DE HERON A NEWTON

Michel CLINARD - Orléans

PETITES réflexions sur une méthode itérative pour approcher une racine à toute vitesse.

De quoi s'agit-il ?

Héron : Dans le livre I d'Héron d'Alexandrie (75-150 après J.C.), on trouve un moyen d'approcher les racines carrées en considérant des rectangles de même aire que l'on rend «de plus en plus carrés» grâce à l'algorithme suivant :

- On considère un rectangle d'aire A ; x est la mesure de l'un des côtés (l'autre mesure alors A/x).
- Calculer la moyenne arithmétique des côtés : 1/2 (x + A/x).
- Considérer le nouveau rectangle d'aire A dont l'un des côtés a pour mesure la moyenne précédente.
- Réitérer la démarche en allant en 2.

A la limite, on obtient un carré de côté $\sqrt{a}$ car la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$$

converge vers $\sqrt{A}$ pour n'importe quelle valeur initiale x_0 strictement positive.

Cette méthode d'approximation était déjà connue des Babyloniens.

La suite récurrente associée à l'algorithme de Héron converge.

La suite récurrente est définie par $x_0 > 0$ et $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$

1. $\forall n \geqslant 1 \quad x_n > \sqrt{a}$

En effet : $x_n - \sqrt{a} = \dfrac{(x_{n-1})^2 + a - 2.x_{n-1}.\sqrt{a}}{2x_{n-1}} = \dfrac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2x_{n-1}} > 0$

2. $\forall n \geqslant 2 \quad x_n < x_{n-1}$

En effet : $x_{n-1} - x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-1}}{2} - \dfrac{a}{2x_{n-1}} = \dfrac{(x_{n-1})^2 - a}{2x_{n-1}} > 0$

puisque $x \geqslant 2$ et que $x_{n-1} > \sqrt{a}$ d'après 1

3. On a donc : $\forall n \geqslant 2 \quad \sqrt{a} < x_n < x_{n-1}$

Pour $n \geqslant 1$, la suite (x_n) est décroissante minorée. Si m est la borne inférieure de cet ensemble borné (m existe toujours) alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = m \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \leqslant m.$$

A la limite on a alors $m = \frac{1}{2}\left(m + \frac{a}{m}\right) \Leftrightarrow m^2 = a \Leftrightarrow m \Leftrightarrow \sqrt{a}$

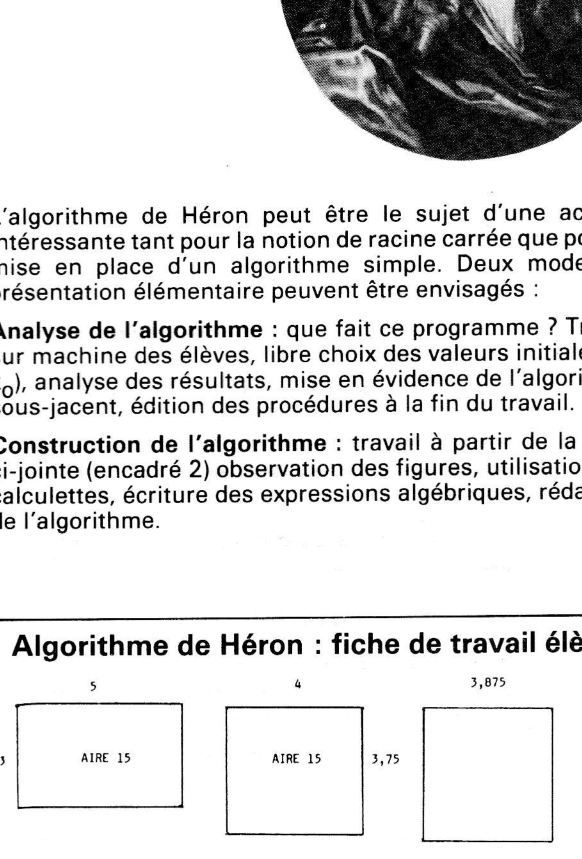
encadré 1

L'algorithme de Héron peut être le sujet d'une activité intéressante tant pour la notion de racine carrée que pour la mise en place d'un algorithme simple. Deux modes de présentation élémentaire peuvent être envisagés :

Analyse de l'algorithme : que fait ce programme ? Travail sur machine des élèves, libre choix des valeurs initiales (A, x_0), analyse des résultats, mise en évidence de l'algorithme sous-jacent, édition des procédures à la fin du travail.

