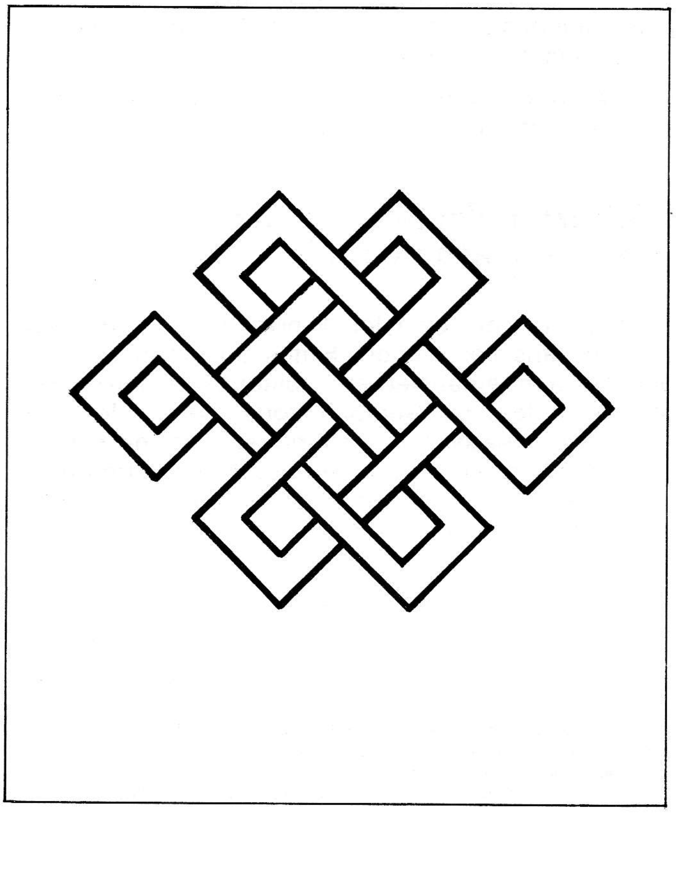


## Usage des nœuds

L'étoile de l'Islam n'est que le nœud $5_1$ du mathématicien.
Pour le musulman, elle symbolise les cinq piliers de la foi.



Ce nœud, $7_4$ dans la table, est l'un des huit emblèmes du bouddhisme tibétain. De même qu'un nœud n'existe pas sans référence à l'espace ambiant, cet emblème rappelle l'interdépendance des choses de ce monde.

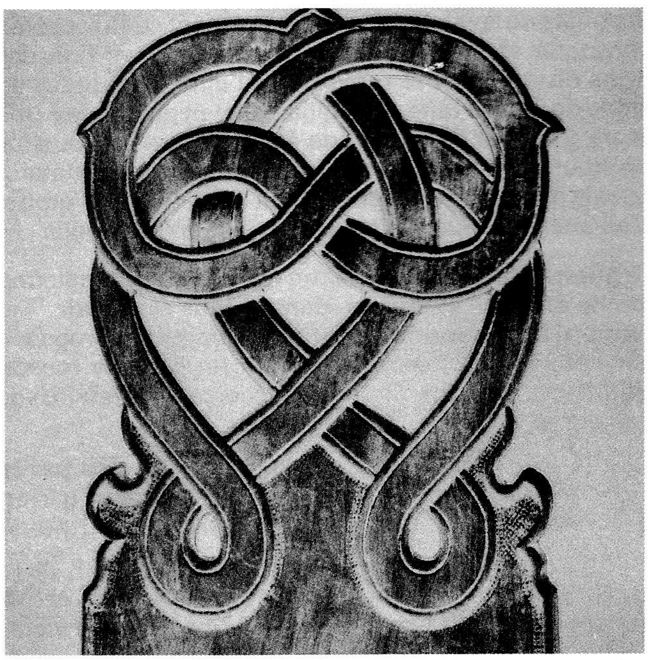


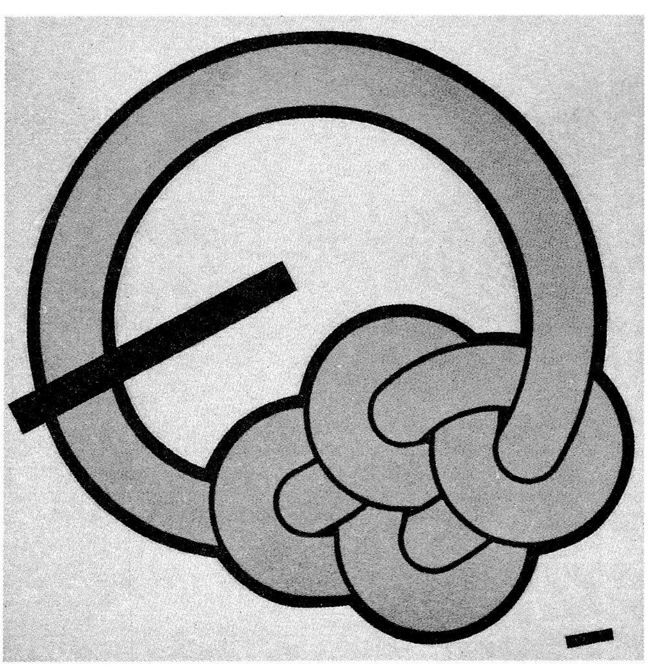
## Utilisation dans la classe

Les nœuds donnent lieu à beaucoup d'activités que je n'hésite pas à faire dans les classes de mon collège.

Ces activités n'exigent pas d'acquis antérieur, mais développent plusieurs types de réflexion. Exemples de travail :

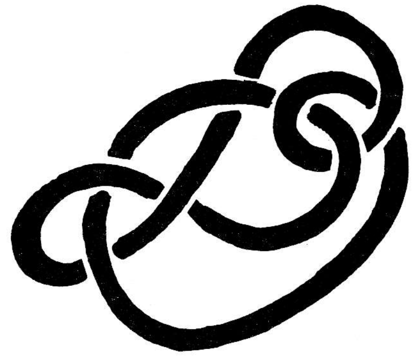
**Les courbes fermées**, ce sont celles que l'on trace sans lever le crayon du papier et en revenant au point de départ sans passer plus de deux fois par le même point. Activités de dénombrements des croisements, des axes, des croisements conjectures sur les relations entre les trois éléments.





Faire un nœud avec une ficelle et savoir le dessiner. Et inversement à partir du dessin d'un nœud savoir faire le nœud correspondant.

Un nœud n'ayant pas une unique représentation plane. A partir d'un nœud à n croisements, essayer de le modifier jusqu'à reconnaître un nœud repéré sur le tableau des nœuds à n croisements. Exemple :

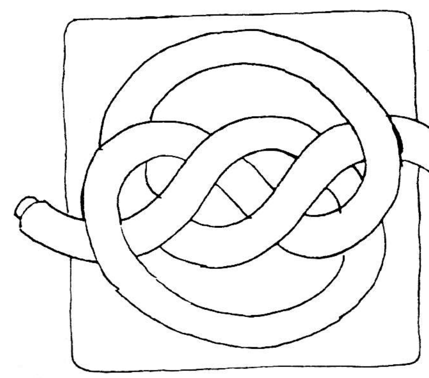


est un nœud à 7 croisements : savoir l'identifier sur la table des nœuds à 7 croisements n'est pas une mince affaire.

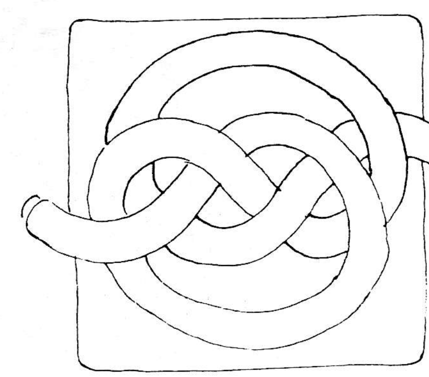
Pour un nœud amphichiral donné,savoir par déformation trouver son symétrique dans le miroir. Exemple :

L'ordre d'un croisement : si j'inverse le sens dessus/dessous d'un croisement d'un nœud de degré n, j'obtiens un nœud de degré m plus petit, l'ordre d'un croisement est la différence n — m.

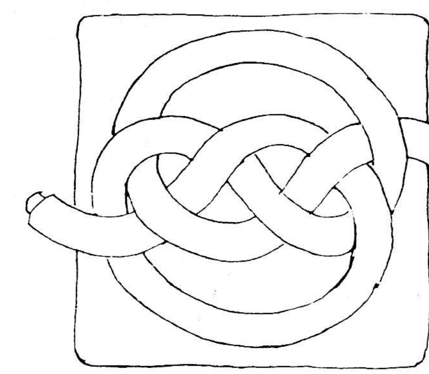
Jeu sur la table des nœuds premiers. Quel est ce nœud sur la liste ?



A

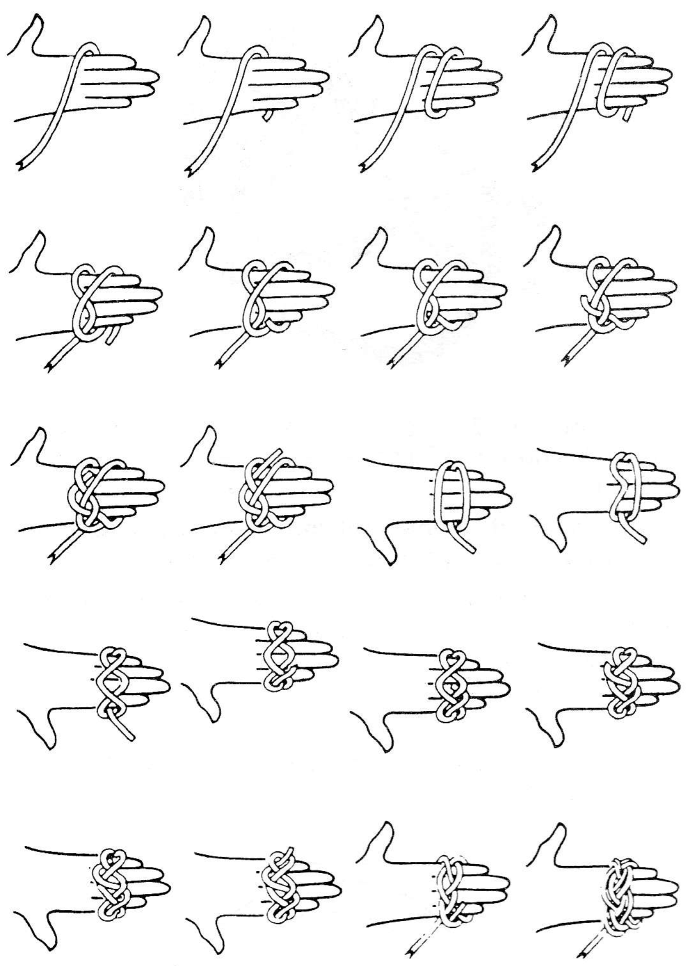


B



C

**Faites vous-même un nœud turc !**



# Nœuds gordiens

Des peuples ont fait un usage moins paisible des techniques de nouage.

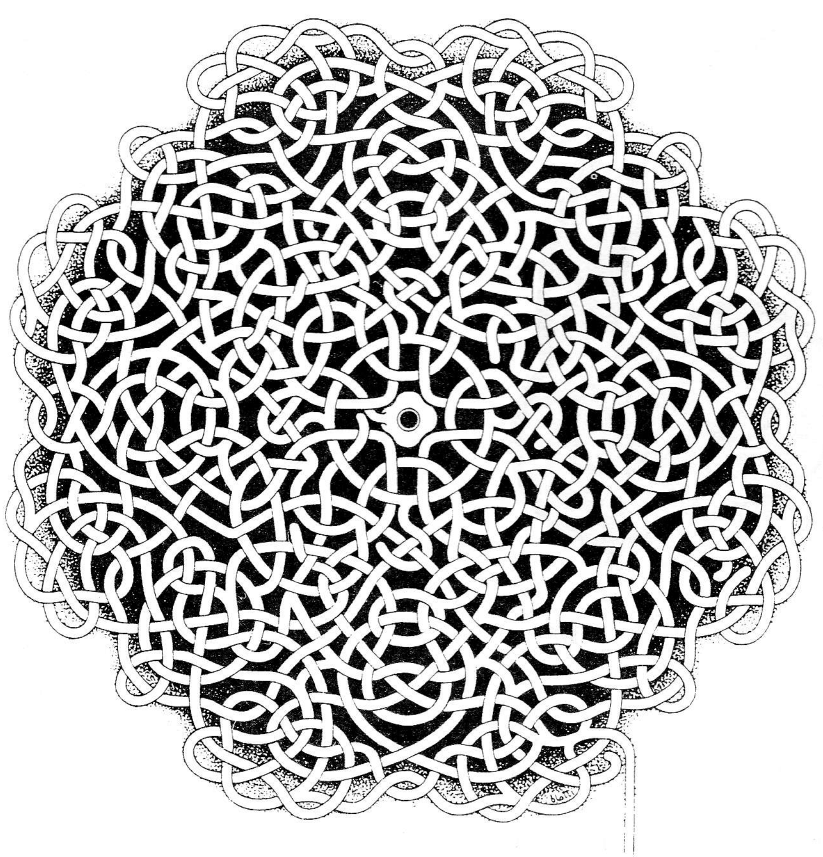
En Nouvelle-Calédonie, les nœuds servent traditionnellement de message de guerre et de paix entre les tribus Canaques.

L'ethnologue Maurice Leenhardt a relevé un certain nombre de ces usages. Ainsi, l'assassinat d'un fuyard était préparé par correspondance entre les chefs de deux tribus par l'échange d'une étoffe d'écorce nouée (un mouchet). Le messager la présentait au chef destinataire avec le nom du délinquant. Celui-ci était convoqué et étranglé. Le chef retirait alors l'un des brins du nœud et le renvoyait au chef expéditeur en signe de justice faite. Une alliance était proposée à une autre tribu par l'envoi d'une étoffe nouée en boucle à un bout. Si l'alliance était acceptée, le destinataire faisait une boucle à l'autre bout et renvoyait l'étoffe. L'alliance conclue était alors réputée indissoluble.

La guerre était déclarée par un nœud qui contenait une torche allumée et éteinte, dont le sens était clair : "je viendrai brûler vos cases". Mais la paix était proposée par l'envoi d'un nœud contenant un bout de roseau signifiant : "Voici le chaume et l'écorce pour refaire vos demeures".

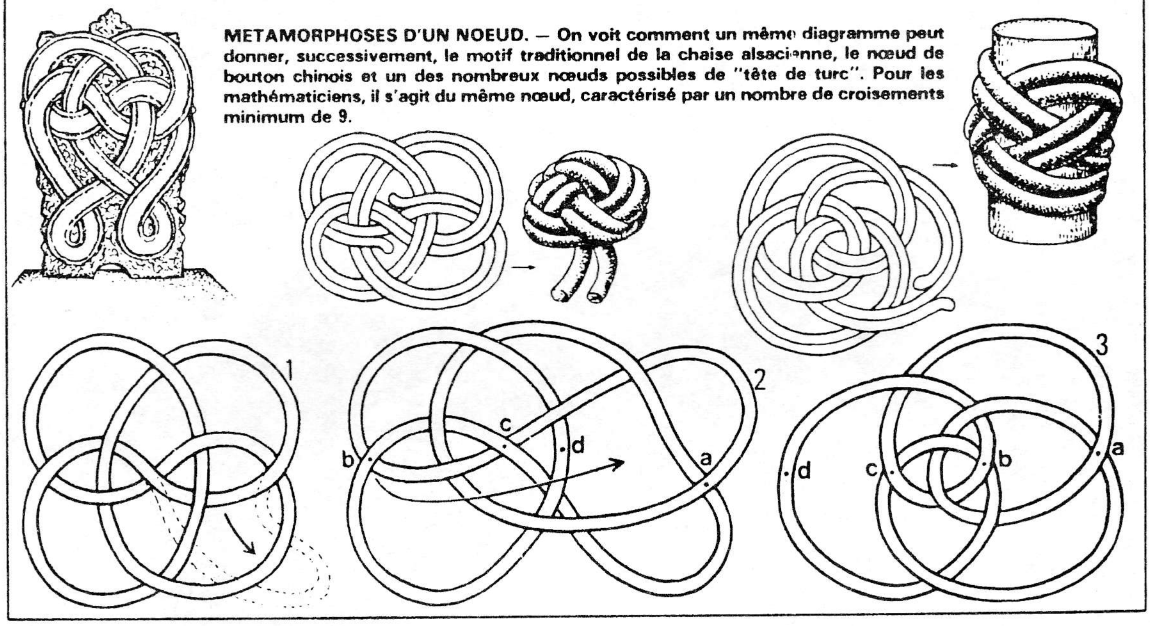
Que la guerre et la paix puissent être portées par la puissance évocatrice d'un simple nœud n'a rien d'étonnant, comme en témoigne l'histoire du nœud gordien.

En 333 avant notre ère, Alexandre le Grand arriva devant la ville de Gordion après avoir traversé victo-



*Nœud labyrinthe par Noël Blotti*

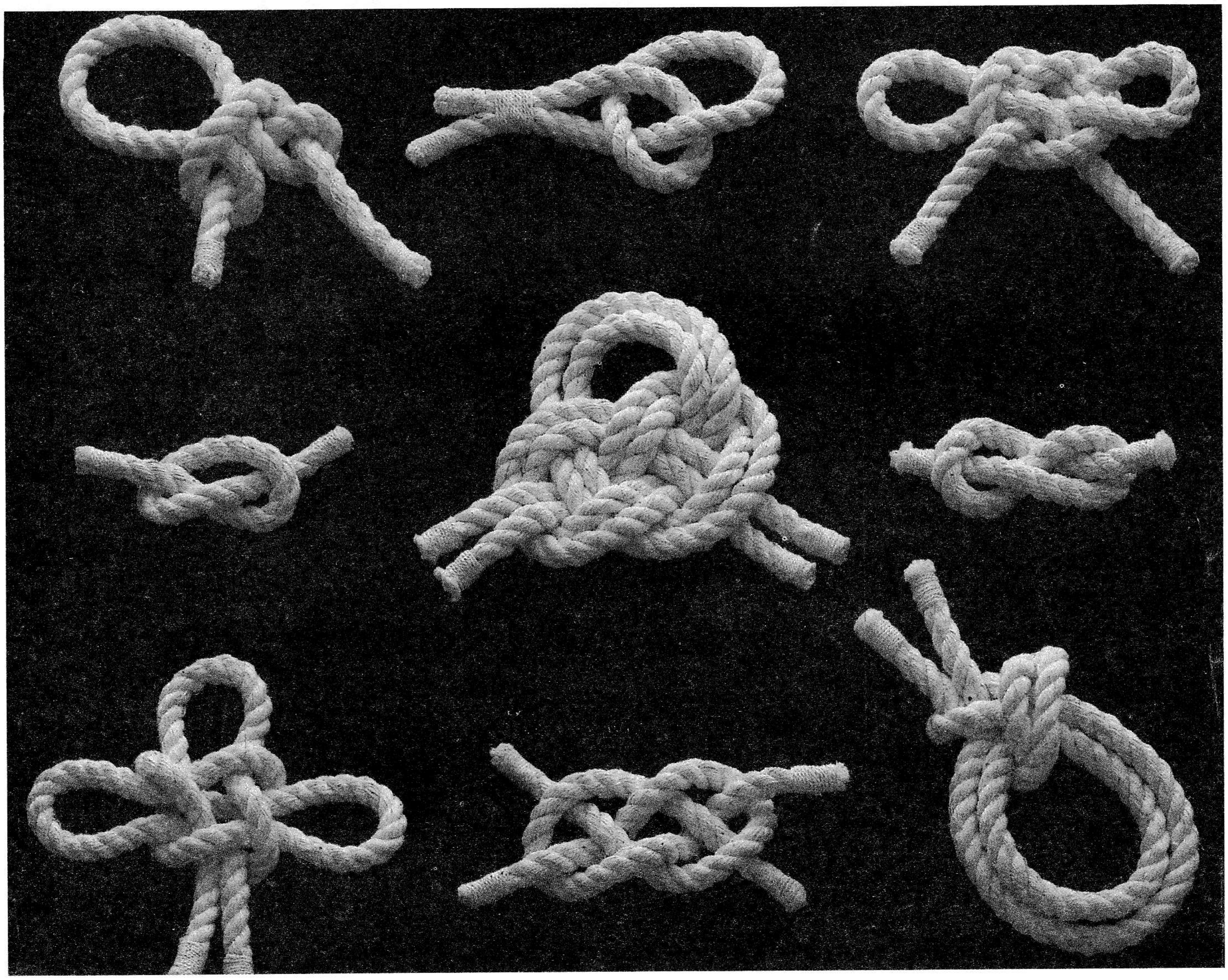
rieusement l'Anatolie. L'antique palais du roi Gordios renfermait dans ses murs le char légendaire des rois de Phrygie dont le joug était attaché par une corde, au moyen d'un nœud si subtil que ni le commencement, ni la fin n'étaient visibles. Suivant un oracle antique, celui qui parviendrait à dénouer ce nœud se rendrait maître de l'Asie, Alexandre pensa aussitôt accomplir l'oracle. Il chercha quelques instants le bout de la corde. En vain. Alors, devant les assistants Macédoniens et Phrygiens, le jeune chef tira son épée et trancha le nœud d'un seul coup. Ce coup d'épée vif comme un éclair montrait de façon imprévue qu'il pouvait dénouer les problèmes indénouables et délivrer les peuples du joug de l'Asie, selon l'oracle (et les historiens grecs). Ce qu'il fit.