Construction de l'algorithme : travail à partir de la fiche ci-jointe (encadré 2) observation des figures, utilisation des calculettes, écriture des expressions algébriques, rédaction de l'algorithme.

Algorithme de Héron : fiche de travail élève



Ces rectangles deviennent de "plus en plus carrés".
Vers quel nombre les longueurs se rapprochent-elles ?
Le but est de trouver une méthode qui facilite les calculs.

Etape	0	1	2	3	4	5	6
Longueur x	5	4					
Largeur y	3						

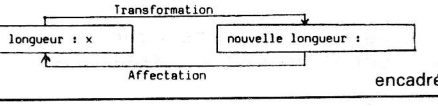
Ecrire le calcul qui permet d'obtenir y en fonction de x

(1) y =

Ecrire le calcul qui permet d'obtenir la nouvelle longueur en fonction de l'ancienne longueur x et de l'ancienne largeur y

(2) Nouvelle longueur =

y doit disparaître : Nouvelle longueur =



encadré 2

Un travail de synthèse, avec toute la classe reste à faire, il peut s'orienter vers les mathématiques (racine, suite, convergence...) ou vers l'algorithmique (boucle itérative, test d'arrêt, conditions initiales...).

Il apparaît fondamental de bien définir ses objectifs pour éviter les effets d'un «glissement métadidactique» tel que l'a défini Guy Brousseau et qui consiste en «une transformation d'un **moyen** d'enseignement (l'algorithme de Héron pour les connaissances mathématiques : suite, racine) en un **objet** d'enseignement (algorithmique...)».

Newton : Dans son ouvrage «Méthode des fluxions et séries infinies» (1671), Newton mentionne une formule d'approximation pour une solution d'équation : on peut approcher une solution s de l'équation $f(x) = 0$ par la suite
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

La convergence de cette suite est assez remarquable pour sa rapidité (en général convergence d'ordre 2 : voir encadré 3). Même si on peut, théoriquement, exhiber des exemples de non-convergence, on constate que, dans la pratique, de tels cas sont rares, surtout si l'on considère des solutions qui sont des zéros simples de l'équation.

Convergences d'une suite

1. On dit que la suite (x_n) converge linéairement vers s avec le coefficient de convergence q si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_{n} - s|} = q \quad \text{et } 0 < q < 1$$

c'est-à-dire que pour n assez grand on a $e_{n+1} = q \times e_n$;
les erreurs e_n sont alors approximativement les termes d'une suite géométrique de raison q.

2. On dit qu'il y a convergence quadratique de la suite (x_n) vers s s'il existe un nombre q non nul tel que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = q$$

C'est-à-dire que pour n assez grand on a $e_{n+1} = q\,(e_n)^2$
Cette convergence est beaucoup plus rapide que la convergence linéaire, en effet si $e_n < 10^{-3}$ alors

$e_{n+1} < q \times 10^{-3}$ (convergence linéaire)
$e_{n+1} < q \times 10^{-6}$ (convergence quadratique)

3. On peut définir des convergences d'ordre p s'il existe un nombre q non nul tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} = q$$

encadré 3

Considérons alors la fonction $f(x) = x^2 - A$, $(A > o)$
$\sqrt{A}$ est une solution - zéro simple - de l'équation $f(x) = o$ et la suite récurrente (x_n) associée à la méthode de Newton s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - A) / 2\,x_n = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$$

On retrouve la méthode de Héron qui converge donc quadratiquement. (Pour plus de détails voir bibliographie [1] ou [2]).

Convergence quadratique de l'Algorithme de Newton

On appelle $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ la fonction itérative de Newton liée à la résolution de l'équation $f(x) = o$. Si s est une solution, la suite (x_n) des valeurs approchées correspondantes est définie par $x_{n+1} = g(x_n)$. On note comme précédemment la nième erreur absolue : $e_n = |x_n - s|$

Dans le cas où s est un zéro simple de f (c'est à dire que $f'(s) \neq o$) on a $g'(x) = \frac{f(x) \times f''(x)}{f'(x)^2}$ donc $g'(s) = o$ (puisque $f(s) = o$).