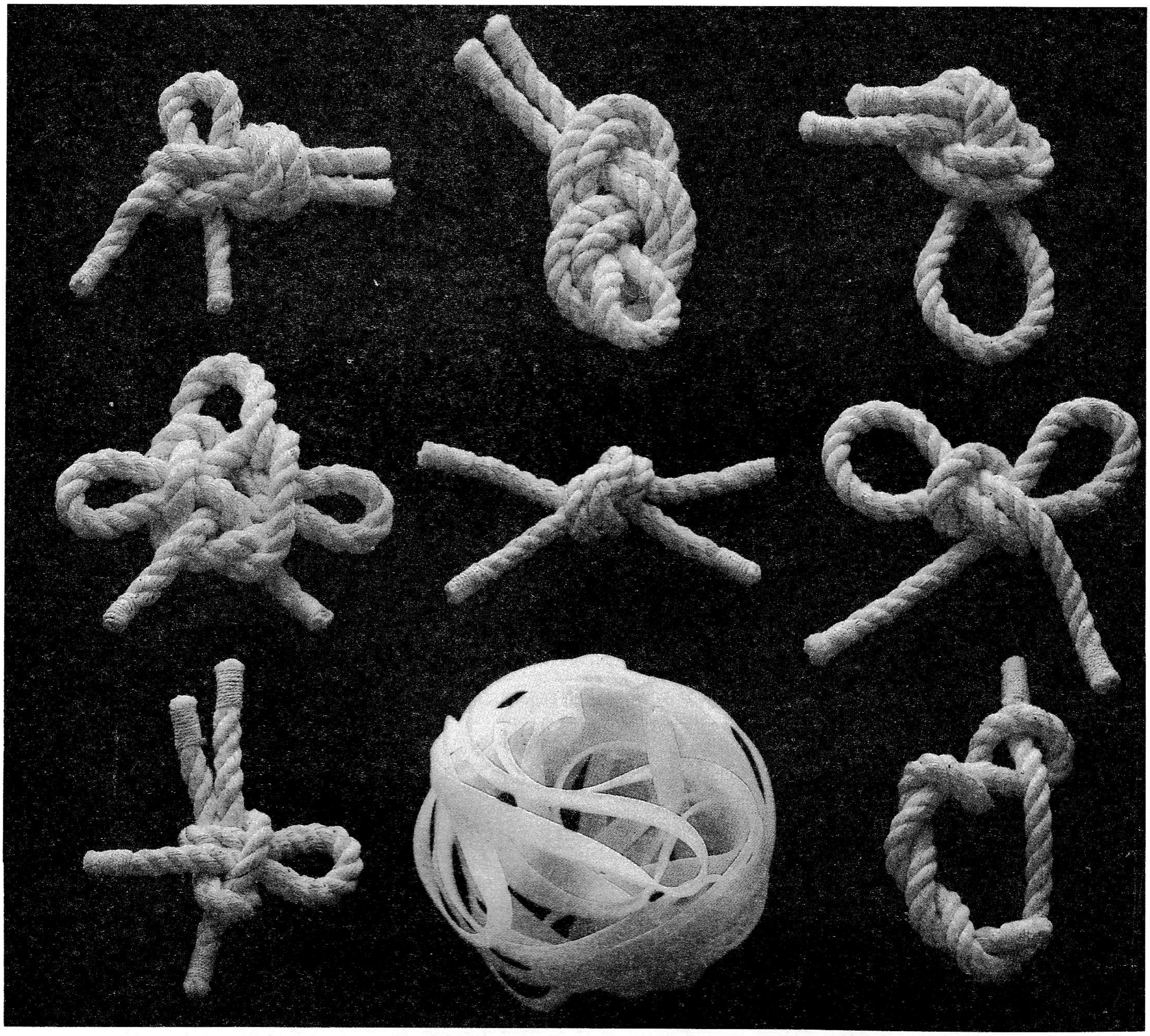



**METAMORPHOSES D'UN NOEUD.** — On voit comment un même diagramme peut donner, successivement, le motif traditionnel de la chaise alsacienne, le nœud de bouton chinois et un des nombreux nœuds possibles de "tête de turc". Pour les mathématiciens, il s'agit du même nœud, caractérisé par un nombre de croisements minimum de 9.

*Extraits de la revue du « Dessin-traits » - Mai 1984.*

## Nœuds "Barilla"

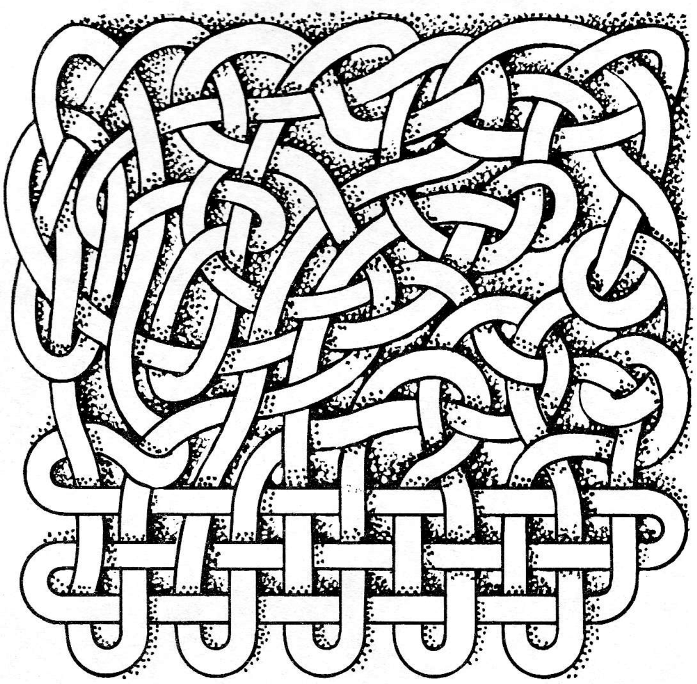




## Conclusion

Pour en savoir plus

- Brochure expo "H.M.":
  Nœuds et entrelacs à la portée de tous.
  J.-Y. Le Dimet - Irem de Nantes, 1985.
- Les mathématiques aujourd'hui
  Les progrès des mathématiques
  Belin - Pour la science. ■

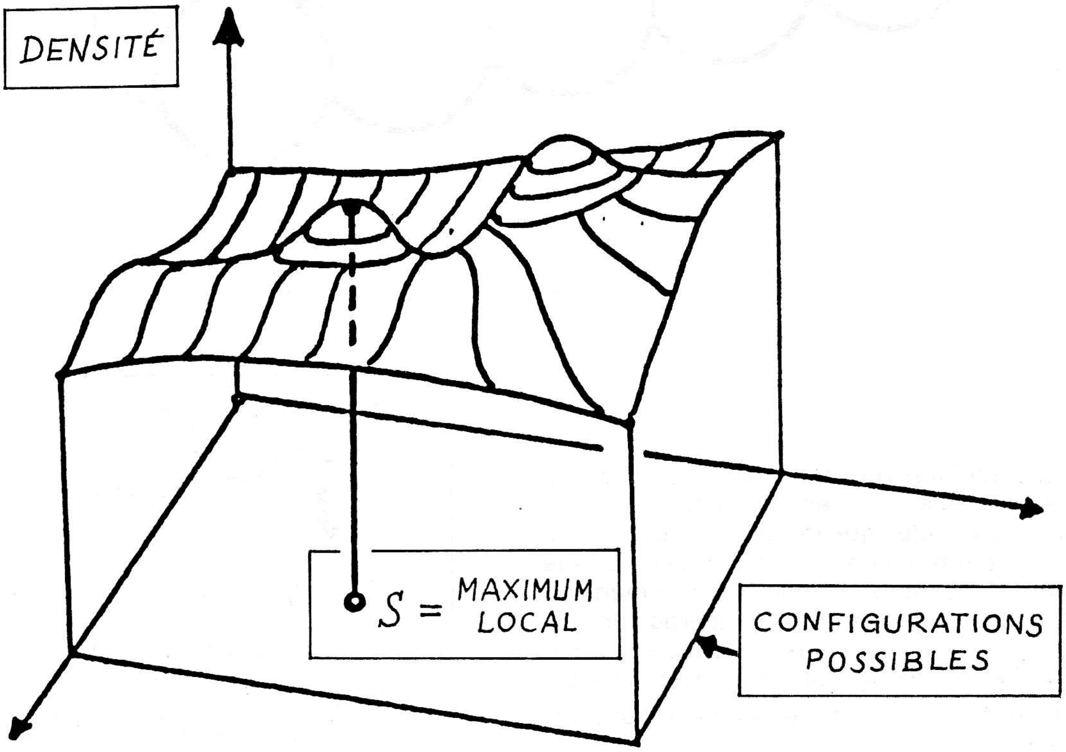


# EMPILEMENTS ET SYMÉTRIES

*François SIGRIST - Neuchatel*

**Comment disposer des sphères identiques de façon à obtenir l'empilement le plus dense possible ?**
**Ce problème, posé par David Hilbert en 1900 à Paris, n'est pas encore résolu. François Sigrist, de l'université de Neuchatel, en a présenté les différents aspects lors du concours mathématique de La Villette en 1983. L'intérêt du problème est multiple : son importance en cristallographie est évidente, les propriétés moléculaires des cristaux sont simulées en assimilant les molécules à des groupements de sphères. En mathématique, le problème a conduit à des travaux importants en arithmétique, permettant de résoudre des équations diophantiennes. Par ses généralisations à des dimensions supérieures à 3, il a trouvé des applications dans le codage, la transmission de messages et la construction de codes autocorrecteurs.**

On appelle densité d'empilement la portion de l'espace occupée par les grains. Le phénomène observé correspond à la notion mathématique de **maximum local** : une faible perturbation ne peut que diminuer la densité. Dans le croquis ci-contre, on observe qu'à un point proche de S, correspond une densité inférieure à la densité en S. Mais on remarque aussi que la densité en S n'est pas la plus grande qu'il soit possible d'obtenir.

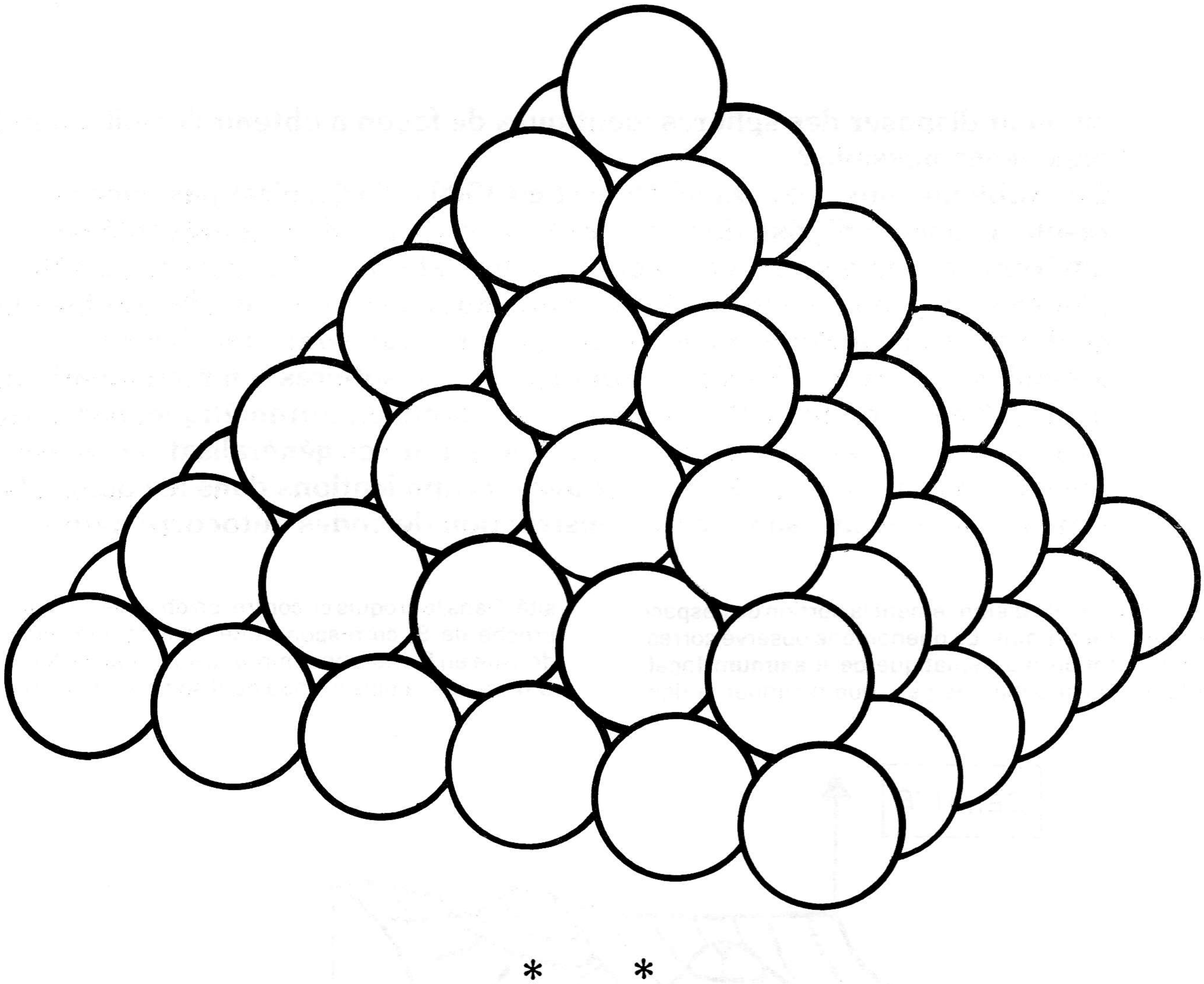


Toutes les observations relatives aux empilements rendent plausible l'existence d'une densité pour les empilements aléatoires de sphères. Deux sachets d'un kilogramme de sable ont même volume. Deux sachets de café moulu, même à des finesses de grain différentes, ont aussi même volume. Les différences de densité observées sont dues à la forme des grains. Du sable se tasse mieux que du riz, qui lui se tasse mieux que des billes d'acier. Et pourtant : Les mathématiques ne sont actuellement pas à même de démontrer l'existence d'une telle densité "universelle".

La densité de 74 % des structures métalliques montre que la nature elle-même offre des exemples de densité bien supérieure à celle du sable. La structure cristalline s'appelle **réseau cubique à faces centrées**. Une excellente illustration de cet empilement est fournie par les piles de boulets de canon que l'on trouve dans les monuments militaires.

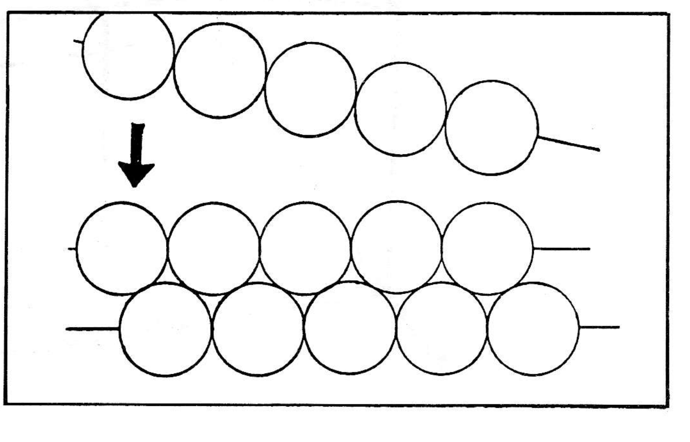
Les sections horizontales sont en **réseau carré**, alors que les faces latérales présentent le **réseau hexagonal** bien connu (alvéoles des abeilles).

Posée sur une face latérale, la pyramide explique un phénomène remarquable : contrairement à l'intuition, il **revient au même**, si l'on veut ranger des billes dans une boîte, de superposer des couches successives en réseau hexagonal ou en réseau carré.



* * *

C'est Carl Friedrich Gauss qui démontra en 1831 que le réseau cubique à faces centrées est, parmi tous les réseaux cristallins, celui qui fournit la plus grande densité d'empilement. La démonstration est illustrée ci-contre dans le cas (plus simple) de la dimension deux. Il est facile de prouver que la superposition de deux couches donne la meilleure densité lorsque l'empilement devient hexagonal. La densité est alors $\pi/\sqrt{12} \approx 0{,}907$. A trois dimensions, on obtient $\pi/\sqrt{18} \approx 0{,}740$.



Les empilements cristallins de sphères peuvent être définis en toute dimension. Ils permettent de transcrire géométriquement la théorie algébrique des formes quadratiques réelles définies. La densité est liée, par une relation facile à établir, à la valeur minimale d'une forme quadratique unimodulaire lorsque les variables sont entières et ne sont pas toutes nulles.

Le simple fait que la densité d'empilement est inférieure ou égale à 100 % se traduit par un résultat algébrique fondamental. Cette observation de Minkowski fonda la géométrie des nombres. C'est un éclair de génie d'une importance historique considérable.

La densité maximale des empilements en réseau est connue jusque, et y compris, la dimension 8. Il paraît actuellement plausible que certains réseaux construits en dimension 9, 12 et 24 soient de densité maximale, mais la question n'a pas progressé depuis une vingtaine d'années.

| Dimension | Densité cristalline maximale | | Date |
|---|---|---|---|
| | Exacte | Approximative | |
| 2 | $\pi/2\sqrt{3}$ | 0,9069 | 1773 |
| 3 | $\pi/3\sqrt{2}$ | 0,7404 | 1831 |
| 4 | $\pi^2/16$ | 0,6168 | 1872 |
| 5 | $\pi^2/15\sqrt{2}$ | 0,4652 | 1877 |
| 6 | $\pi^3/48\sqrt{3}$ | 0,3729 | 1925 |
| 7 | $\pi^3/105$ | 0,2952 | 1926 |
| 8 | $\pi^4/384$ | 0,2536 | 1934 |
| 9 | $\geqslant 2\pi^4/945\sqrt{2}$ | $\geqslant 0{,}1457$ | 1946 |

C'est en dimension 10 que les informaticiens, à l'aide de la théorie des codes, ont produit un empilement de sphères non cristallin qui est plus dense que tous les empilements en réseau connus.

On se perd actuellement en conjectures sur cette éventuelle malformation. Peut-être est-elle l'effet de notre ignorance...

* *

*

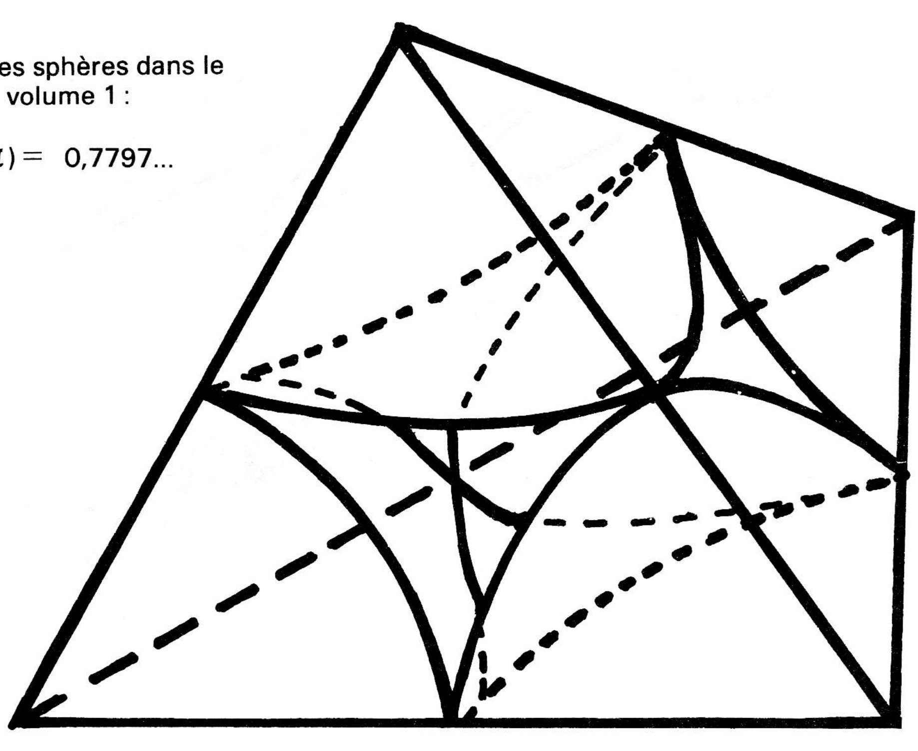
Un empilement de sphères, quelle que soit sa régularité, ne peut atteindre la densité de 100 %. En 1958, le mathématicien britannique C.A. Rogers a donné, grâce à une idée très ingénieuse, une limite supérieure de densité qui est la meilleure estimation connue.

En dimension trois, cette limite est donnée par la densité d'occupation des sphères centrées aux sommets d'un tétraèdre régulier, comme l'illustre la figure ci-contre.

La valeur exacte de la limite obtenue est $\sqrt{2}\,(3\arccos 1/3 - \pi)$, presque 78 %. Cette densité est cependant inaccessible, pour une raison géométrique bien connue : il est impossible d'empiler des tétraèdres réguliers de façon serrée. Les petits récipients contenant de la crème à café, tétraédriques, se prêtent particulièrement bien à une expérience directe.

Volume occupé par les sphères dans le tétraèdre régulier de volume 1 :

$\sqrt{2}\,(3 \text{ arc cos } \frac{1}{3} - \pi) =$ 0,7797...



La densité de la sphère inscrite dans un **dodécaèdre** régulier est légèrement supérieure à 75 %. On a affirmé que cette valeur constitue une limite supérieure de densité, mais la démonstration est hélas **incomplète**.

La question reste irritante à cause du réseau cubique à faces centrées, de densité 74 %. C'est **le record du monde,** mais est-ce le record absolu ?

La question est si ouverte que même les spécialistes sont divisés. Sous forme d'énigme, elle peut s'énoncer ainsi :

"Un récipient, de capacité un litre, est savamment rempli de grains d'un matériau inconnu. Le poids net est 750 grammes.

Est-il possible que, déversé dans l'eau, ce matériau flotte ?"

Il serait dommage de traduire les deux phrases suivantes, l'une canadienne, l'autre anglaise, qui résument les doutes et les espoirs des mathématiciens.