La formule de Taylor permet d'écrire :

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| = |g'(s)(x_n - s + \frac{1}{2} g''(\xi)(x_n - s)^2|$$
$$= \frac{1}{2} |g''(\xi)| \times (e_n)^2$$

avec $\xi \in [s - e_n \; ; \; s + e_n]$

On constate alors que $\lim_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} = \frac{1}{2} |g''(s)| = q$

C'est à dire que, près d'une solution - zéro simple -, la méthode de Newton donne naissance à une suite qui converge de façon quadratique à condition de prendre une valeur initiale x_0 suffisamment proche de s.

Pour des solutions - zéro multiple - la convergence est linéaire et souvent plus lente que celle obtenue par dichotomie.

encadré 4

Quelques remarques d'ordre didactique

Il semble difficile de présenter l'algorithme de Newton autrement qu'ostensiblement (c'est-à-dire que l'enseignant - ou le manuel - «montre» la méthode et l'élève est invité à faire quelques applications). En revanche, le cas particulier de l'algorithme de Héron permet la réalisation de «situations de classe» (au sens de G. Brousseau [3]) qui amène les élèves à construire la méthode. On a déjà cité une approche liée aux aires, en voici une autre plus «analytique» :

x_n est une approximation de $\sqrt{A}$, on en cherche une autre sous la forme $x_n + h$ avec h réel voisin de O. On a

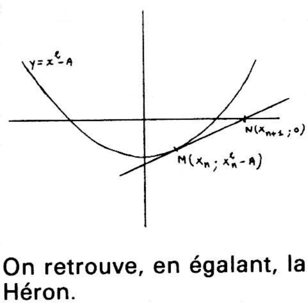
$(x_n + h)^2 = x_n^2 + 2\,x_n\,h + h^2$

En négligeant h^2 on peut dire que $x_n^2 + 2x_n h$ est une approximation de A.

Si on prend $h = A/2\,x_n - x_n/2$ (c'est-à-dire que l'on considère $A = x_n^2 + 2x_n h$) on obtient $x_{n+1} = x_n + h = \frac{1}{2}(x_n + A/x_n)$

qui est une nouvelle approximation de $\sqrt{a}$ (Rappelons que nous avons négligé h^2).

Enfin, l'approche géométrique ne doit pas être oubliée : on trace la représentation graphique de la fonction
$f \left| \begin{array}{l} R \to R \\ x \mapsto x^2 - A \end{array} \right.$



La pente de la tangente à la courbe en M $(x_n \; ; x_n^2 - A)$ peut se calculer directement en considérant le point $N(x_{n+1} ; O)$: $\frac{0 - (x_n^2 - A)}{x_{n+1} - x_n}$

ou par la dérivée : $2x_n$

On retrouve, en égalant, la formulation de l'algorithme de Héron.

Les situations de classe restent à construire précisément.

D'autre part, «les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes. L'activité didactique consiste à organiser ces contraintes et à maintenir les conditions des interactions optimales élèves-milieu, milieu pris au sens général (social, scolaire...) et particulier de situation de classe (matériel manipulé, questions posées, éléments constructifs de la notion, preuve...).» [3].

Donc, pour construire une situation de classe, en plus de ses convictions propres («épistémologie du professeur»), l'enseignant peut être amené à faire un inventaire des «possibles» pour étayer ses choix :

- Possibles didactiques qui ne seront pas développés ici.
- Possibles historiques : il existe, d'autres méthodes pour approcher les racines, celle de Alkarchi (11^e siècle), voir l'article «la diagonale irrationnelle», celle de Bombelli, (16^e siècle), qui a conduit aux fractions continues.

- Possibles épistémologiques : l'algorithme de Héron peut être perçu comme purement numérique (c'est ainsi que procédait Héron qui traitait des problèmes éventuellement d'origine géométrique, en se servant exclusivement des nombres et des opérations élémentaires ; il faudra attendre Diophante pour voir apparaître les premiers rudiments de l'algèbre).

Ce procédé est explicité par Théon de Smyrne (2^e siècle) qui construit la suite (x_n) : $x_n = p_n/q_n$ (p_n et q_n entiers premiers entre eux) à partir de $x_o = 1$; $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{17}{12}$, $x_3 = \frac{577}{408}$ les entiers p_n, q_n se construisent sans peine par récurrence (pour plus de détails voir [6] p. 94).

D'autre part, une écriture algébrique moderne

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

permet d'étudier la méthode en terme de suite convergente : suite de Cauchy ou suite monotone décroissante minorée qui débouchent sur la connaissance de R.

Enfin, des considérations algorithmiques liées aux développements des moyens modernes de calculs permettent de renouer avec le numérique par le biais de l'analyse numérique. Il n'y a plus intérêt, actuellement, à chercher à tout prix des «formules exactes», une bonne méthode numérique sera souvent mieux adaptée pour solutionner un problème.

- Possibles mathématiques : la méthode de Héron figure dans beaucoup de manuels actuels (cf. encadré 5), vulgarisation passagère sans réel fondement mathématique ou apport majeur à la formation scientifique ?

Si on constate que cette méthode repose sur le calcul de la moyenne arithmétique de x_n et A/x_n on peut s'inter roger : que se passe-t-il
- si on change de moyenne ?
- si on considère une moyenne pondérée ?
- si on recherche une convergence plus rapide vers $\sqrt{A}$?

Ces questions ont été suggérées par Monsieur P. Damey, professeur à l'Université de Bordeaux I. Les réponses qui suivent éviteront de trop longs développements calculatoires (calculs polynominaux, de dérivée, de majoration ; certains sont accessibles à des élèves de 1ère S).

Algorithmes itératifs pour approcher $\sqrt{A}$

Dans ce qui suit x est une approximation de $\sqrt{A}$. Les différentes fonctions f proposées permettent de construire des algorithmes itératifs correspondant aux suites récurrentes $x_{n+1} = f(x_n)$. Ces suites convergent vers $\sqrt{A} = f(\sqrt{A})$.

Il est donc important d'étudier ces convergences d'un double point de vue :
- la vitesse de convergence (linéaire, quadratique...) ;
- l'intervalle de convergence $I = [\sqrt{A} - h ; \sqrt{A} + h]$:

Quel serait l'intérêt d'un algorithme très rapide sur un tout petit intervalle I et linéaire ailleurs ?

● Utilisation des différentes moyennes de x et A/x

La forme générale des moyennes s'écrit

$$f(x) = \bar{x}\,(a) = \left[\frac{1}{2}\left(x^a + (A/x)^a\right)\right]^{\frac{1}{a}}$$

a est un entier.

a = 1 : moyenne arithmétique ;
a = 2 : moyenne quadratique ;
a = -1 : moyenne harmonique ; quand a tend vers 0 : moyenne géométrique ; quand a tend vers $+\infty$ on obtient sup (x ; A/x) (inf avec $-\infty$).

POUR ALLER PLUS LOIN

encadré 5

CALCUL D'UN RADICAL

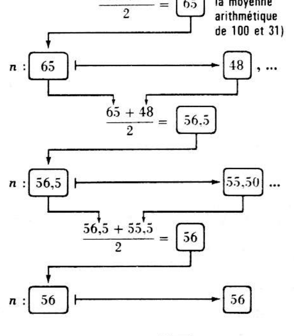
- Le calcul de $\sqrt{n}$ est, bien sûr, immédiat si tu disposes d'une calculatrice :
– à touche « $\sqrt{\ }$ »
– à touche « puissance », type « x^y ». Il suffit de demander $n^{\frac{1}{2}}$ (puisque $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$).

- Avec une calculatrice plus simple, où à la main, tu peux procéder par essais, avec des encadrements de $\sqrt{n}$ de plus en plus serrés. Mais cela risque d'être très lent alors que la méthode dite « de Héron » est rapide :

Calcul d'un radical par la méthode de Héron :

Exemple 1 : Calculons $\sqrt{3\,136}$. Posons $n = 3\,136$.

$100^2 = 10\,000$. Donc $100 > \sqrt{n}$. A partir de là voici la méthode de Héron (qui peut se dérouler à partir de n'importe quel nombre positif ou nul) :



Conclusion : $\sqrt{3136} = 56$

Quelques (timides) justifications (tu feras mieux en Seconde) :

- Nous savons que $n = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$.