H.S.M. Coxeter (1951) :

"It is conceivable that some irregular packing might be still denser"

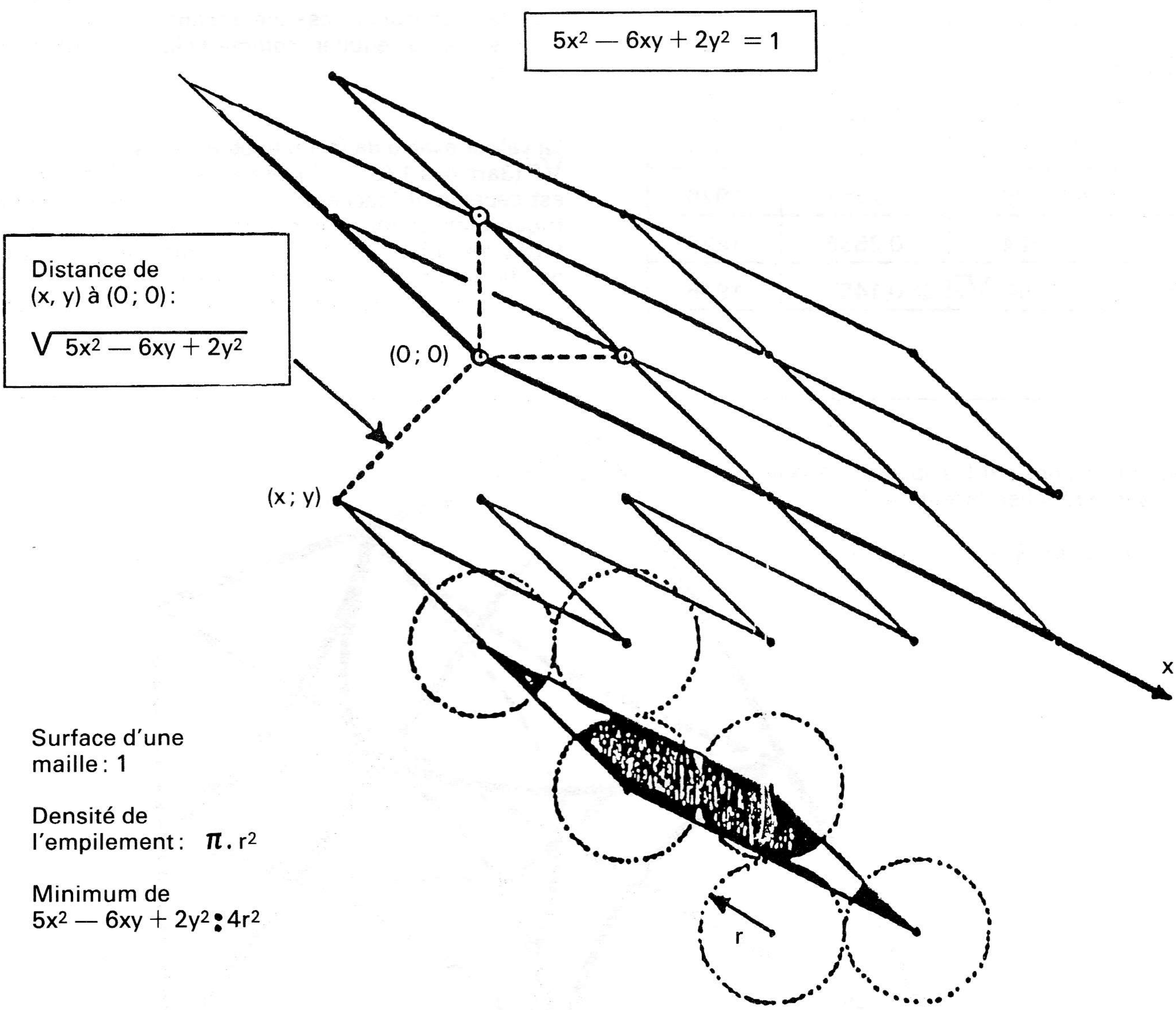
C.A. Rogers (1958) :

"Many mathematicians believe, and all physicists know, that the density cannot exceed $\pi / \sqrt{18} = 0{,}7404...$"

Un bel échantillon d'application de la géométrie des nombres est le résultat suivant : « On donne trois entiers a, b, c satisfaisant $a > 0$ et $ac - b^2 = 1$. Alors, l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ a toujours une solution entière ».

La preuve, géométrique, est illustrée ci-contre dans le cas particulier $a = 5 \quad b = -3 \quad c = 2$.

Il existe un système de coordonnées obliques tel que la distance à l'origine du point (x, y), soit $\sqrt{ax^2 + 2bxy + cy^2}$. En outre, la maille fondamentale est de surface 1. On prend alors l'empilement de sphères centrées aux points à coordonnées entières, de rayon maximal. Le carré $4r^2$ du diamètre de la sphère est un **entier** : c'est la valeur minimale de $ax^2 + 2bxy + cy^2$ lorsque x et y sont entiers. La densité d'empilement est $\pi r^2 \leqslant 1$. Donc $4r^2 \leqslant \frac{4}{\pi} = 1{,}27...$ et par conséquent $4r^2 = 1$. Ce qu'il fallait démontrer.



L'énumération des entiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés est un problème d'arithmétique bien connu.

C'est le résultat de la page précédente qui permet de franchir le seul passage délicat :
" Soit b un entier quelconque. Alors tout diviseur de $b^2 + 1$ est une somme de deux carrés ".

Preuve : Si a divise $b^2+1$, il existe c tel que $ac - b^2 = 1$.
Alors (page précédente) $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ possède une solution entière.
On en déduit successivement :

$$\begin{aligned}
(ax + by)^2 + y^2 &= \\
a^2x^2 + 2abxy + (b^2 + 1)y^2 &= \\
a^2x^2 + 2abxy + acy^2 &= \\
a(ax^2 + 2bxy + cy^2) &= \dots \\
&= a
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

**Sommes de deux carrés**

| | |
|---|---|
| Premiers | $1789 = 5^2 + 42^2$ |
| | $1993 = 12^2 + 43^2$ |
| Composés | $1985 = 7^2 + 44^2 = 31^2 + 32^2$ |
| | $1989 = 15^2 + 42^2 = 30^2 + 33^2$ |

Le point final de l'investigation concerne les nombres premiers. C'est :
" Soit p un nombre premier tel que
$(p-1)/2$ soit un nombre pair.
Alors p est une somme de deux carrés ".

Preuve : Tout nombre premier impair divise

$$1 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \times \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$$

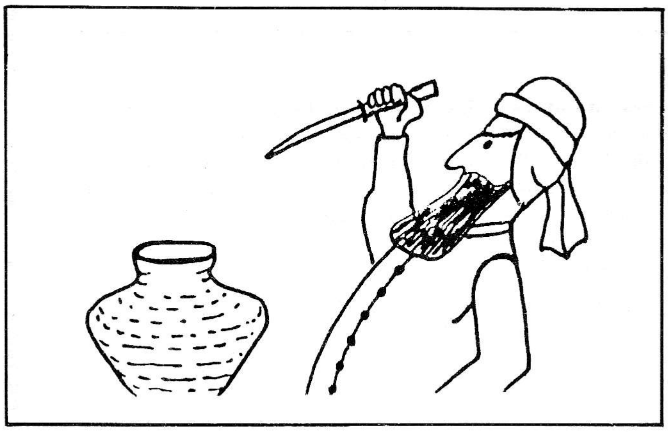
C'est une propriété facile à établir et que l'on appelle le "théorème de Wilson". La conclusion suit immédiatement du résultat précédent.

## Problèmes " Chocs de billes "

Les empilements de sphères sont le domaine de nombreuses situations paradoxales. En voici cinq :

- **Le fakir**

Des fakirs plongent, plusieurs fois de suite, un couteau dans une jarre de riz bien tassée. Après une douzaine de coups, la jarre reste suspendue au couteau.
Plus près de nous, chacun peut, à l'aide d'un cure-dents et d'une salière, réussir ce tour très spectaculaire.

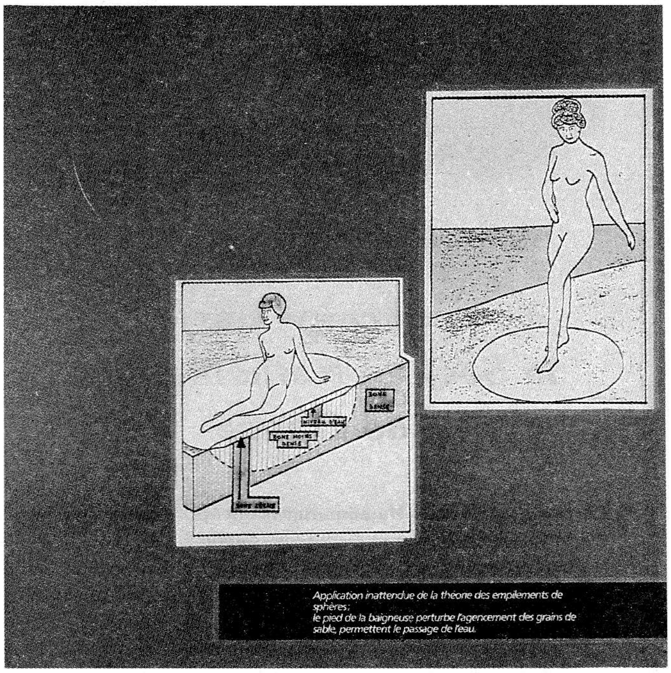


- **Agitez, agitez-moi !**

Dans une boîte, placez des billes de même matière (acier par exemple) et de différents diamètres. Agitez fortement la boîte. Que se passe-t-il ? Où sont les grosses billes ? les petites ? en haut ? en bas ?

- **Café moulu, café foutu !**

Observez un paquet de café en grain et un paquet de café moulu. Pour le même poids, quel est celui qui occupe le volume le plus petit ? En êtes-vous sûr ?




- **La baigneuse**

Une baigneuse au bord de l'eau pose son pied sur le sable humide. Observez bien son petit pied carré ! A votre avis, s'enfonce-t-il ou remonte-t-il plus haut ? Tout est affaire de densité maximum locale !

- Voyage à travers les dimensions

Dans $R^n$ la mesure du volume d'une boule de rayon 1 est :

$$\frac{(2.\pi)^{n/2}}{n\,(n-2)\,(n-4)\dots 4.2} \quad \text{si n est pair}$$

$$\frac{2\,(2.\pi)^{(n-1)/2}}{n\,(n-2)\,(n-4)\dots 3.1} \quad \text{si n est impair}$$

d'où le "problème-choc" : dans quelle dimension la sphère est-elle la plus grosse ? ■

# PRIX D'ALEMBERT

Ein Taschenspieler mit den Planeten. 137 × 95
*Un prestidigitateur avec les planètes.*

## *décerné par la Société Mathématique de France*

**PRIX D'ALEMBERT**
**Règlement du Prix**

*1. La Société Mathématique de France a décidé de créer un Prix visant à encourager des travaux en langue française, de vulgarisation des Mathématiques vers un large public.*

*2. Ce prix récompensera un article, un livre, une émission de radio ou de télévision, un scénario de film ou toute autre réalisation, initiative ou projet, destinés à mieux faire connaître et comprendre les Mathématiques et leurs développements récents.*

*3. Ce prix d'une valeur de 15 000 F sera décerné tous les deux ans. Il sera remis au(x) lauréat(s) lors de la journée annuelle de la S.M.F.*

*4. Le jury comprendra :*
- *5 membres de la Société désignés par son Conseil,*
- *1 membre désigné par la S.M.A.I.,*
- *1 membre désigné par l'Association des Journalistes Scientifiques,*
- *5 personnalités choisies par le Conseil de la S.M.F. pour leurs compétences ou l'intérêt de leur jugement sur la diffusion des Mathématiques dans la Culture.*

*Les candidatures peuvent être soumises par les candidats eux-mêmes ou par toute autre personne physique ou morale, avant le 15 novembre. Le jury se réunira pour l'attribution du prix dans le courant du mois de décembre.*

*Renseignements complémentaires et dépôts de candidatures :*

**Société Mathématique de France**
**B.P. 126-05**
**75226 Paris Cedex 05**

**Depuis toujours les Mathématiques ont été à la fois ésotériques et pratiques. Aujourd'hui, alors que leur champ s'est considérablement élargi et diversifié, elles paraissent entraînées d'un mouvement irrésistible vers plus de complexité et d'abstraction, au point de devenir incompréhensibles aux profanes. En même temps - en dépit ou à cause de leur abstraction - elles s'appliquent partout. Jamais leurs implications n'ont été aussi concrètes, aussi vitales.**

**Dans ce contexte on est conduit à s'interroger, plus que par le passé, sur la façon dont les Mathématiques sont perçues par nos contemporains. Malgré le crédit général dont elles jouissent en France, il n'est pas exagéré de dire qu'il y a un abîme entre leur réalité vivante et les préoccupations du public cultivé. Le grand public, pour sa part, reste privé de la compréhension de cette réalité.**

**La spécialisation a tué le vieux rêve encyclopédique et la question reste entière de savoir ce que pourrait être une bonne vulgarisation. Elle ne consiste pas, en tout cas, pour les spécialistes, à tenter d'imposer une vision préconçue de leur discipline, elle requiert les talents les plus divers, capables d'établir des liens, des interactions indispensables, entre les découvertes, les progrès des Mathématiques et les curiosités, les intérêts que les hommes manifestent dans leur travail et dans leur vie. Avec l'ambition toujours actuelle que les Mathématiques fassent pleinement partie de la culture humaine.**

"... Mais il ne faut pas croire que la définition d'une science, surtout d'une science abstraite, en puisse donner l'idée à ceux qui n'y sont pas du moins initiés. En effet, qu'est-ce qu'une science ? Sinon un système de règles ou de faits relatifs à un certain objet ; et comment peut-on donner l'idée de ce système à quelqu'un qui serait absolument ignorant de ce que le système renferme ? Quand on dit de l'arithmétique, que c'est la science des propriétés des nombres, la fait-on mieux connaître à celui qui ne la sait pas, qu'on ne ferait connaître la pierre philosophale en disant que c'est le secret de faire de l'or ?".

(Jean Le Rond d'Alembert, "Discours préliminaire de l'Encyclopédie").

# DESSINS ET RÉPÉTITIONS

*Michel FLEURY - Montréal*

**A QUOI ressemblerait un univers sans symétrie ? Il nous est bien difficile de l'imaginer. Elle est présente partout : dans les arts, les lois physiques, dans les objets les plus simples, dans les galaxies. Et pourtant, les recherches actuelles, en mathématiques ou en physique, étudient les phénomènes où ces symétries se brisent.**
**Des logiciels graphiques se développent permettant aux professionnels des métiers d'arts graphiques ou décoratifs de créer de nouveaux motifs à l'infini.**
**Les illustrations du présent article extrait de Topologie structurale n° 12 (1986) ont été créées par le logiciel Alhambra développé par Michel Fleury de l'Université du Québec à Montréal.**

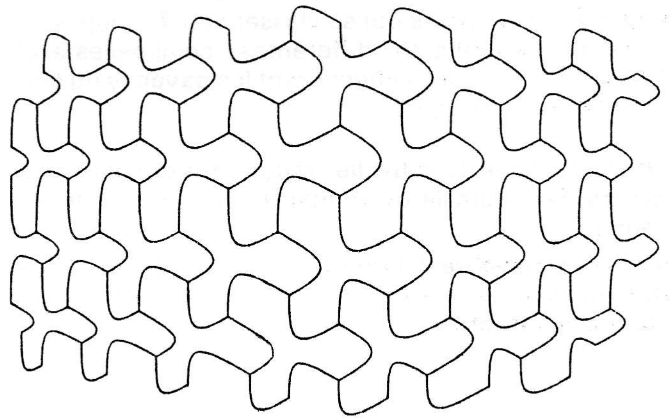
- Les rythmes visuels ont été présents dans l'expression graphique des hommes à travers l'histoire selon des degrés divers. On sait que les artistes musulmans contraints à ne point représenter le sacré ont, à une certaine époque, poussé davantage les recherches formelles dans ce domaine.

L'Alhambra de Grenade en est un exemple saisissant. La façon dont les artistes ont exploité les notions de symétrie et de régularité a étonné maints géomètres. On y décèle une étude systématique des symétries du plan et une connaissance *probable* des 17 classes fondamentales.

Bien sûr, ils ne furent pas les seuls à être préoccupés par le graphisme non figuratif et rythmé. Dans toutes les cultures on retrouve une certaine fascination pour les rythmes visuels dans les arts utilitaires (poterie, mosaïques, tapisserie, ...).

Néanmoins ces pratiques relevant surtout des métiers d'art, elles sont souvent jugées de moindre importance pour les concepteurs visuels.

On y accorde une certaine valeur sur le plan méthodologique et pédagogique mais on croit peu à leurs valeurs expressives. On les retrouve parfois dans les cours de *basic design*, dans les exercices pour le design des tissus et de l'emballage, mais on n'étudie jamais de manière systématique la géométrie des rythmes visuels et encore moins leur utilisation à des fins expressives.



Escher et Vasarely ont ouvert partiellement la voie mais en fin de compte ils ont révélé surtout leur ingéniosité personnelle.

La valeur donnée aux rythmes visuels se comprend mieux quand on songe que leur production est extrêmement laborieuse et que pour les utiliser à des fins expressives il faut d'abord pouvoir les créer rapidement afin de les *jauger visuellement*.

L'analogie entre les rythmes musicaux qui se déploient dans le temps et les rythmes visuels qui se déploient dans l'espace fait penser qu'il sera possible, avec le support de l'informatique, d'utiliser des *harmonies visuelles* à des fins expressives.

Une expérience dans ce sens se déroule présentement à l'*Université du Québec à Montréal* au laboratoire *Design et informatique* et s'appuie sur le logiciel Alhambra conçu pour faciliter la création de rythmes visuels. Le programme Alhambra fait référence à cette expérience qui a commencé en juin 1985 et qui se poursuivra jusqu'en 1986.

L'objectif du présent article est simplement de présenter le logiciel alhambra maintenant qu'il est situé dans sa problématique, et de faire ressortir les particularités qui intéresseront le géomètre.

Pour les amateurs de Macintosh, il est à noter qu'il est possible à l'aide du logiciel Versaterm de transformer un dessin produit par Alhambra en un fichier MacPaint qu'on peut alors retravailler à loisir.

## Symétries dans les arts

Pour les anciens, symétrie (du grec "sun", avec, et "metron" mesure) signifiait "juste mesure" et évoquait surtout une idée d'harmonie, d'équilibre. Pour nous, dans le langage courant, ce terme désigne plutôt l'idée de ***"symétrie-miroir"***.

En mathématiques, la notion de symétrie s'étend à toutes les transformations qui créent des rythmes, des régularités à partir d'un motif de base.

On trouve en plus :

- les ***symétries de rotation***
qui engendrent les **rosaces** finies ou infinies.
- les *symétries de translation*
- Dans une seule direction : composées avec les symétries-miroirs ou les symétries centrales elles engendrent les **frises** qui se classent en 7 groupes.
- Dans deux directions différentes : composées avec les précédentes, elles engendrent les **pavages** du plan classés en 17 groupes.

Les recherches de nouvelles régularités ont permis de mettre de l'ordre là où régnait le désordre et inversement :

- les ***symétries de dilatation*** permettent de construire des images dynamisées et des images de synthèse comme les **fractals**.

## Caractéristiques d'Alhambra

Alhambra crée des fichiers sur commande, c'est-à-dire des séries d'instructions qui seront lues et exécutées par un autre programme *(figure 1)*. Ces fichiers de commande correspondent à des structures dont les paramètres sont définis par l'usager. Les différents types de structure sont décrits dans le guide d'utilisation du programme. L'usager, en répondant à quelques questions posées lors de l'exécution du logiciel Alhambra, crée automatiquement un fichier de commande pouvant contenir plusieurs centaines d'instructions selon la complexité de l'algorithme sous-jacent à la structure géométrique choisie pour définir un rythme visuel.

```
$ type cladl4.com
app:neutre
dim:non
des:des1
trace:tous
des:des2,r=-60
fig:1
trace:des1
des:des3
fig:1
trans:pro,(0,0)=(3.000,5.196),(5.196,-3.000)=(6.000,0.000),(5.196,3.000)=(9.000,
5.196),(0.000,6.000)=(6.000,10.392)
trace:des2
fig:2
trans:pro,(0,0)=(3.000,5.196),(5.196,-3.000)=(6.000,10.392),(5.196,3.000)=(0.000
,10.392),(0.000,6.000)=(-3.000,5.196)
trace:des2
fig:3
trans:pro,(0,0)=(3.000,5.196),(5.196,-3.000)=(-3.000,5.196),(5.196,3.000)=(0,0),
(0.000,6.000)=(6.000,0.000)
trace:des2
trans:pro,non
des:des4
fig:0
trace:des3
...
...
...
fig:3F2,o=19.32,26.82
trans:pro,(0,0)=(1.152,3.326),(5.196,-3.000)=(3.072,0.000),(5.196,3.000)=(4.055,
1.703),(0.000,6.000)=(2.135,5.028)
trace:des2
trans:pro,(0,0)=(1.152,3.326),(5.196,-3.000)=(2.135,5.028),(5.196,3.000)=(-0.937
,5.028),(0.000,6.000)=(-1.920,3.326)
trace:des2
trans:pro,(0,0)=(1.152,3.326),(5.196,-3.000)=(-1.920,3.326),(5.196,3.000)=(0,0),
(0.000,6.000)=(3.072,0.000)
trace:des2
fig:3F3,o=18.39,31.85
trans:pro,(0,0)=(1.536,2.660),(5.196,-3.000)=(3.072,0.000).(5.196,3.000)=(3.858,
1.362),(0.000,6.000)=(2.322,4.023)
trace:des2
trans:pro,(0,0)=(1.536,2.660),(5.196,-3.000)=(2.322,4.023),(5.196,3.000)=(-0.750
,4.023),(0.000,6.000)=(-1.536,2.660)
trace:des2
trans:pro,(0,0)=(1.536,2.660),(5.196,-3.000)=(-1.536,2.660),(5.196,3.000)=(0,0),
(0.000,6.000)=(3.072,0.000)
trace:des2
trans:pro,non
app:tek10
info
```

**Figure 1** - *Une partie seulement du fichier d'instruction qui contient en fait 280 lignes est ici représentée. Alhambra crée ces instructions à partir de réponses à quelques questions posées par le programme.*

### Les rythmes d'Alhambra"

Le programme permet de créer des rythmes associés aux structures géométriques suivantes :

**1] Des structures géométriques ayant des symétries isométriques :**

- Les **rosaces**, c'est-à-dire les structures n'ayant que des symétries de rotation ou de réflexion. Deux types sont distingués :
  - les rosaces *finies (figures 2 et 3).*
  - les rosaces *infinies* :
    - à base triangulaire *(figure 4).*

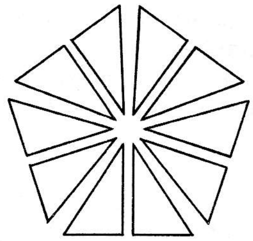


**Figure 2**

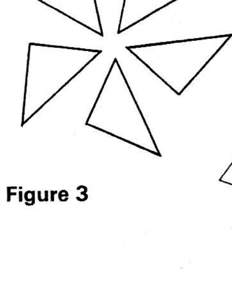


**Figure 3**

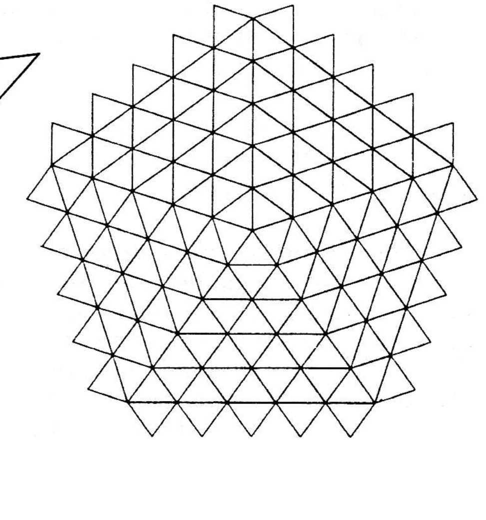


**Figure 4**

Pour ces rosaces infinies à base triangulaire deux grandes catégories sont également distinguées : les rosaces n'ayant que des symétries de rotation, les rosaces ayant des symétries de réflexion (et donc de rotation quand il y a au moins deux axes de réflexion). Pour chacune de ces classes deux possibilités sont offertes à l'usager : le motif de base subit soit une rotation de 180° ou soit une réflexion *(figures 5 et 6)*.

- à base pentagonale *(figure 7)*.

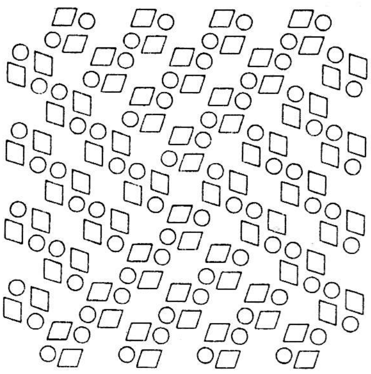


Figure 5

Figure 6

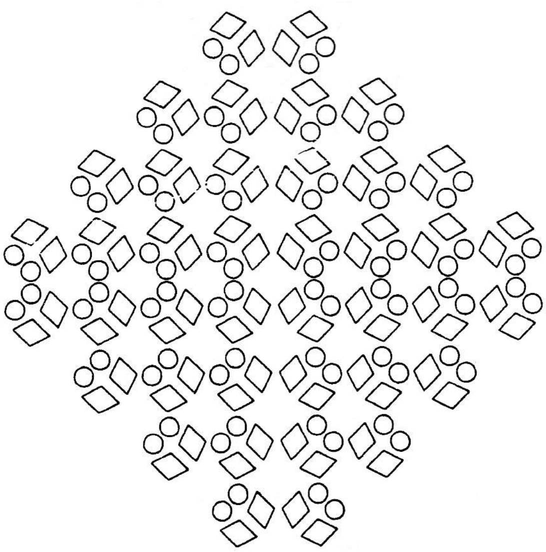
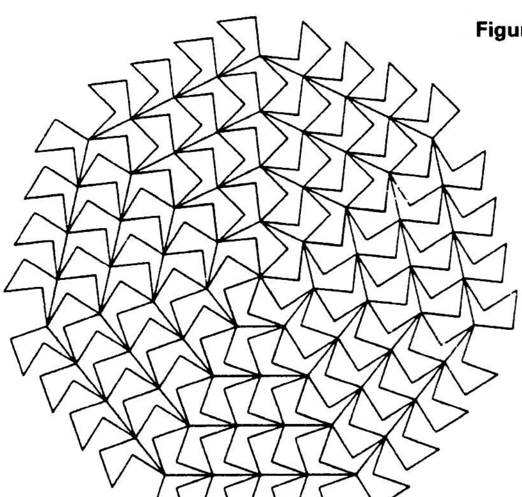


Figure 7



Pour ces rosaces infinies à base pentagonale deux possibilités sont offertes à l'usager : le motif de base subit une réflexion ou non *(figures 8 et 9)*.

Figure 8

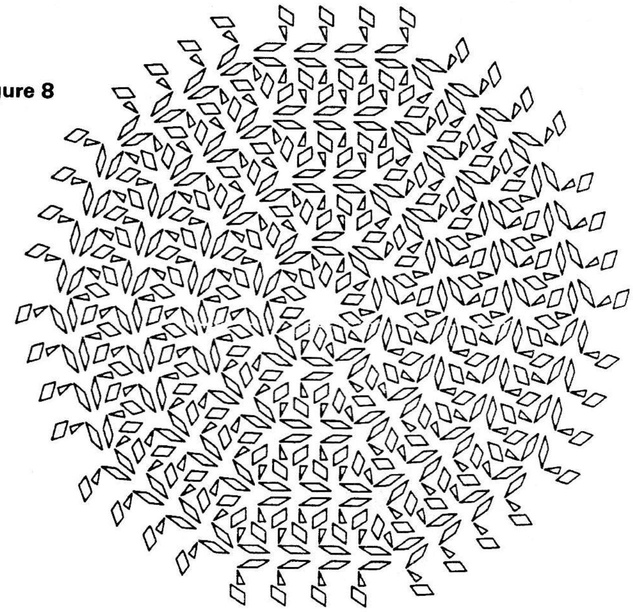
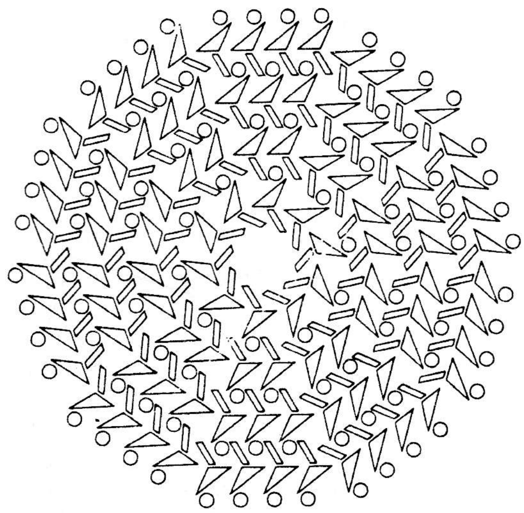


Figure 9



- Les **frises**, c'est-à-dire les structures ayant des symétries de translation dans une seule direction. Les sept classes de symétrie sont bien sûr identifiées *(figure 10)*.
- Les **pavages**, c'est-à-dire les structures ayant des symétries de translation dans deux directions distinctes. Les 17 classes de symétrie sont identifiées *(figure 11)*.

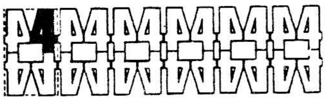


Figure 10

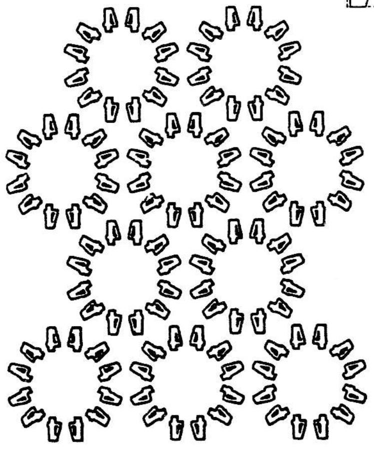


Figure 11

**2**] Des structures géométriques ayant des symétries homothétiques :

- Les structures à base trapézoïdale *(figure 12)*. Ces structures possèdent des symétries de rotation et d'homothétie.
- Les structures à base de quadrilatère symétrique *(figure 13)*. Ces structures possèdent des symétries de rotation, de réflexion et d'homothétie. Le quadrilatère peut dégénérer en triangle.
- Les structures à base rectangulaire *(figure 14)*. Ces structures possèdent des symétries par la composition d'homothéties et de rotations.
- Les structures à base de polygone arbitraire (figure 15). Ces structures sont simplement produites par des applications successives d'une même homothétie appliquée à un anneau de trapèze. L'usager définit cet anneau en donnant des longueurs de rayons et des valeurs d'angle.

L'usager placera un motif dans un trapèze et le programme se chargera de le reporter aux autres trapèzes dans l'anneau initial à l'aide de transformations projectives. Plusieurs possibilités sont alors offertes à l'usager. Il peut choisir de faire ou de ne pas faire des *réflexions projectives* selon les côtés du trapèze initial *(figure 16)*.

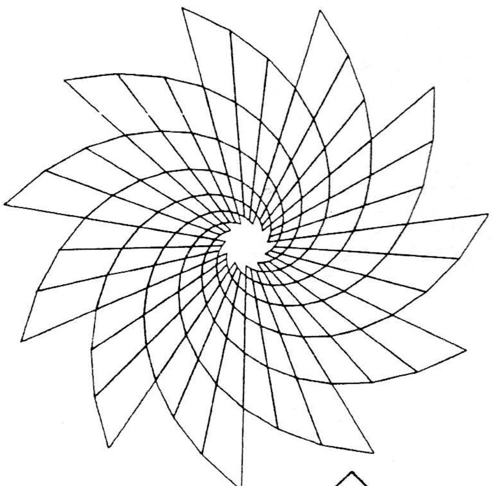


**Figure 12**

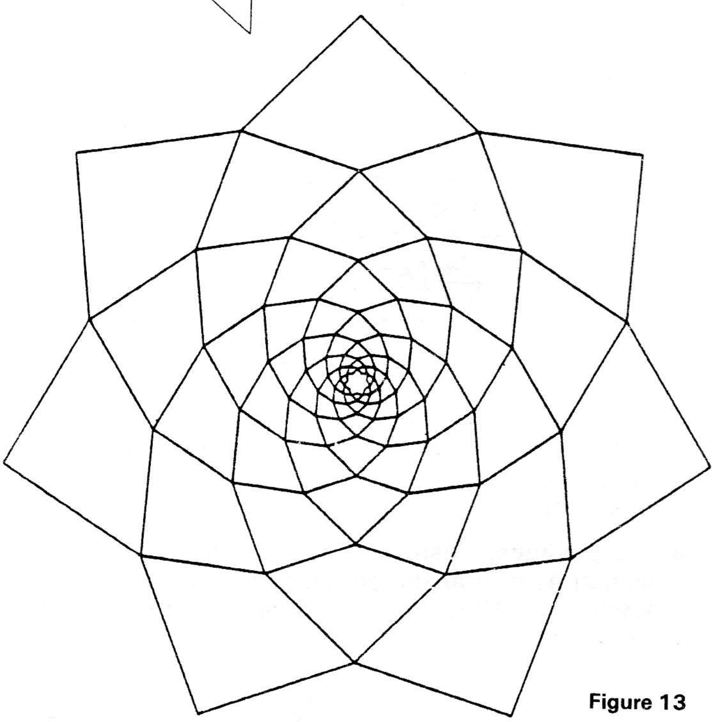


**Figure 13**

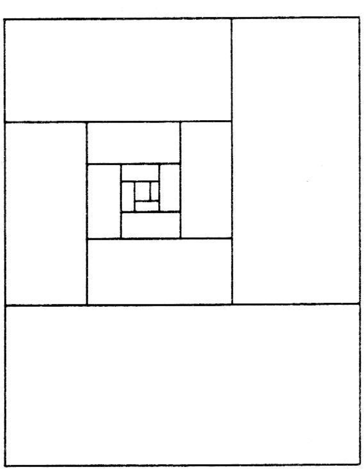


**Figure 14**

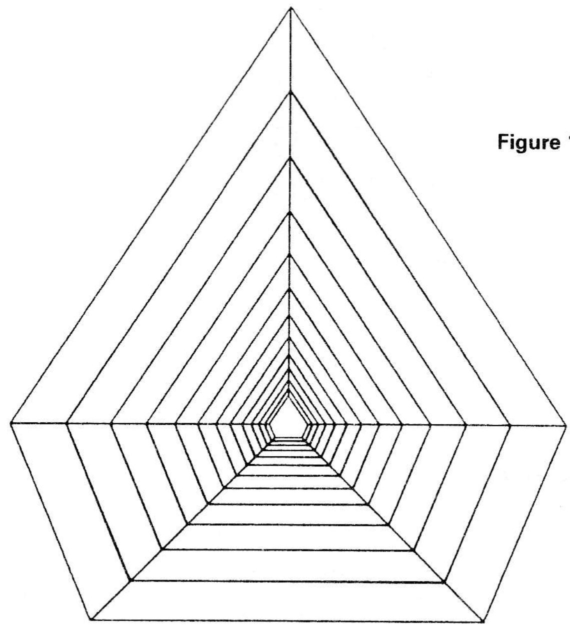


**Figure 15**

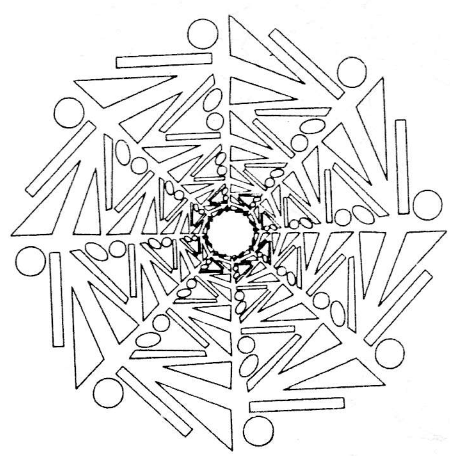
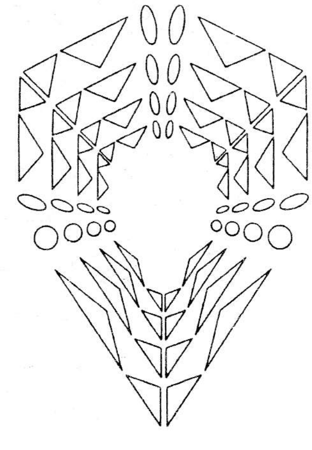


**Figure 16**



**3] Des structures géométriques n'ayant aucune symétrie mais dont le rythme visuel obéit à des progressions arithmétiques ou des progressions géomètriques :**

- Les **frises dynamisées.** L'usager peut déformer les sept classes de symétrie des frises à partir des translations dont il définit la progression. Si $t$ désigne la longueur de la première translation et $a$ un nombre réel, alors les deux progressions permises sont :
  - $t, t+a, t+2a, t+3a, \ldots$ (progression arithmétique)
  - $t, ta, ta^2, ta^3, \ldots$ (progression géométrique)
  
  *(figure 17).*

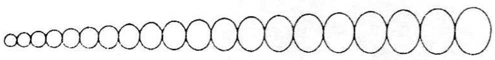
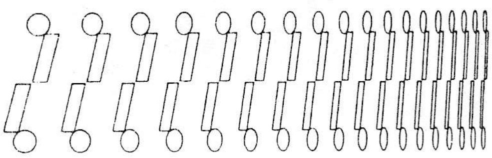


Figure 17



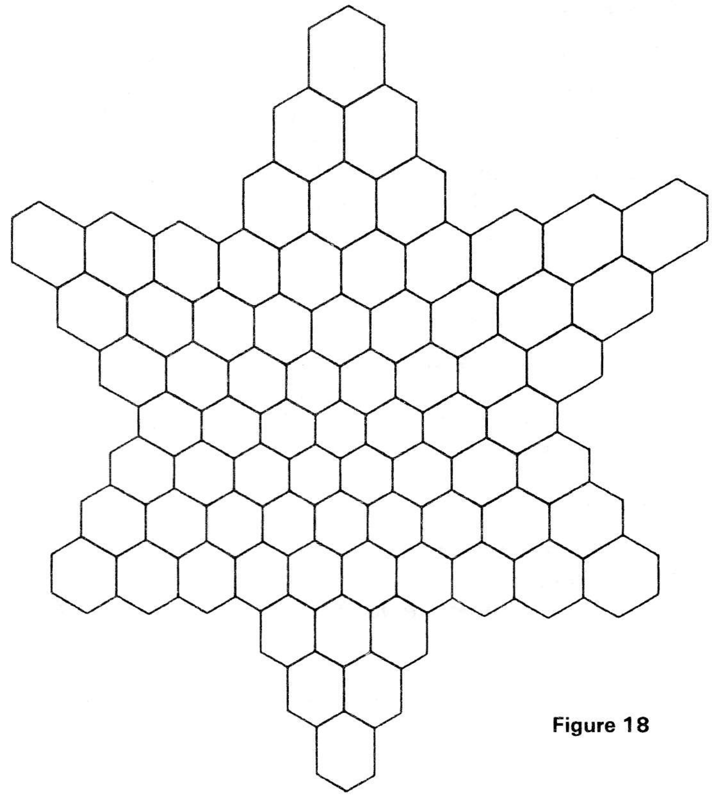
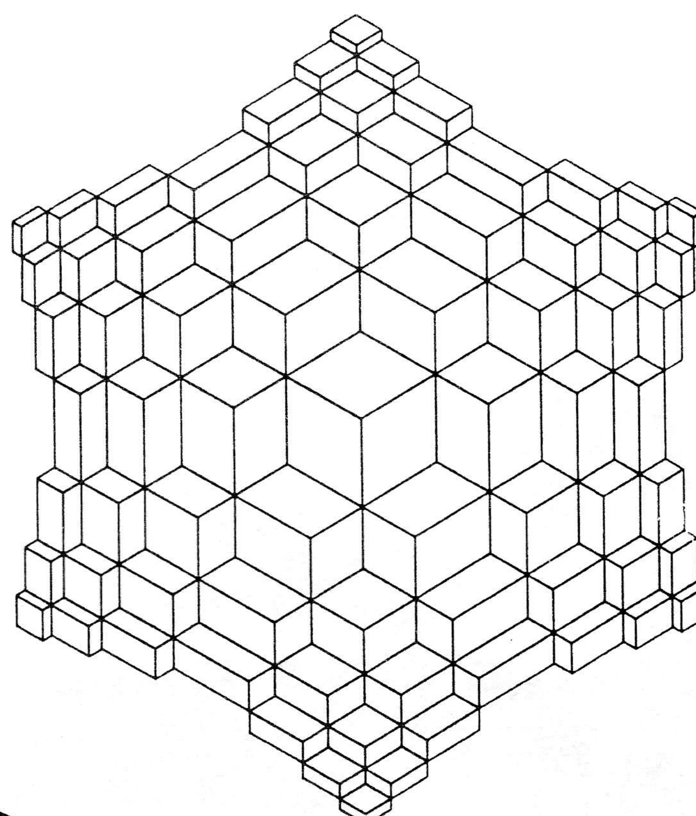


Figure 18

- Les **pavages dynamisés**. L'usager peut déformer les 17 classes de symétrie des pavages à partir de translations dont il définit la progression arithmétique ou géométrique.

  Dans le cas où le pavage est à base de parallélogrammes (ou de carrés ou de rectangles) l'usager, pour les deux directions associées aux côtés du parallélogramme, peut distinguer pour chacune, deux orientations opposées avec des progressions différentes. De même, dans le cas où le pavage est à base d'hexagones, l'usager pour les trois directions associées aux côtés de l'hexagone, peut distinguer pour chacune, deux orientations opposées avec les progressions différentes. Pour le cas hexagonal, la *figure 18* illustre des progressions différentes pour les six orientations possibles. La *figure 19* illustre des cas où les orientations opposées ont la même progression.



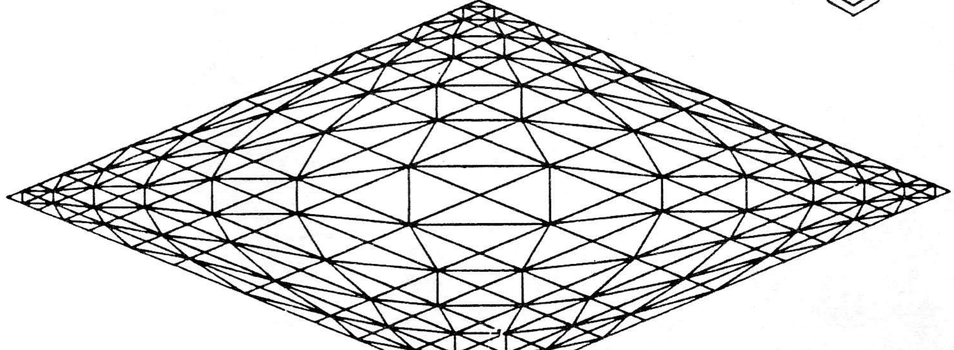


Figure 19

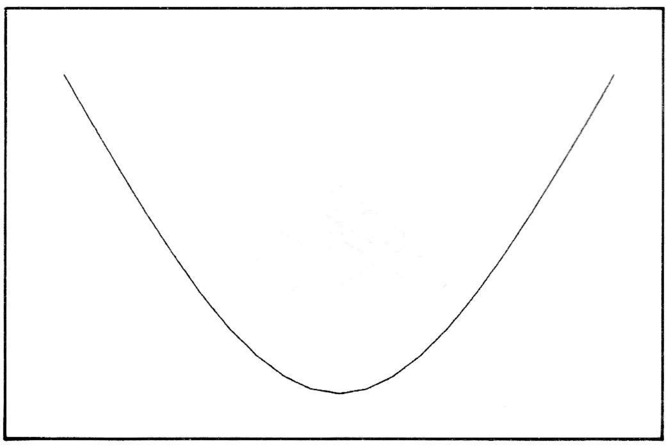
## Conclusion

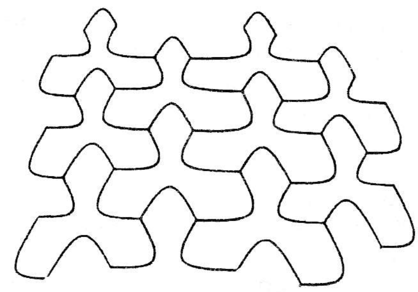
Alhambra est le premier logiciel français qui permet de créer de manière systématique une grande variété de rythmes visuels. Il est d'usage facile et ne demande aucune connaissance informatique. Le guide de l'usager par ailleurs décrit explicitement les différents types de structures géométriques qui sont à la base de ces rythmes visuels. L'usager doit cependant avoir une certaine habilité pour visualiser les raccords de lignes à partir du motif initial dans ses trajectoires subséquentes.