Posons $n = ab$ avec $a > \sqrt{n}$. Alors $b < \sqrt{n}$ (pour compenser) et, donc : $a > \sqrt{n} > b$.

- Formons $\frac{a+b}{2}$.

- Comparons-le à $\sqrt{n}$, c'est-à-dire à $\sqrt{ab}$, en formant leur différence :

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$

Donc $\frac{a+b}{2} > \sqrt{n}$.

- D'autre part $\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$.

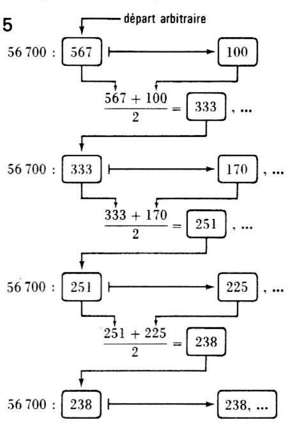
Donc $\frac{a+b}{2} < a$.

- D'où $a > \frac{a+b}{2} > \sqrt{n}$.

- En remplaçant a par $\frac{a+b}{2}$ nous allons donc nous rapprocher de $\sqrt{n}$.

- Les deux colonnes de nombres : 100; 65; 56,5; 56 et 31; 48; 55,5; 56 constituent une **suite croissante** et une **suite décroissante** qui « convergent » vers 56.

Exemple 2 : Calcul de $\sqrt{56\,700}$



- Si nous arrêtons là, nous pouvons déjà conclure que $\sqrt{56\,700} \simeq 238$.

- Mais en précisant la division ci-dessus, nous obtenons 238,235 294 et, en poursuivant,

$$56\,700 : \left(\frac{238 + 238{,}235\,2\ldots}{2}\right) \simeq 56\,700 : 238{,}117\,7 \simeq 238{,}117\,64\ldots$$

D'où $\sqrt{56\,700} \simeq 238{,}117\,6$. *Relève les deux suites de nombres, l'une croissante, l'autre décroissante, qui convergent vers le radical.*

- Il vaut mieux arrondir tant que le diviseur et le quotient sont éloignés l'un de l'autre. Il ne faut plus le faire, si l'on veut un radical précis, dès que le diviseur et le quotient sont très voisins.

- Rappelons que, par l'écriture du type « a, ... » nous voulons dire que ce nombre comporte d'autres chiffres, non précisés.

- Par cette méthode, vérifie, en quelques divisions, que :

$$\sqrt{78\,965\,412} \simeq 8\,886{,}248\,5$$
$$\sqrt{0{,}000\,007\,8} \simeq 0{,}002\,792\,8$$

Utilisation, pour le calcul de $\sqrt{n}$, de puissances de 10

- 1° **Exemple 1 :** Calcul de $\sqrt{786\,000\,000\,000}$. Ici $n = 7\,860 \times 10^8$.
D'où $\sqrt{n} = 10^4 \times \sqrt{7\,860}$
Exemple 2 : Calcul de $\sqrt{0{,}000\,007\,8}$. Ici $n = 780 \times 10^{-8}$.
D'où $\sqrt{n} = \sqrt{780} \times 10^{-4}$.

Hachette ZEHREN - BAREIL 3^e

Les suites associées convergent pour tout x_0 de départ positif, elles sont croissantes et majorées par $\sqrt{A}$ quand a est négatif (à partir de x_1), elles sont décroissantes et minorées par $\sqrt{A}$ quand a est positif.

La convergence est quadratique sur un intervalle dont l'amplitude décroît quand $|a|$ augmente (amplitude 1 pour $a = 2$; amplitude 0,2 pour $a = 3$).

D'autre part, on démontre que $\bar{x}(a)$ est une fonction croissante de a ce qui permet d'ordonner les moyennes et dire que la moyenne arithmétique pour a positif et la moyenne harmonique pour a négatif correspondent aux meilleures convergences (c'est-à-dire que pour une même approximation x, l'approximation suivante $\bar{x}(1)$ ou $\bar{x}(-1)$ sont plus proches de $\sqrt{A}$ que tout autre valeur $\bar{x}(a)$).

Enfin, l'algorithme associé à la moyenne arithmétique converge plus vite que celui associé à la moyenne harmonique et quadratiquement à partir de x_1 quel que soit x_0.