Les applications d'Alhambra aux métiers d'art sont évidentes mais l'objectif ultime d'Alhambra est d'ouvrir l'étude des rythmes visuels à des fins expressives.

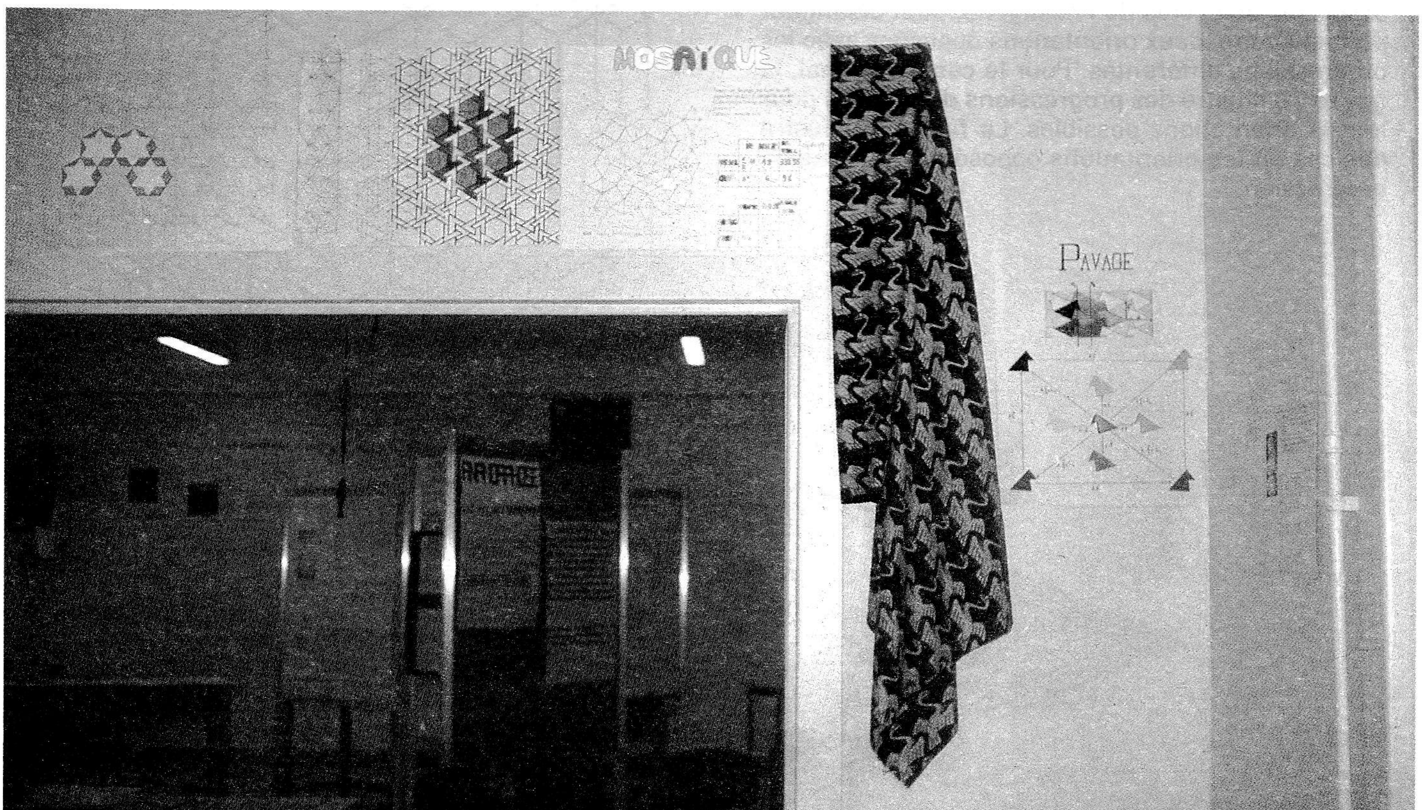
## Bibliographie

*Graphisme et Géométrie*
Michel Fleury
Presses de l'Université du Québec, janvier 1986. ■





motif pour obtenir le dessin



# LES MATHS DANS LE TRAIN ! C'EST POSSIBLE

*Georges LE NEZET - Rennes*

**LE projet est né d'une conjonction entre la direction ouest de la SNCF qui propose régulièrement des expositions régionales diverses sur la ligne PARIS-RENNES et des responsables de l'APMEP qui voulaient aller au devant d'un public extérieur au système éducatif et ainsi préparer la venue à Rennes de l'exposition Horizons Mathématiques.**
**Ce projet consistait en une exposition installée dans un wagon de la SNCF sur la ligne PARIS-RENNES.**

## Que trouvait-on dans cette exposition ?

- Des panneaux présentant des activités et productions de l'IREM et de la Régionale APMEP de Rennes.

- Quelques stands de l'exposition Horizons Mathématiques (iconographies et manipulations).

- Un nano-réseau permettant de consulter la banque "Bruyère" présentant des textes d'exercices et des tests classés par niveau, par type d'activité et par classe d'âge sur la notion de proportionnalité. Le logiciel "Bruyère" offrait, par une sortie imprimante, à chaque personne ayant "joué le jeu" du test jusqu'à la fin un bilan relatif à ses difficultés, aux obstacles qu'elle a rencontrés, aux modèles selon lesquels elle a fonctionné (par exemple le modèle additif).

- Un T07-70 permettant d'effectuer un sondage sur l'image des mathématiques et les reliquats de connaissances dans cette discipline. Tout consultant du logiciel "sondage" avait la possibilité de simuler un sondage et de rentrer ses propres réponses au questionnaire portant sur son image des mathématiques et ses reliquats de connaissances. Il pouvait contribuer ainsi à constituer un échantillon sondé dont l'extension était acquise à chaque entrée.

- Un écran de T07-70 présentant sous forme de journal cyclique l'expérimentation qui s'est déroulée dans les classes de 6e du Collège de Le Rheu pendant l'année scolaire 85/86. Cette expérimentation a porté sur l'introduction cohérente de l'outil informatique pour une approche didactique des mathématiques en complément des outils traditionnels et sur un traitement de l'hétérogénéité des élèves de 6e, grâce en partie, au langage Logo.

## Comment s'est déroulée cette exposition itinérante ?

Elle a eu lieu du 29 novembre au 5 décembre 1986 dans la voiture exposition du train-affaire qui circule entre Rennes et Paris le soir et entre Paris et Rennes le matin. Parallèlement à nos présentations se déroulait pendant une heure un spectacle musical. Deux accompagnateurs bénévoles de l'APMEP ou de l'IREM étaient chargés de la présentation et de l'animation des ateliers de l'exposition. Leur compétence n'est jamais allée, à notre connaissance, et durant le déplacement, jusqu'à accompagner les artistes bien que la réciproque ait eu lieu. Les frais d'hôtel afférents à leur déplacement étaient pris en charge par la Régionale.

La fréquentation des voyageurs a été, d'après les estimations de la SNCF, d'environ 1800 personnes. Elle est comparab le très honorablement à celle des autres expositions réalisées dans cette voiture.

## Quelles impressions ont été ressenties par les accompagnateurs ?

### Au sujet du logiciel "Bruyère"

La partie informatique créait une animation qui attirait beaucoup la curiosité. Il y avait trop peu de machines en regard du nombre de gens qui voulaient les utiliser. Les amateurs ont souvent attendu 1/4 heure, 20 minutes pour pouvoir participer. Le public était très hétérogène. Nous avons relevé deux types de personnes :

- Des personnes qui avaient déjà un point de vue sur l'ordinateur (âgés et aigris, ingénieurs ou techniciens de haut niveau), peu nombreux mais agressifs et contestataires, trouvant que c'était trop long ou pas fiable car ils auraient voulu connaître des détails de conception mais n'étaient pas près à s'investir dans les explications (trop peu de temps, pas de connaissances en didactique).

- Des personnes qui sont rentrées dans le produit, sans regard critique au préalable. Nombreux, plutôt jeunes ils se sont investis à fond et ont passé beaucoup de temps pour faire très sérieusement les exercices. Le bilan, inhabituel, n'a pas du tout semblé les décevoir. Ils ont beaucoup apprécié de repartir avec le bilan sur imprimante.

Du point de vue fonctionnement, les ordinateurs se sont bien comportés malgré les vibrations. Les téléviseurs ont eu des changements de couleur très impressionnants en certains points de la ligne.

La coupure spectacle nous a gêné car les personnes qui avaient engagé un travail n'avaient pas envie de le suspendre même avec promesse de le reprendre. D'autre part, après cette coupure, il restait trop peu de temps pour démarrer une utilisation.

## Au sujet de l'exposition Horizons Mathématiques

Ces stands ont pu être l'occasion de rafraîchir des connaissances qui s'étaient un peu évaporées ou d'explorer quelques terres inconnues tout en manipulant (bulles, tamgrans, puzzles...).

Entre le public et les enseignants chargés de l'animation, l'information ne circulait d'ailleurs pas à sens unique et les échanges de "petits problèmes" sont parfois allés... bon train. On a pu remarquer que pour des nombres pourtant comparables, les voyageurs ont été nettement et systématiquement plus nombreux et actifs dans les trains du soir (18 h - 21 h) que dans ceux du matin (7 h - 10 h) ce qui pourrait aller à l'encontre des idées reçues selon lesquelles pour faire des mathématiques il faut se lever de bon matin !!!

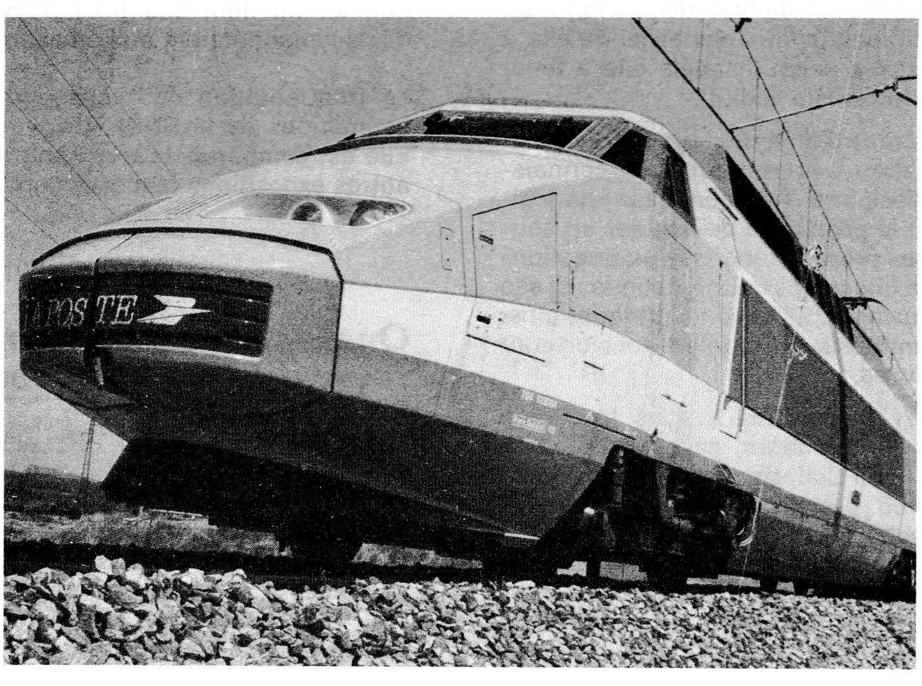
## Au sujet du sondage

Les voyageurs ont acceptés de bonne grâce de remplir le questionnaire qui leur était proposé et qui devait conpléter l'enquête réalisée par des élèves de 4e et 3e du Collège de la Guerche dans le cadre d'un P.A.E. Le questionnaire se proposait d'analyser l'image que se font des mathématiques des personnes ayant quitté le système éducatif et de tester sur quelques points le reliquat de leurs connaissances. Les voyageurs ont rempli consciencieusement leur questionnaire, et plusieurs d'entre eux se sont inquiétés de l'exactitude de leurs réponses concernant la partie connaissance.

Au cours des discussions qui se sont établies assez spontanément entre voyageurs et accompagnateurs il est apparu que les mathématiques laissent peu de personnes indifférentes. Beaucoup ont aimé ou au contraire détesté ou encore regretté de ne pas avoir eu l'occasion d'accrocher aux mathématiques, faute de conditions favorables ou d'un contexte plus motivant. Les travaux pédagogiques présentés pouvaient d'ailleurs faire illusion sur la façon dont sont enseignées les mathématiques à l'heure actuelle et, face à un trop grand enthousiasme de certains, il était nécessaire de préciser que la nouveauté et l'originalité dans les méthodes d'enseignement ne pouvaient être prises comme reflet d'une pratique générale dans les classes.

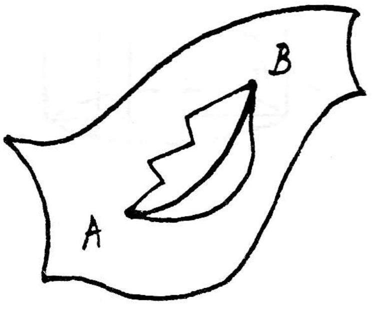
En conclusion, ce fut une expérience originale et réussie. A noter la disponibilité des gens qui s'y sont arrêtés, leur curiosité et les questions sur les mathématiques et leur enseignement actuel. Un petit regret, la majorité des voyageurs, qui ne se contentaient pas d'être passifs, était d'un niveau socio-culturel élevé (ingénieur, cadre...).

Un dernier constat : 8 jours après, la SNCF était en grève illimitée !!! Nous ne l'avons pas fait exprès !!! ■



# VOYAGE SUR GEODESIQUE... OU ENCORE LA PARESSE

*René GAUTHIER - Lyon*



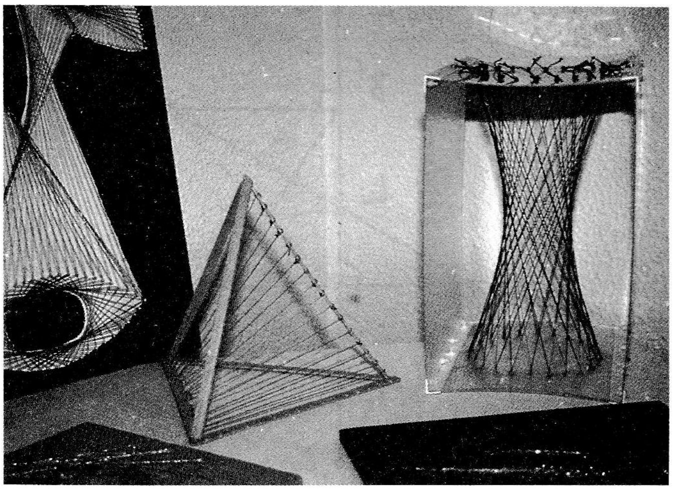

**COMMENT, sur une surface, aller d'un point à un autre par le chemin le plus court... vieux problème du paresseux, bien connu des marcheurs, certains d'entre eux au moins...**

**Jean Bernoulli, pour la première fois, se l'est posé, semble-t-il vers 1697. Son frère Jacques contesta fortement ses assertions, ce qui donna lieu à une de ces querelles scientifiques dont l'histoire des sciences est remplie. Euler formula le problème, en 1732, en termes d'équations différentielles. Newton, Gauss et Leibniz ne furent pas en reste. Ce n'est que vers 1900 que Hilbert démontra l'existence d'un plus court chemin entre deux points quelconques d'une surface "complète".**

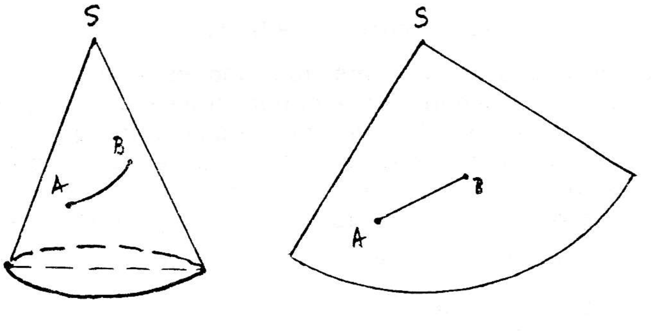
**Le bricoleur peut toujours s'armer de ficelle et de piquets et chercher ce plus court chemin de manière pragmatique...**

Si la surface est un plan, pas de problème : le segment [AB] fait l'affaire. Encore que, dans l'espace temps de la relativité, ce ne soit pas tout à fait aussi simple...

Si les deux points A et B sont deux points d'une génératrice rectiligne d'une surface réglée, pas de problème non plus : ce plus court chemin est encore le segment de droite, mais si A et B ne sont plus deux points d'une génératrice, c'est une autre histoire !



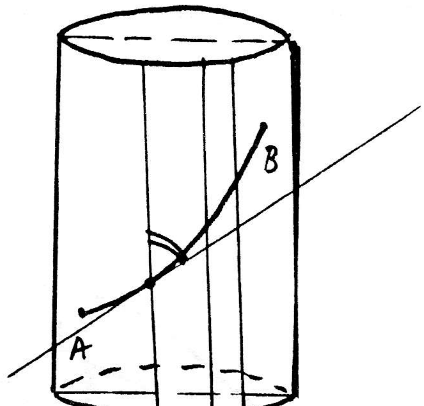
Prenez donc deux points A et B d'un cône, non alignés avec S.

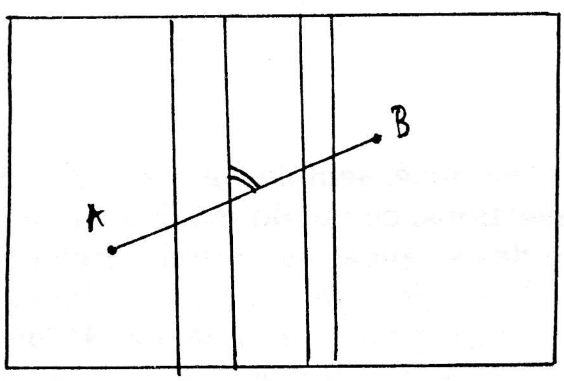



Si votre cône est de révolution, vous avez toujours la possibilité de "l'étaler" sur un plan : sur le développement, il vous reste à tracer le segment [AB], réenvelopper le tout, et vous avez sur la surface conique, le plus court chemin de A à B. C'est une courbe en forme "d'hélice conique"... Et si, par hasard SA = SB, cette courbe n'est autre qu'un arc de cercle parallèle, intersection de la surface avec le plan contenant (AB) et perpendiculaire à l'axe.

Sur un cylindre de révolution, même problème et même méthode.

Le cylindre s'applique (se déroule...?) sur un plan. Le segment [AB] tracé sur le développement vous donne la réponse.




Mais ce segment [AB] est cette fois particulièrement intéressant : il fait le même angle avec toutes les génératrices qui le coupent, propriété conservée après l'enroulement sur le cylindre : l'arc de courbe $\widehat{AB}$ admet en chaque point une tangente qui forme un angle constant avec la direction de l'axe. C'est une propriété de l'hélice circulaire bien connue de nos élèves de TC.

La ligne de plus court chemin est donc ici un arc d'hélice sur le cylindre. Rappelons au passage une représentation paramétrique d'une telle courbe :

$$M\ (x = R\cos t\ ;\ y = R\sin t\ ;\ z = kt)$$

Envisageons deux points quelconques A et B non situés sur une génératrice et non situés dans un plan perpendiculaire à l'axe. Il est facile de montrer que par ces deux points passe une seule hélice du cylindre. Pour A, on peut prendre t = o (choix du repère de l'espace) : A (R ; O ; O) B étant donné, il s'agit de trouver k et t : $B\ (x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ avec $x_1^2 + y_1^2 = R^2$

$$\cos t = \frac{R}{x_1} \text{ et } \sin t = \frac{R}{y_1}$$

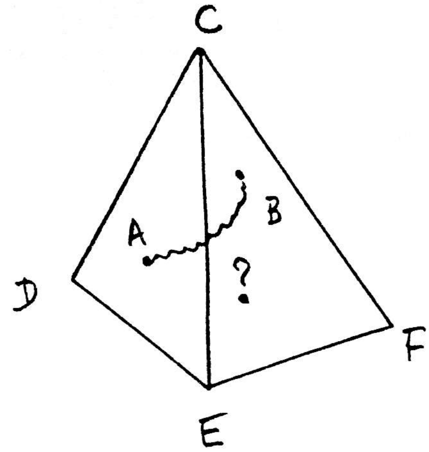
permettent de déterminer le réel t de $[0\ ;\ 2\pi]$

$k = \frac{z_1}{t}$ détermine le réel k. L'hélice est bien unique.

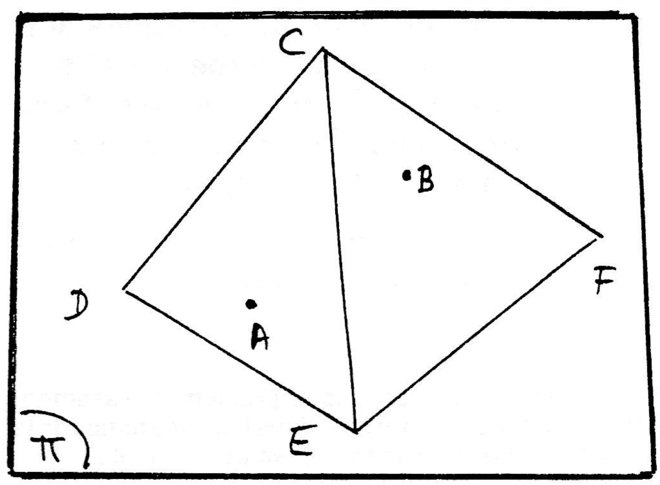
Et sur cette hélice, la longueur $\widehat{AB}$ est donnée par

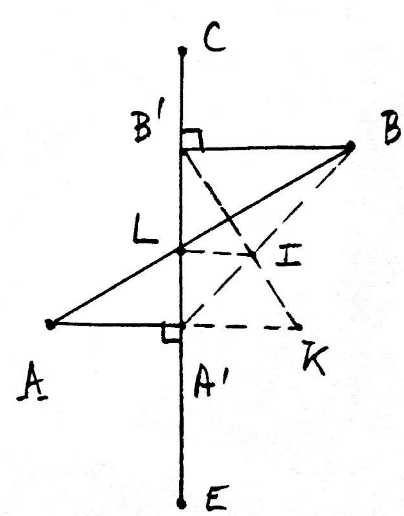
$$\int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + t'^2}\, dt \qquad \text{Soit} \quad t\sqrt{R^2 + K^2}$$

Les choses se compliquent encore dans le cas de deux points du tétraèdre.



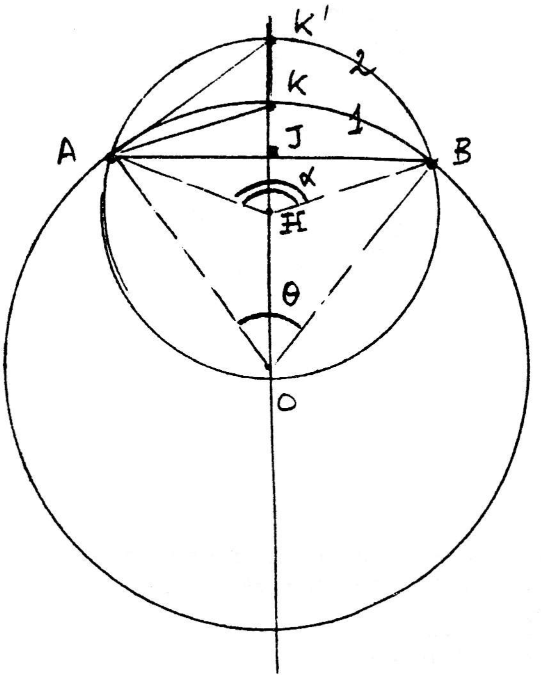

Ici, la géométrie plane va encore nous venir en aide. Etalons les deux-plans contenant les deux points sur le même plan : les spécialistes diraient que l'on rabat l'un sur l'autre. Le plus court chemin de A à B est (encore !) le segment [AB]. Le problème est alors de déterminer concrètement le point L de la frontière commune aux deux faces.



**Où est-L ?**

On utilisera pour cela les projetés orthogonaux A' et B' de A et B sur (CE). (KB') coupe (BA') en I, K étant le symétrique de A autour de (CE). Les propriétés élémentaires de la projection conduisent à constater que le projeté de I sur (CE) est précisément L, intersection de (AB) avec (CE). Voilà donc construite la ligne du plus court chemin de A à B : (ALB). Il va se soi que si la droite (AB) est orthogonale à (CE), alors L, A' et B' sont confondus. La ligne (ALB) est alors sur l'intersection du tétraèdre avec le plan perpendiculaire à (CE) contenant (AB).




**Question :**

Cherchez donc la ligne de plus court chemin entre deux points A et B situés sur deux faces opposées d'un parallélépipède...

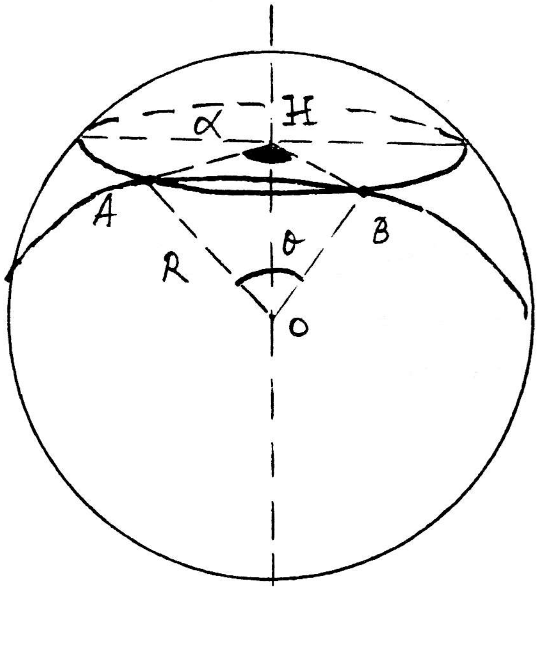
Le problème du plus court chemin peut facilement se résoudre si la surface s'étale sur un plan.
Prenons maintenant deux points d'une sphère et supposons-les non diamètralement opposés sur cette sphère.
Le plan (OAB) coupe la sphère selon un grand cercle (O,R) : sur ce cercle l'arc $(AB)_1$ est un chemin de A à B.

Dans un plan ne passant pas par le centre O, le cercle, de centre H et de rayon r, passant par A et B, détermine un autre arc $(AB)_2$ sur la sphère : c'est un autre chemin pour aller de A à B. Certes, il y a bien d'autres chemins. Contentons-nous de comparer ces deux arcs : celui **du** grand cercle et celui **d'un** petit cercle passant par A et B.

$(\widehat{AB})_1 = R\theta$ et $(\widehat{AB})_2 = r\alpha$.

On a $R > r$ mais $\theta < \alpha$ !

Il nous faut donc comparer $\frac{R}{r}$ et $\frac{\alpha}{\theta}$




Mais pour des points "voisins" A et B, l'inégalité entre les cordes : $AK < AK'$ nous convainc de l'inégalité entre les arcs : $\widehat{AK} < \widehat{AK'}$ d'où $(AB)_1 < (AB)_2$.

Pour plus de rigueur, on pourra faire appel à un paramètrage des cercles et au calcul intégral.
Le plus court chemin de A à B sur la sphère est donc l'arc $(\widehat{AB})_1$ du grand cercle (unique...) qui passe par A et B. Il va de soi d'abord, que sur ce grand cercle, il faut choisir le plus petit des deux arcs. D'autre part, si [AB] est un diamètre, vous avez le choix entre les grands cercles, qui sont plusieurs... On comprend mieux, peut-être, cette fantaisie aérienne qui consiste à passer par le pôle pour aller de Paris à Tokyo.

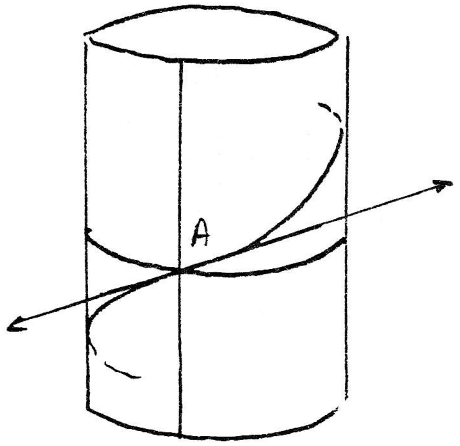
**Un peu de vocabulaire.**
Examinons toutes les courbes d'une surface passant par deux points A et B de la surface. S'il y en a une pour laquelle la longueur AB est **minimum**, on l'appelle alors la **ligne la plus courte**.

Par deux points, il se peut qu'il y ait plus d'une ligne la plus courte (deux extrémités d'un diamètre sur une sphère). Il se peut aussi qu'il n'y en ait pas, pour certaines surfaces bizarres.

Une courbe de la surface S est une **géodésique** de S si elle est la ligne la plus courte entre deux quelconques de ses points assez "proches".

Sur la sphère, les géodésiques sont les grands cercles. Sur un cylindre de révolution, les géodésiques sont les génératrices, les parallèles et les hélices. Par un point du cylindre passent une infinité d'hélices, mais il n'y en n'a qu'une dans une "direction" donnée, c'est-à-dire si l'on donne une tangente en ce point.

C'est une propriété générale d'une courbe dite "régulière" : l'unicité de la géodésique, pour toute direction, en un point régulier.




C'est le paramétrage de la courbe C tracée sur S qui conduit à la détermination de la plus courte distance de A à B.

Soit $\vec{X} = \overrightarrow{OM}(t)$ avec (x(t), y(t), z(t)) comme coordonnées de M.

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \left\| d(\vec{X}) \right\|$$

$$\text{d'où : } \widehat{AB} = \int_0^t \left\| \frac{d(\vec{X})}{dt} \right\| dt$$

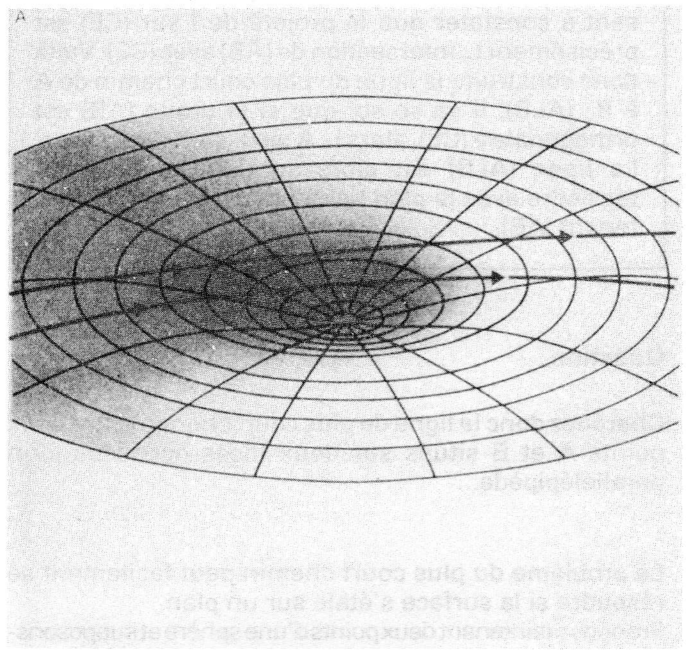
C'est donc (encore !) un problème de calcul intégral ! Mais là s'arrêtent les choses simples (si l'on peut dire...). La suite est affaire de spécialiste.
Ajoutons simplement le fait que le vecteur dérivée seconde en A, $\ddot{\vec{X}}$, se décompose en deux composantes : sur la tangente en A, $\ddot{\vec{X}}$, et sur la normale $\vec{n}$ en A.

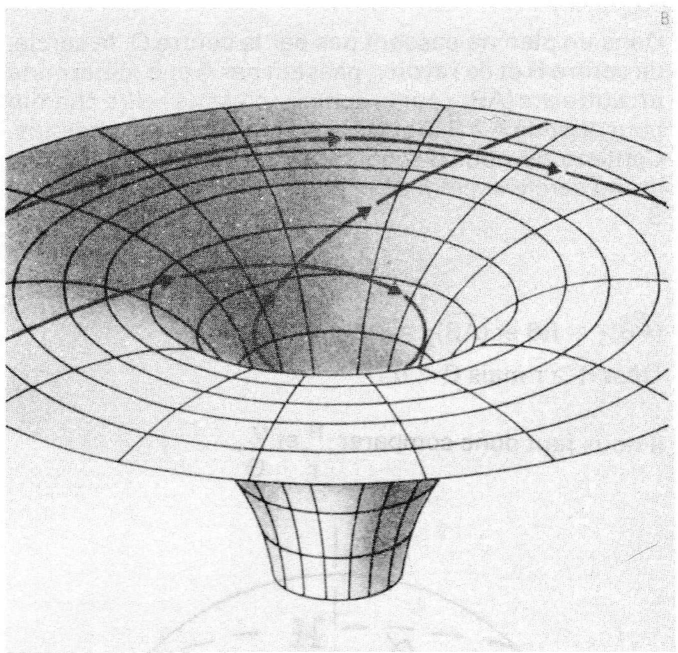
$$\ddot{\vec{X}} = \alpha \vec{n} + \beta \ddot{\vec{X}}$$

$\alpha$ donne la courbure "normale" à C en A et $\beta$ la courbure géodésique en ce point.
Une ligne géodésique est précisément caractérisée par $\beta = 0$...
Ce qui entraîne que dans ce cas, le plan osculateur à C en A contient la normale $\vec{n}$ en ce point : il est donc perpendiculaire à la tangente en A à la courbe, c'est-à-dire perpendiculaire en A au plan tangent en ce point à la surface.
C'est semble-t-il, le fin du fin pour caractériser les géodésiques d'une surface... Veuillez donc consulter vos ouvrages de spéciales.

* * *

Finalement, tout cela n'est pas très compliqué dans notre espace euclidien. Par contre, dans l'espace-temps de la relativité, vous pensez bien que tout se complique. La géodésique rectiligne naturelle n'est plus rectiligne... Tout cela est perturbé par l'existence de masses parasites, (les étoiles) ou de trous particuliers (trous noirs) qui font que, à leur voisinage, se produisent des "effets de courbures" très particuliers. Les distributions d'énergie perturbent le champ gravitationnel... et la géodésique n'est plus ce qu'elle était. ■




## Conclusion

Pour en savoir plus

- Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique

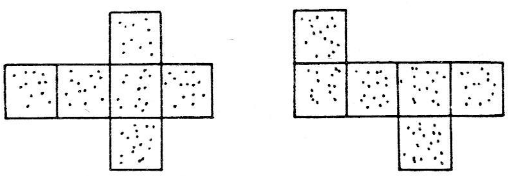
# FORMES ET STRUCTURES

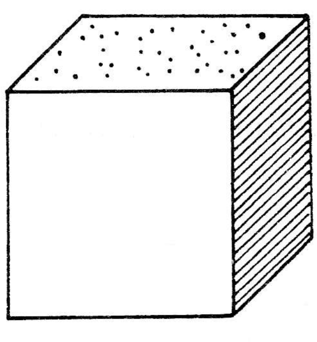
*Jacky PATRAS - Vénissieux*

## ACTIVITES d'un club de Math au Collège Elsa Triolet à Vénissieux.

### Fabriquez un cube

Il existe 11 développements différents du cube.
En voici quelques-uns.
Trouvez les autres.





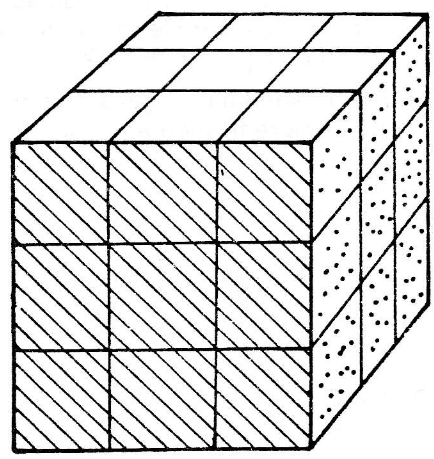
### Des cubes de cubes

27 petits cubes sont empilés pour constituer un gros cube 3 x 3 x 3.
Chaque face de ce cube est peinte d'une couleur différente : blanc, rouge, etc...
Par conséquent, certains petits cubes reçoivent 3 couleurs, d'autres deux, d'autres une seule.
Combien y a-t-il de petits cubes qui sont peints sur 3 faces ? sur 2 faces ? sur 1 face ? Combien y en a-t-il qui n'ont aucune face peinte ?

Mêmes questions pour un cube 4 x 4 x 4.

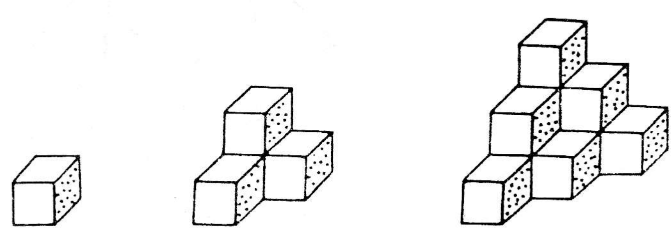
Mêmes questions pour un cube 5 x 5 x 5.

Mêmes questions pour un cube 6 x 6 x 6.



### La pyramide cubix !

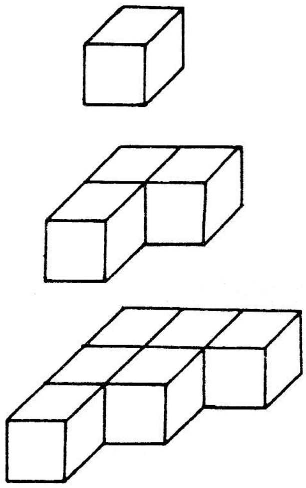
Construisons des **pyramides à base triangulaire** en empilant des cubes, comme ci-dessous :



Le nombre de cubes des pyramides successives engendre une suite de nombres intéressante : **les nombres pyramidaux**.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Hauteur de la pyramide : n | 1 | 2 | 3 | ... |
| Nombre de cubes : $P_n$ | 1 | 4 | 10 | ... |

Combien faut-il de cubes pour faire une pyramide de 4 étages ?
de 10 étages ?...



**Quelques indications pour chercher**
$P_3 = 1 + 3 + 6$

Les nombres 1 ; 3 ; 6 ; 10 ;... sont appelés **nombres triangulaires**. On peut calculer le $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire avec la formule : $T_n = n(n+1)/2$.

Chaque nombre pyramidal est égal à la somme de son précédent et du nombre triangulaire correspondant :

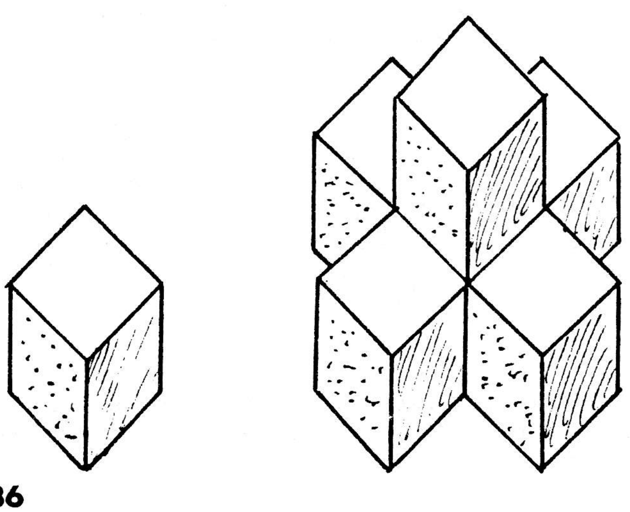
$$P_n = P_{n-1} + T_n$$

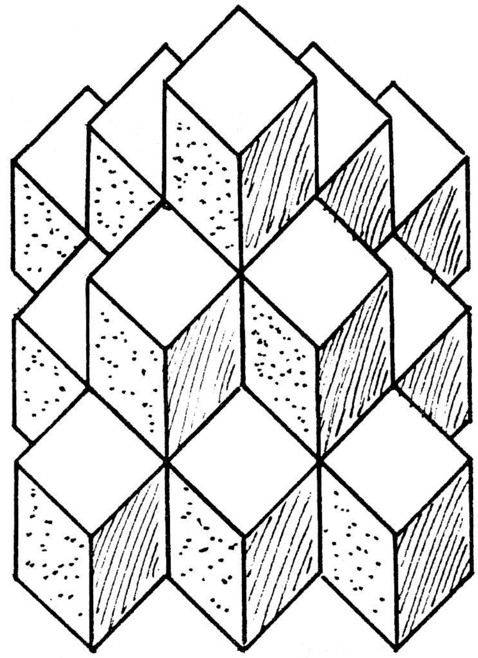
La formule permettant de calculer le $n^{\text{ème}}$ nombre pyramidal est :

$$Pn = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

## La pyramide en croix

Constructions maintenant des **pyramides à base carrée** en empilant des cubes comme ci-dessous :





Etudiez la suite de nombres engendrée par le nombre de cubes des pyramides successives.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Hauteur de la pyramide : n | 1 | 2 | 3 | ... |
| Nombre de cubes : $S_n$ | 1 | 6 | 19 | ... |

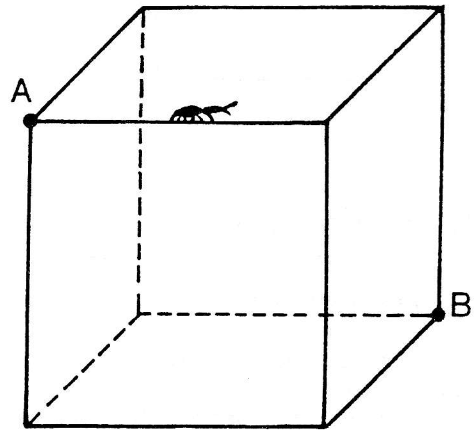
Combien faut-il de cubes pour construire une pyramide de 4 étages ?
de 10 étages ?...

**Quelques indications pour chercher**
Chaque pyramide de hauteur n est constituée de 4 pyramides à base triangulaire de hauteur n-1, et de n cubes. Donc $S_n = n + 4\,P_{n-1}$

La formule permettant de calculer le nombre de cubes nécessaires pour construire une pyramide à base carrée de hauteur n est :

$$Sn = \frac{n(2n^2+1)}{3}$$

## Promenons-nous... sur un cube



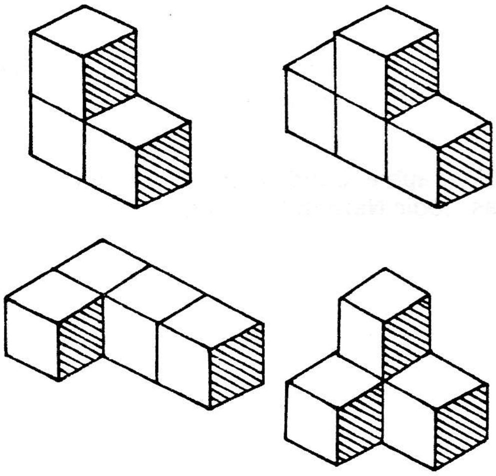

Une fourmi veut aller du point **A** au point **B** en suivant uniquement les arêtes du cube.

Combien y a-t-il de chemins empruntant 3 arêtes? 4 arêtes? 5 arêtes? 6 arêtes?... Que remarquez-vous?

Pouvez-vous trouver un chemin qui permet, en partant de A, de passer une fois et une seule par chacun des sommets et de revenir au point de départ?

Si vous avez du courage, combien y-a-t-il de tels chemins?

## Cubes SOMA-TISÉS



**Matériel :** cubes emboîtables

Les cubes SOMA sont des assemblages de forme irrégulière de plusieurs cubes (4 cubes au plus).

Il y a en tout sept cubes SOMA.

Fabriquez-les!

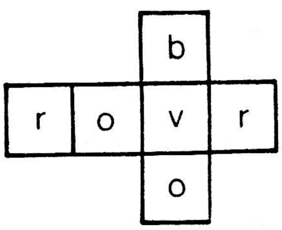
Ces cubes furent inventés par le Danois Piet Hein qui énonça le théorème suivant:

"En assemblant tous les cubes SOMA par leurs faces, on peut former un grand cube".