Pour $a = 1$ on a $\bar{x}(1) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$: l'algorithme de Héron !

L'algorithme associé à la moyenne arithmétique converge plus vite que celui associé à la moyenne harmonique

On note $f(x) = \bar{x}(1) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x})$ et (x_n) la suite associée, $g(x) = \bar{x}(-1) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{A}{x}}\right)\right]^{-1} = \frac{2ax}{x^2 + a}$ et (y_n) la suite associée.

La convergence est quadratique si $|f'(x)| < 1$ ou $|g'(x)| < 1$ (on peut se reporter à [4] page 16)

1. Intervalle de convergence quadratique

$x_n > \sqrt{\frac{A}{3}}$ donc convergence assurée dès x_1 ($x_1 > \sqrt{A}$)

$y_n > \sqrt{(\sqrt{5}-2) \times A}$ la convergence quadratique peut se faire attendre en particuliuer si y_0 est voisin de o.

2. Comparaison des erreurs.

A partir d'une même erreur au rang n :

$x_n - \sqrt{A} = \sqrt{A} - y_n = \varepsilon$, on montre que

$$\sqrt{A} - y_{n+1} > x_{n+1} - \sqrt{A} \iff 4\sqrt{A} > \varepsilon$$

Cette dernière inégalité est facilement obtenue (souvent avec l'approximation de départ).

encadré 6

● Utilisation d'une moyenne pondérée

$$f(x) = \frac{1}{a+b}(a\,x + b\frac{A}{x})$$

La suite associée (x_n) converge, en effet :

$x_n < \sqrt{A} \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

$x_n > \sqrt{A} \Rightarrow x_{n+1} < x_n$

La convergence peut être alternée (à partir d'un certain x_n si $b > a$)

La convergence est linéaire,

en effet $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \left|\frac{a-b}{a+b}\right| < 1$

avec $e_n = |x_n - \sqrt{A}|$.

Enfin, la vitesse de convergence dépend de la quantité $c = \left|\frac{a-b}{a+b}\right|$:

- elle est médiocre quand c est voisin de 1 c'est-à-dire (a voisin de 0 ou b grand) ou-exclusif (b voisin de 0 ou a grand) ;

- elle est la meilleure possible quand $c = 0$, c'est-à-dire $a = b$; on retrouve - faut-il le dire ? - l'algorithme de Héron !!

● Utilisation des côtés d'un rectangle d'aire A.

La première présentation de la méthode de Héron faisait référence à un problème d'aire associé à la fonction F :

$F(x) = x^2 - A$

Si on compare les côtés x et A/x d'un rectangle d'aire A on obtient deux nouvelles fonctions :

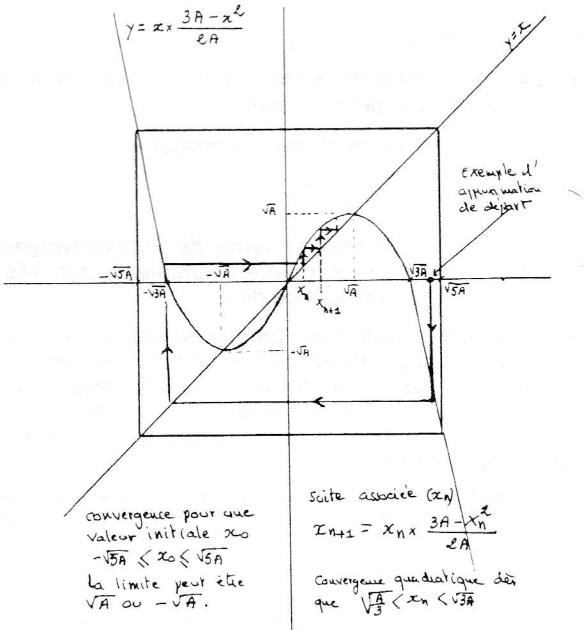
G : $G(x) = x - A/x$ comparaison par différence

H : $H(x) = 1 - (A/x)/x = 1 - A/x^2$ comparaison par quotient

Les suites associées demandent de prendre en compte les fonctions itératives de Newton ($f(x) = x - F(x)/F'(x)$ voir encadré précédent). On retrouve les moyennes arithmétique et harmonique pour f(x) et g(x). La suite associée à h(x) est plus délicate à traiter : on est assuré d'une convergence quadratique pour une valeur initiale comprise entre $\sqrt{A/3}$ et $\sqrt{3A}$, toutefois pour toute valeur comprise entre $-\sqrt{5A}$ et $\sqrt{5A}$ on a une convergence vers $\sqrt{A}$ ou... $-\sqrt{A}$! Dans tous les cas, la convergence obtenue est la moins bonne des trois, Héron reste donc le meilleur !