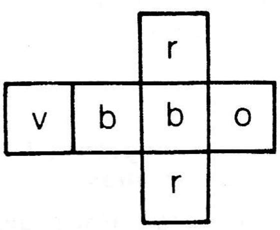
Vérifiez l'exactitude de ce théorème.

## Cubes diaboliques

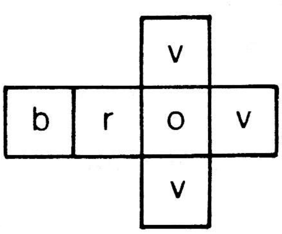
**Matériel**: construisez quatres cubes dont les faces sont coloriées de la façon suivante:



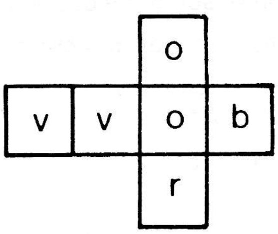

1




2




3



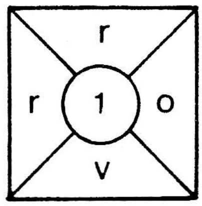

4

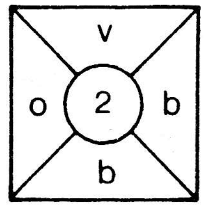
Par exemple: Bleu, Orange, Rouge et Vert.

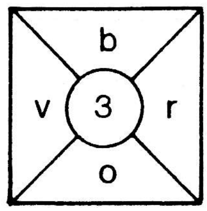
Construire une tour, ayant un cube pour base, telle que l'on voit sur chacune de ses faces chacune des quatre couleurs.

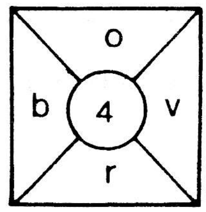
**Pour chercher**: comptez le nombre total de faces de chaque couleur. Dressez ensuite un arbre en prenant comme critère le choix de la paire de faces cachées sur chaque cube.

**Une solution :**



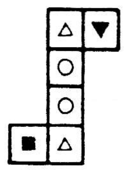



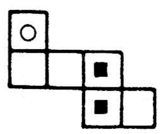




## Cubes sataniques

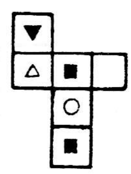
**Matériel**: fabriquez six cubes sur le modèle ci-dessous:



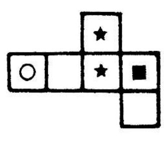
1



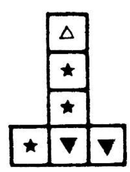
2



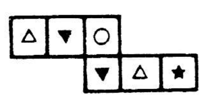
3



4



5



6

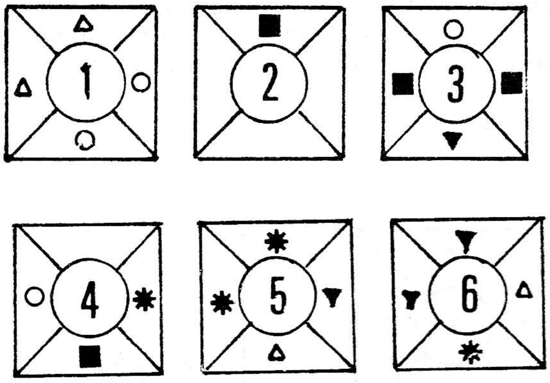
Il s'agit de construire une tour - de 6 étages - de sorte que, comme pour les cubes diaboliques, chacune des couleurs apparaisse sur chacune des faces.

Là encore, aucune règle de juxtaposition n'est à respecter.

C'est Francis GUTMACHER, de Paris, qui a conçu ce jeu dérivé du précédent.

Même méthode de recherche que pour les cubes diaboliques.

**Une solution :**




**Deux versions du jeu sont possibles :**

- soit reconstituer un cube (2 x 2 x 2) de sorte que chaque face soit unicolore. Là encore, il n'y a aucune contrainte, ni pour les faces cachées, ni pour les faces voisines qui peuvent même être de couleur identique.

Trouverez-vous plusieurs solutions ?

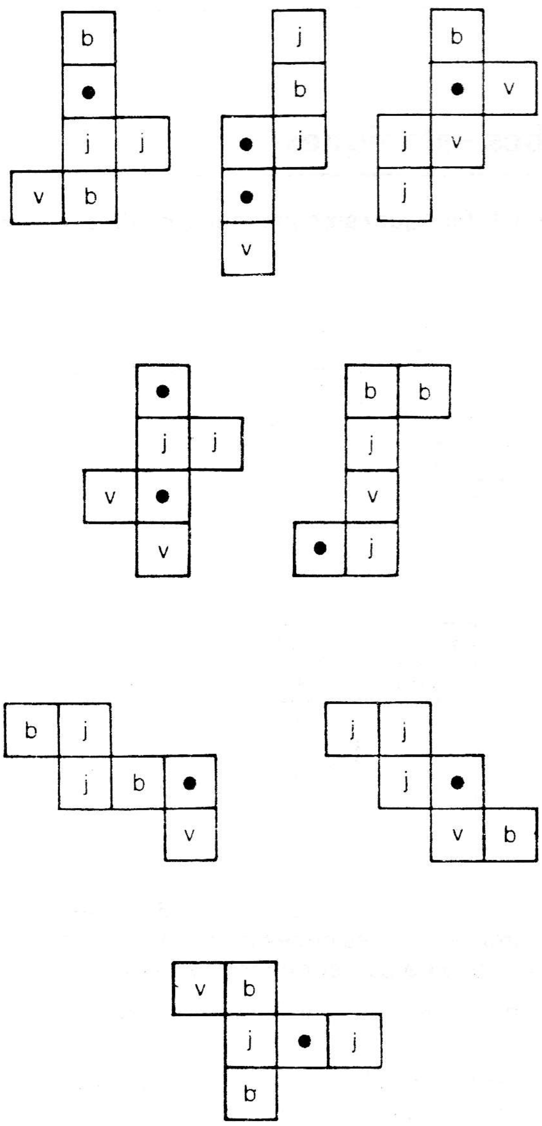
- soit reconstituer un cube (2 x 2 x 2) de sorte que les quatre couleurs figurent sur chaque face (aucune interdiction de voisinage entre les grandes faces du cube construit).

Plusieurs solutions différentes sont possibles. Saurez-vous les noter et les compter ?

Petite bibliographie : Lundi Math n° 4. Cf. PLOT dossiers. Polycubes-Cedic Nathan (distract).

## Cubes ALPHA

(jeu publié par la revue est-allemande ALPHA (RDA)




**Pour faire le portrait d'un cube**
Réunir d'abord vingt-sept cubes de bois de carton ou de polystyrène.
Et puis les assembler soigneusement pour faire un gros cube.
Peindre ensuite quelque chose sur les faces de ce cube, quelque chose qui recouvre tout le bois tout le carton ou tout le polystyrène visible.
Attendre.
Attendre que la peinture soit bien sèche.
Quand elle est sèche, enlever un à un tous les petits cubes et les donner à l'enfant.
Si l'enfant essaie de reconstruire l'objet alors c'est bon signe.
Sinon c'est mauvais signe.
Signe que le problème est mauvais.

**Questions à propos du théorème des 4 couleurs et des polyèdres.**

Combien faut-il de couleurs pour colorier un cube de façon à ce que 2 faces ayant une arête commune soient de couleurs différentes ?

pour colorier un octaèdre ? un dodécaèdre ?

Parmi les solides de Platon, quels sont ceux qui se satisfont de 3 couleurs ?

Même question pour tous les polyèdres convexes.

# A LA MANIERE DE ...

*Roger MAURIN - Le Puy*

## Les vieilles et l'eau des puits

...Il était une fois, à la lisière de la forêt, trois petites maisons habitées par trois vieilles grand-mères. Elles avaient chacune un animal favori qui ne les quittait pas d'un pouce. La première avait un brave gogol; une affectueuse pitarasse tenait compagnie à la seconde et la troisième avait apprivoisé un mizoard.

Ces grand-mères allaient tous les jours puiser de l'eau dans trois puits, non loin de chez elles. Pour ne point tarir trop vite l'un de ceux-ci, elles s'étaient entendues ainsi : Chacune irait chaque jour chercher son eau à un seul puits, chaque puits ne recevant par jour qu'une seule visite. Pour qu'il n'y ait pas de jalousie, elle changerait de puits tous les jours.

Hélas ! C'est de là que surgit le problème !... En effet vous n'êtes pas sans savoir que les gogols sont friands de pitarasses; que mizoards et gogols ne peuvent se rencontrer sans qu'une bataille en règle s'ensuive; qu'une pitarasse à la seule vue d'un mizoard se transforme en furie. Bref, il était hors de question qu'une rencontre fortuite puisse se produire entre deux quelconques des vieilles dames, accompagnées de leur animal favori, sur le chemin menant d'une maison à un puits.

Il fallut donc toute l'astuce et l'imagination des trois grand-mères pour trouver pour chacune d'elles trois chemins conduisant de sa maison aux trois puits, aucun chemin n'en recoupant un autre...

Pouvez-vous à votre tour être aussi malin qu'elles et trouver la solution de ce crucial problème ?

Si vous ne voyez pas, laissez-nous vous souffler que ces trois vieilles vivaient peut-être sur la planète TORA...

## Le problème des 3 puits et 3 maisons résolu par la Tortue du TO 7

```
POUR DESSIN
CT
FCC 1 LC FPOS [-80 50] BC CARPL
FCC 7 LC FPOS [80 50] BC CARPL
FCC 0 LC FPOS [-80 0] BC CARPL
FCC 7 LC FPOS [80 0] BC CARPL
LC FPOS [-80 -50] BC CARPL
LC FPOS [80 -50] BC CARPL
FIN

POUR CARPL
REPETE 5 [AV 5 TG 90 AV 1 TD 90 RE 5]
FIN

POUR TRACE 1
LC FPOS [-80 -50] FCC 7 BC
TRA TRB TRC
FIN

POUR TRACE 2
LC FPOS [-80 0] FCC O BC
TRA TRD TRB
FIN

POUR TRACE 3
LC FPOS [-80 50] FCC 1 BC
TRA TRD TRE
FIN

TAPEZ SUCCESSIVEMENT :
ENR
ME 1
DESSIN
TRACE 1
TRACE 2
TRACE 3

POUR TRA
TD 90 AV 158 RE 158 TG 90
FIN

POUR TRB
TG 72.5 AV 165 RE 165 TD 72.5
FIN

POUR TRC
TG 58 AV 187 RE 187 TD 58
FIN

POUR TRD
TD 107.5 AV 165 RE 165 TG 107.5
FIN

POUR TRE
TD 58 AV 187 RE 187 TG 58
FIN
```

ou construire une procédure qui fait tout cela :

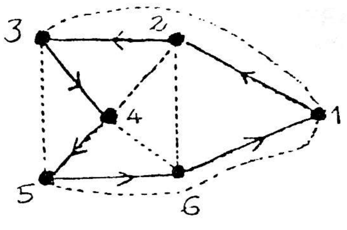
```
POUR IMAGE
ENR ME 1 DESSIN
TRACE 1 TRACE 2 TRACE 3
FIN
```

et le problème est réglé !

# La ballade d'Arthur à travers les polyèdres -

Arthur, voyageur de l'espace, visite les planètes du système POLYEDRE. Sur chaque planète, il va de ville en ville (sommets) en empruntant les routes (arêtes) et en longeant les pays (faces).

Lors de chaque voyage, il envoie à son épouse une carte de la planète explorée sur laquelle il indique le trajet qu'il emprunte pour aller de ville en ville.

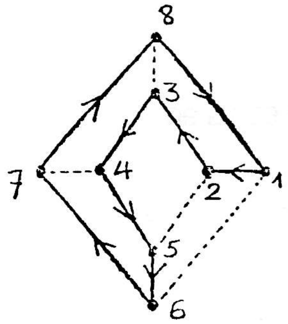


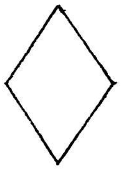
routes --------
et
trajet ——>——
sur une planète du
système POLYEDRE

Quand Madame Arthur reçoit une lettre, elle ouvre son atlas planétaire et s'efforce de retrouver sur quelle planète son cher époux voyage. Pour commencer elle compte les pays, les routes et les villes et elle applique la formule d'un mathématicien de ses amis : $S + F = A + 2$, mais il lui manque toujours un pays dans ses calculs.

Quand Madame Arthur a des doutes sur la provenance du courrier, elle examine avec soin les tampons utilisés par la poste interplanétaire :

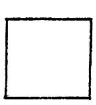
Elle a ainsi reçu la même carte dans 2 enveloppes différentes, sur l'une des enveloppes, il n'y avait qu'un tampon : un losange !

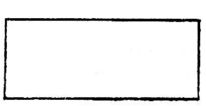




Son mari travaillait sur un rhomboèdre !

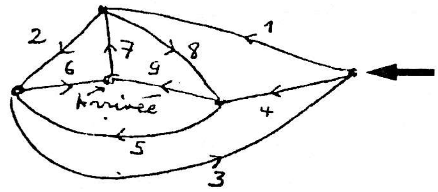
Sur l'autre enveloppe, elle eut la surprise de découvrir 2 empreintes : 1 carré et 1 rectangle.



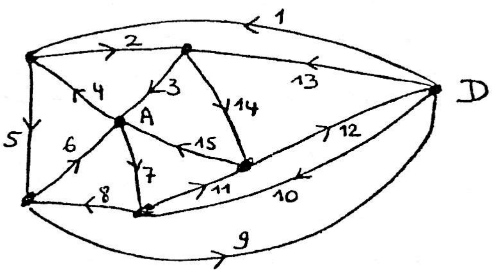


Il s'agissait d'un banal pavé droit.

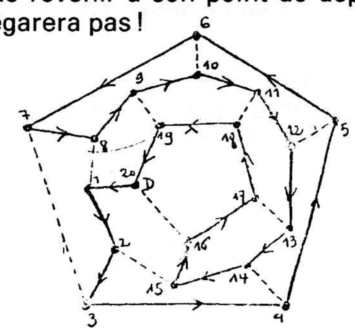
Madame Arthur s'intéresse aux différents itinéraires possibles sur une planète donnée et elle se rend compte que sur certaines planètes, l'hexaèdre par exemple, il est possible de parcourir toutes les routes sans passer 2 fois sur la même.




Un tel itinéraire est également possible sur le décaèdre.

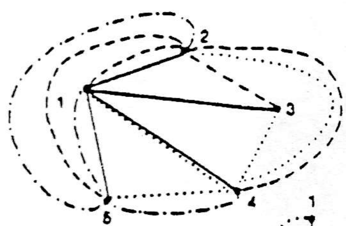


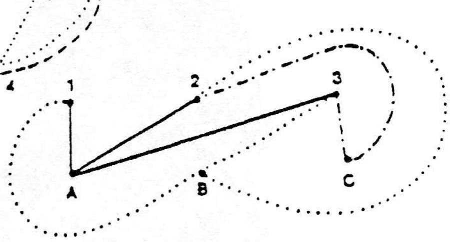
Par contre, cet itinéraire n'est pas possible sur un dodécaèdre et c'est tant mieux, car les clients d'Arthur ne sont pas sur les routes mais dans les villes, aussi son épouse lui à fait parvenir pous sa prochaine visite sur le dodécaèdre un plan qui lui permettra de se rendre dans toutes les villes sans passer 2 fois dans la même et de revenir à son point de départ. Espérons qu'il ne s'égarera pas !



# Problèmes insolubles

*Dépêche AFP - 1983*





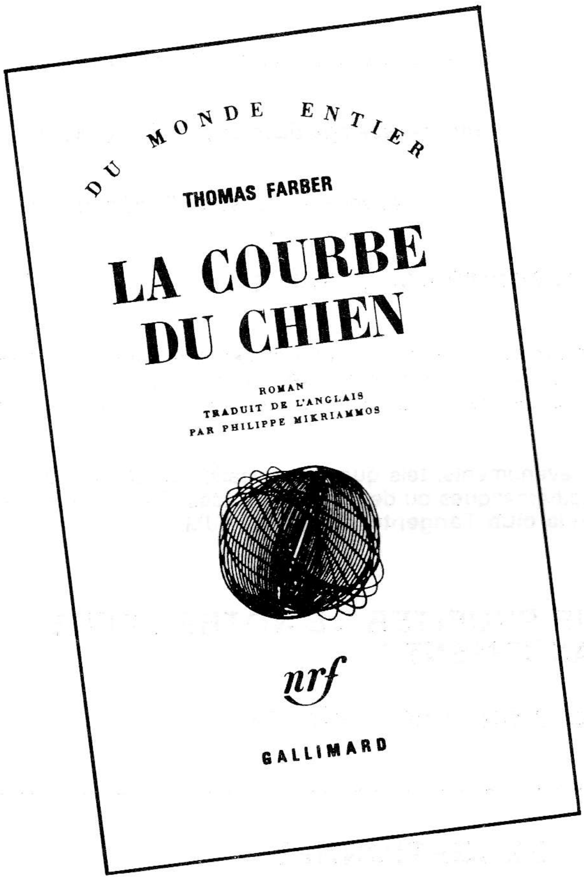
Ces deux graphiques sont les deux représentations les plus simples de problèmes insolubles : tous les points ne peuvent être reliés sans que les liaisons se croisent.

Dans celui du haut, par exemple, il est impossible de relier le point 5 au point 3 sans que les traces de liaison ne se coupent.

En bas, c'est le point 1 qui ne peut être relié à C sans croiser un tracé déjà esquissé.

Ces configurations sont les plus favorables, on ne peut faire mieux. Elles ont longtemps représenté des "figures élémentaires" de base, leur présence constituant un gage d'insolvabilité du problème de connection. ■

# A-PLOT-STROPHE



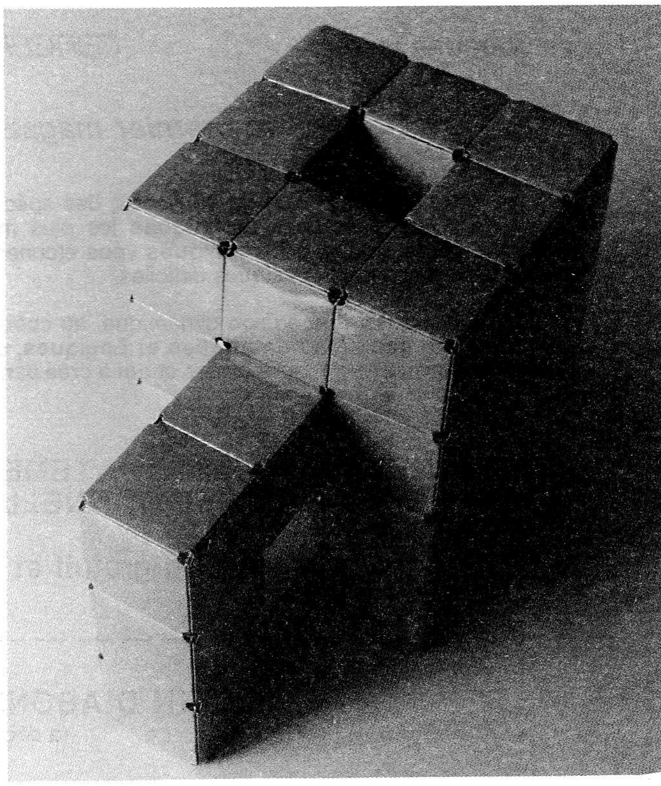

Vous avez bien lu, il s'agit d'un **roman**, construit sur le principe géométrique des courbes de poursuite : une courbe est décrite par un point (le chien) qui se déplace en ligne droite vers un second point (le maître) qui lui même est en mouvement selon une loi propre (pour plus de détail voir PLOT n° 34 ou Publication IREM d'Orléans n° 25. Démarches algorithmiques en classe de mathématiques).

Prenons pour "points" deux individus, on peut imaginer les possibilités d'amour, de nécessité de désordre qui naissent entre eux sous l'effet des contraintes, des lois qui les unissent.

On retrouve donc les mathématiques comme outil de création artistique ; ou peut rappeler (sans être exhaustif) :
parenthésage : le manuscrit trouvé à Savayone-Potocki
topologie : la vie Mode d'emploi-Pérec
combinatoire : un conte à votre façon
cent mille milliards de poèmes - Queneau

Tous les travaux péri-mathématiques de l'oulipo (voir PLOT 30 p. 28).

Avec le matériel "polyèdres" du PLOT, vous avez certainement réalisé une belle collection de solides géométriques... Mais vous est-il arrivé de construire des objets topologiques ? Voici à titre d'exemple, un modèle homéomorphe... à une bouteille de Klein !



C'est là une des nombreuses idées qui jalonnent le livre publié chez Belin sous le titre : "expériences de topologie", traduction française de l'ouvrage de Stephen Barr "experiments in topology" paru en 1964. Cet ouvrage de vulgarisation est avant tout une promenade à travers des notions topologiques essentielles par l'intermédiaire d'observations et de manipulations de modèles (à vos papiers, ciseaux et colle...!) : bande de MOEBIUS, bouteille de KLEIN, tore, plan projectif, etc... et par la considération de problèmes célèbres : coloration des cartes, ponts de Koenigsberg... tout cela à la manière de l'expo "Horizons Mathématiques" ; le chapitre X : "continuité et discrétion" m'a paru beaucoup moins intéressant ; il reprend en effet des considérations générales bien connues par ailleurs. De même l'intention déclarée des traducteurs : "cet ouvrage constitue une étape nécessaire vers une lecture freudienne de l'inconscient avec la topologie que Jacques Lacan a introduites dans son enseignement" (p. 191), ma laissé perplexe ; par ignorance certainement. Hormis cela, les expériences topologiques proposées par Stephen Barr sont passionnantes et ne peuvent laisser indifférent le prof de maths qui trouvera là des tas d'idées à exploiter en formation. ■

R. Torrent

# LES ALEAS DE L'ALEATOIRE

*Gérard LAVAU - Mesnil-Esnard*

**DANS le n° 37 du PLOT, de Décembre 1986, consacré à un dossier aléatoire, j'ai relevé page 12 une erreur assez importante ; voici le texte en question :**

**"Un tour à faire le jour anniversaire :**

**Il est né ! C'est un garçon ou une fille ? Peu importe ! Pour célébrer cet heureux événement, vous organisez une fête qui réunit une trentaine d'amis.**

**Vous pouvez parier sans grands risques que dans l'assemblée, il y a au moins une personne qui est née le même jour que votre enfant ! (...)"**

On peut relever dans ce texte une confusion entre deux énoncés classiques :

**Enoncé 1** : Soit un groupe de n personnes. Quelle est la probabilité qu'une au moins de ces personnes soit née un jour J donné ?

**Solution** : on cherche la probabilité de l'événement contraire ; aucune personne n'a son anniversaire le jour J. Cette probabilité est de 364/365 par personne, soit $(364/365)^n$ pour les n personnes.

La probabilité cherchée est donc de $1 - (364/365)^n$.
Pour $n = 30$, on trouve environ 0,079 ce qui est très peu.
C'est pour $n = 253$ que la probabilité dépasse la valeur 1/2.

**Enoncé 2** : Soit un groupe de n personnes. Quelle est la probabilité que deux au moins aient leur anniversaire le même jour ?

**Solution** : On cherche la probabilité de l'événement contraire ; les n personnes ont leur anniversaire des jours différents. Cette probabilité est $A^n{}_{365} / 365^n$ où $A^n{}_{365}$ est le nombre d'arrangements de n objets parmi 365.

La probabilité cherchée est donc de $1 - A^n{}_{365} / 365^n$.
Pour $n = 30$, on trouve environ 0,71.
C'est pour $n = 23$ que la probabilité dépasse 1/2.

Il semble donc que le PLOT ait voulu proposer l'énoncé 2 avec sa solution toujours surprenante pour qui ne l'a jamais rencontrée (l'expérience peut être tentée avec succès dans la plupart des classes actuelles), mais par inadvertance, c'est l'énoncé 1 qui est paru.

*A la manière de Barthélémy Gauthier, caricaturiste saintongeais qui réalisa de délectables gravures de ses contemporains, notre collègue Joël Méchain, instituteur à Périgny, a dessiné pour nous ce charmant tableau.*

La conclusion correcte est donc :

Dans la trentaine d'amis, il y a de bonnes chances que deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour, mais c'est assez peu probable que ce soit justement avec votre enfant !!!


*M. et Mme Emory Harrison dans le Tennessee, aux USA, avec leurs 13 fils. Il y a une chance sur 8192 pour que les 13 enfants soient tous des garçons.*

**Une rencontre aléatoire.**
Braga, Mai 1987, un restaurant portugais, un homme de loi, Dr Arthur Marques, avocat comme Fermat, mais loin des mathématiques. Une expo de Maths, est-ce possible !!!

Entre l'entrée et le plat du jour.
- J'ai 24 frères et sœurs !
- 24 ??? est-ce possible ?
et combien de filles ? combien de garçons ???
- 23 garçons - 2 filles sans élever la voix (l'homme de loi parfait)
- 23 garçons !!! et dans quel ordre ???
(que pouvais-je attendre comme "désordre")
- 22 garçons - une fille - un garçon - une fille !!!

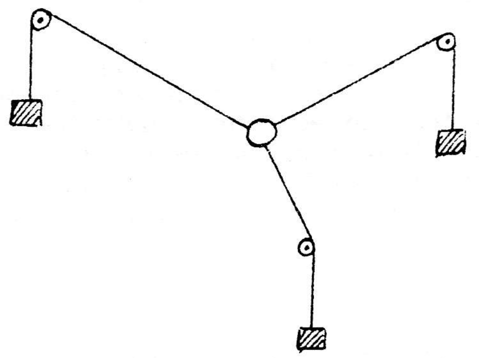
M. et M^me^ John O'Donoghue de Belfields, en Australie, avec neuf de leurs dix filles.

# EQUILIBRE D'UN CORPS QUASI PONCTUEL

*Dominique GAUD - Yves CACOUGNOLE - POITIERS*

## Expérience :

Expérience classique de l'étude de l'équilibre d'un corps de petites dimensions (anneau) soumis à 3 forces réalisées par des systèmes poulie et poids tenseur.



Cas particulier : l'une des forces est verticale (pas de poulie).

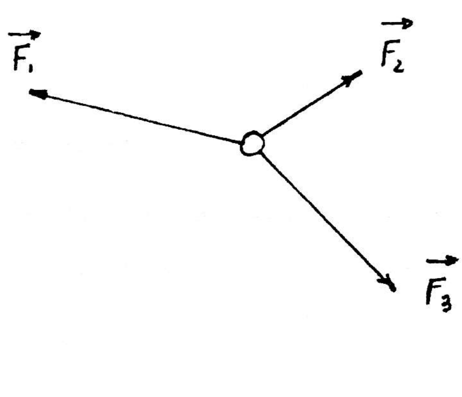
## Etude de l'équilibre

**1 - Description des forces :**

L'anneau est soumis à 3 forces exercées par les 3 fils.
Pour chaque force, orientation : celle du fil
intensité : celle du poids tenseur

**2 - Représentation des forces**

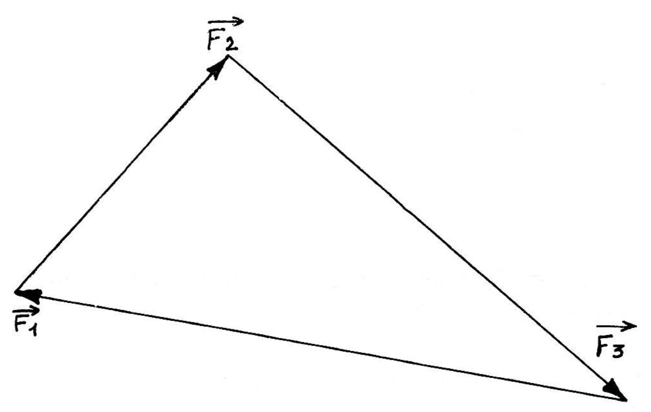
a) représentation graphique :
flèche - origine O
- orientation : celle du fil
- longueur : proportionnelle à celle du poids tenseur




b) représentation mathématique : point secteur (O, $\vec{F}$)

**3 - Condition d'équilibre**

a) Formulation graphique : polygone des forces fermé.




b) Formulation mathématique :
Somme des "vecteurs-forces" nulle

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{O}$$

## Exercice de géométrie (graphique)

La position des 3 poulies étant imposée, et les 3 poids tenseurs étant connus, trouver la position d'équilibre de l'anneau.

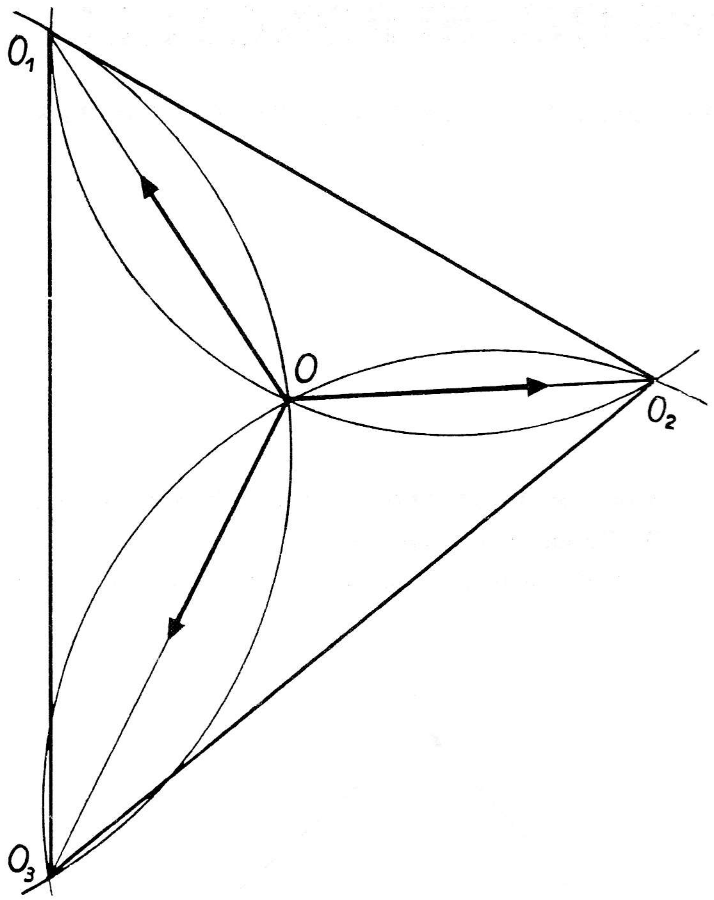
L'intensité des 3 forces étant connue, les angles que font entre elles les forces (les fils) sont imposés.

Les angles étant connus, la position d'équilibre de l'anneau se trouve à l'intersection des 3 arcs capables correspondant aux angles connus et construits à partir des positions $O_1$ $O_2$ $O_3$ des poulies.

**Exemple de construction de la position d'équilibre**

$O_1$ $O_2$ $O_3$ : Position des 3 poulies;
3 poids tenseurs identiques (3 forces de même intensité).

On obtient le point de Fermat dans le cas de 3 masses identiques.

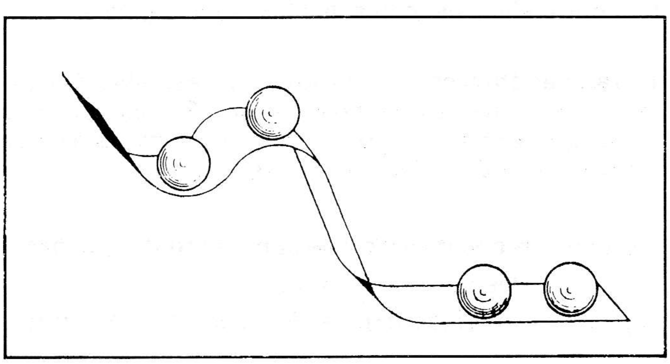



Extrait de Vilenkiem et Cie - Quelques applications des maths - éditions Mir 75 :

**Principe du Minimum de l'énergie potentielle**

Toute masse élevée à une certaine hauteur est susceptible en tombant de fournir un travail, i.e. elle possède de l'énergie potentielle. Du cours élémentaire de physique on sait qu'un corps de poids q placé à une hauteur h a une énergie potentielle qh. Nous voyons que pour un corps donné plus h est petit plus l'énergie potentielle est faible. L'énergie potentielle a toujours tendance à diminuer, c'est pourquoi tout corps pesant tend à occuper sa position la plus basse. Si ce corps est attaché à un fil, à sa position la plus basse son énergie potentielle sera minimale. C'est pourquoi la proposition (A), capitale dans la démonstration des théorèmes relatifs aux tangentes et selon laquelle à l'état de repos tout corps pesant occupe sa position la plus basse, est équivalente à la proposition suivante :

(U) Si un solide se trouve en état d'équilibre, son énergie potentielle prend sa valeur minimale.



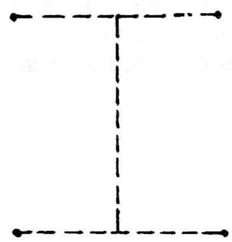
La proposition (U) (et donc la proposition (A)) est à son tour une conséquence de la proposition (E) relative à l'unicité de l'état d'équilibre et de la proposition suivante :
(D') Si l'énergie potentielle d'un solide prend sa valeur minimale, celui-ci se trouve en état d'équilibre.
Pour déduire (U) il suffit de remarquer que si à l'état d'équilibre l'énergie potentielle n'était pas minimale, en vertu de (D') il existerait un autre état d'équilibre qui correspondrait à la valeur minimale de l'énergie potentielle ; or, cela contredit la proposition (E).
La proposition (D') est un cas particulier d'un principe général de la mécanique appelé principe du minimum de l'énergie potentielle ou encore principe de Dirichlet.
Le principe de Dirichlet s'énonce comme suit :
Si l'énergie potentielle d'un système est minimale, celui-ci est en état d'équilibre.
Si cet état d'équilibre est unique, le principe de Dirichlet admet une conséquence importante :
L'énergie potentielle du système en état d'équilibre est minimale.
Cette conséquence se déduit comme la proposition (U).
Dans la suite nous ne considérerons que les cas où l'état d'équilibre est unique (d'autres cas sont éventuellement possibles ; ainsi, sur la figure on voit que la boule possède quatre états d'équilibre).
Il n'y a certes plus lieu de recourir au principe du minimum de l'énergie potentielle pour résoudre les problèmes relatifs aux tangentes; le fait que le solide pesant occupe sa position la plus basse est évident en soi. Cependant dans nombre de cas lorsque nous avons affaire non plus à un seul mais à plusieurs solides liés entre eux, il est incorrect d'affirmer qu'en état d'équilibre chacun d'eux occupe sa position la plus basse ; dans ce cas il importe de définir l'état de tous les corps, et pour cela il est souvent commode d'intro duire la notion d'énergie potentielle.

## Mathématiques et physique

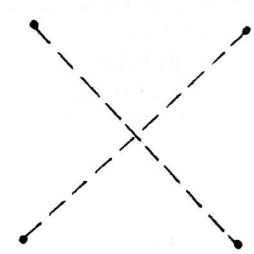
Quatre fermes sont situées en chacun des sommets d'un carré. Le conseil municipal propose de construire des routes qui les relient entre elles... et bien sûr le projet le plus économique sera retenu !

**Solution intruitive**

1 unité



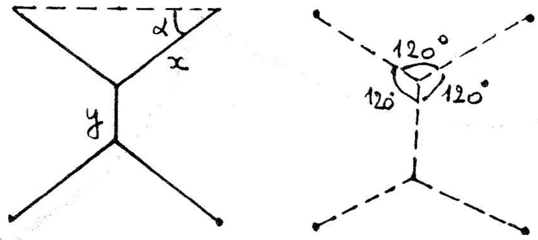
longueur obtenue : 3 unités



longueur obtenue $2\sqrt{2}$ unités

Comment savoir s'il existe un projet plus économique ?

L'étude du problème peut se faire de manière théorique.




- posons $F(\alpha) = 4x + y$ avec $0 < \alpha < 45^\circ$
On peut alors étudier le minimum de cette fonction F, en écrivant x et y en fonction de $\alpha$.

$x = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$ $\quad y = 1 - \tan\alpha.$

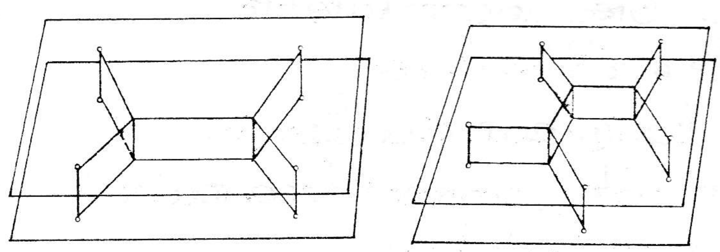
d'où $F(\alpha) = \dfrac{2}{\cos\alpha} + 1 - \tan\alpha \Leftrightarrow F(\alpha) = 1 + \dfrac{2 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$

$F'(\alpha) = \dfrac{2\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha}$ avec $\cos\alpha \neq 0$

$F'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \quad \alpha = 30^\circ.$

Ainsi le projet le plus économique sera :

$F(30^\circ) = 1 + \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < 3.$



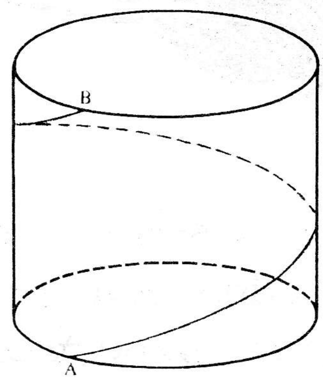

*Passage de 4 à 5 fermes*

Savez-vous que c'est ainsi que les abeilles construisent leurs alvéoles ?

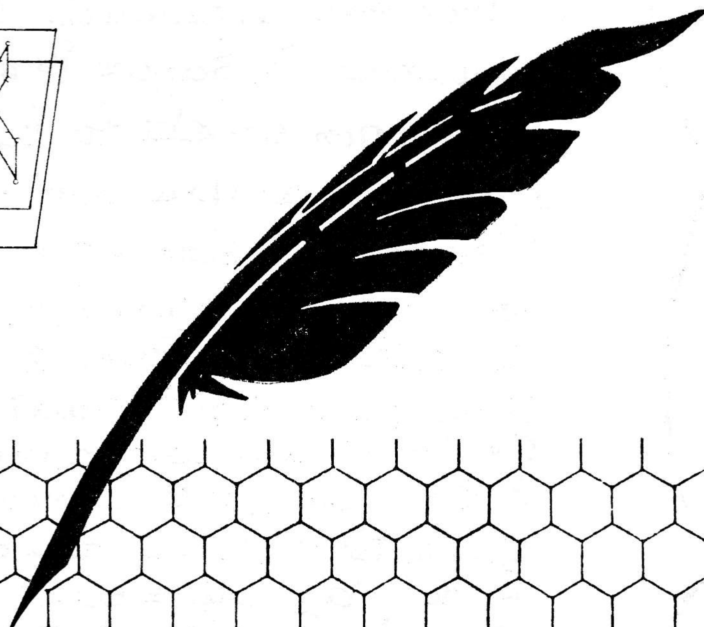
La Nature est Paresseuse !!!

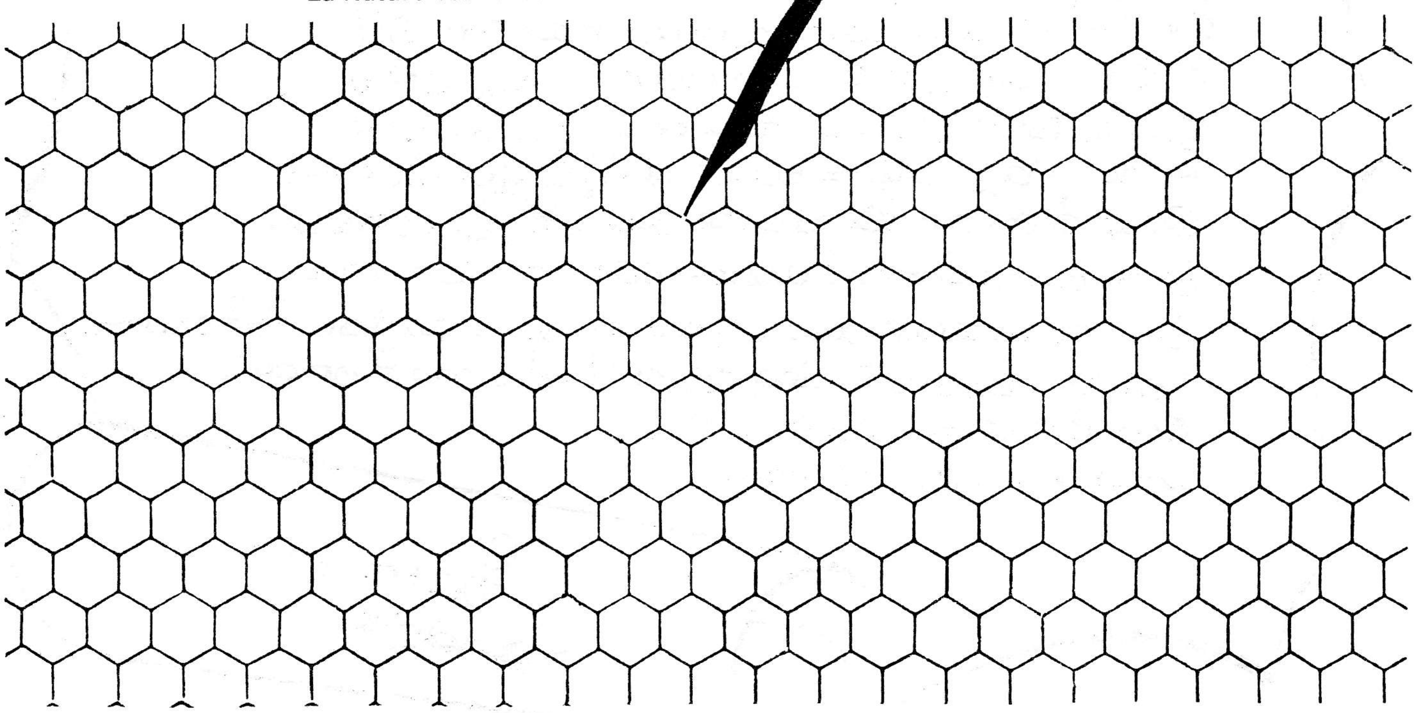
## La spirale et la fourmi

1987 - Une fin d'année en seconde. Une élève (Farrugia Sandrine) face à un exercice - type manuel scolaire -Dimathème - quand la poésie s'empare des maths. Envoyé par C. Frattini - Lycée Carnot - Cannes.




Les mesures seront données en centimètres.
Du cylindre étudié, dix est le diamètre
Et la hauteur AB est de onze et demi.
Du point A au point B chemine une fourmi,
Mais elle ne veut pas, en ligne droite, aller :
Elle a choisi de suivre un chemin spiralé.
C'est à 0,001 près...,
Que vous calculerez la longueur du chemin,
Et les explications que vous apporterez
Pourront, si vous voulez, être en alexandrins.





# La spirale et la fourmi

Voici la solution, en vers de douze pieds;
Ainsi donc nous cherchons, du chemin emprunté
Par la dame fourmi, la longueur convenue
Nous fiant aux données sans savoir rien de plus.
Nous allons tout d'abord le cylindre couper:
Un rectangle apparait; l'ouvrage achevé
La spirale fait place à une diagonale
Et là nous décelons, vraiment sans aucun mal
Deux triangles rectangles, là où est applicable
Le théorème unique du Grec incomparable
J'ai nommé Pythagore, le mathématicien
Qui va nous révéler la longueur du chemin.
Il nous manque un côté, comment le calculer?
Il est tout simplement le cercle déployé.
Nous savons le diamètre, déduisons le rayon
Puis calculons le tour, égal à $2\pi R$,
Trente et un virgule quatre, cet outil on s'en sert:
On l'élève au carré, comme l'autre côté.
Et les deux ajoutés donnent l'hypoténuse,
Ou plutôt le chemin, lui aussi au carré.
Il ne s'agit alors sans employer de ruse
Que d'avoir la racine du chiffre obtenu;
Et on aura trouvé alors, comme convenu
La longueur du chemin qu'arpentait la fourmi
soit 33 quarante cinq, les calculs me l'on dit;
Quatre et six après cinq,
pour plus de précision!

Farrugia
Sandrine