Comparaison des cotes x et A/x par quotient

$H(x) = 1 - \frac{A}{x^2} = 0$ ou $h(x) = x \cdot \frac{3A - x^2}{2A} = x$



encadré 7

On comprend mieux l'importance donnée à cet algorithme dans l'enseignement, les raisons méritent toutefois d'être évoquées en classe, voire d'être mises en évidence par les élèves dans une des situations simples précédentes.

De plus, cette méthode se généralise sans problème aux approximations de la racine $k^{ième}$ avec les mêmes propriétés : on considère la moyenne arithmétique des k côtés d'un hypercube, k-1 côtés ont pour mesure x, le dernier a pour mesure A/x^{k-1}

On a alors la suite d'approximation :

$$x_{n-1} = \frac{1}{k}\left[(k-1)\,x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}\right]$$

On peut aussi appliquer la méthode Newton à partir de la fonction f :

$f(x) = x^k - A$; $f(x) = 0$ ayant pour racine $\sqrt[k]{A}$.

La rapidité de l'algorithme Héron-Newton peut-elle être mise en défaut ?

Dans [4], il est proposé de trouver en exercice une méthode pour améliorer la convergence de l'algorithme de Newton en déterminant h(x) dans $G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} + h(x)\left[\frac{F(x)}{F'(x)}\right]^2$ pour obtenir une convergence cubique.

En appliquant cette idée à $F(x) = x^2 - A$, on obtient une condition nécessaire $h(\sqrt{a}) = -1/2\sqrt{A}$ - on peut prendre la fonction constante définie par $h_1(x) = -1/2\sqrt{A}$ mais $h_2(x) = -x/(x^2 + a)$ convient mieux car les erreurs sont plus petites. Dans les deux cas la convergence est d'ordre 4.

Avec $h_2(x)$ on obtient donc $G_4(x) = (x^4 + 6Ax2 + A^2)/(4x^3 + 4Ax)$ qui permet de définir la suite des approximations. Avec l'algorithme de Héron on a

$$G_2(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{A}{x}) = \frac{x^2 + A}{2x}$$

On peut alors généraliser en utilisant le développement du binôme $(x + \sqrt{a})^n$:

$$G_n(x) = \frac{x^n + C_n^{n-2} A x^{n-2} + C_n^{n-4} A^2 x^{x-4} + \ldots}{C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^{n-3} A x^{n-3} + C_n^{n-5} A^2 x^{n-5} + \ldots}$$

On obtient une suite décroissante vers $\sqrt{A}$ à partir du deuxième terme x_1 et convergente d'ordre n.

Les tableaux en annexe permettent de constater les apports de cet algorithme : la vitesse de convergence double quand on passe de l'ordre 2 à l'ordre 4 (ce qui était prévisible). Ce gain de vitesse n'existe plus quand on passe à l'ordre 6. En général une seule itération supplémentaire avec l'ordre 4 suffit pour retrouver le résultat obtenu avec l'ordre 6, ce qui peut s'expliquer par le fait que la différence entre e^6 et e^4 est négligeable quand e est petit.

Cette méthode généralisée sera connue et utilisée désormais sous le nom de «Recette du Plot» pour la distinguer de celle de ses ancêtres célèbres (à moins qu'un lecteur apporte le témoignage de son existence plus ancienne).

On peut aussi raisonnablement penser que l'algorithme de Héron-Newton continuera à être utilisé et étudié en tant qu'outil et objet d'enseignement pour sa simplicité, pour la richesse des apports historiques, mathématiques et didactiques (s'ils sont explicités).

Tant pis pour le PLOT qui ne fera pas recette.

Michel CLINARD

■

Extraction de la racine carrée d'un nombre

Ce procédé, qui était enseigné dans les classes de troisième il y a encore quelques décennies (voir Monge et Guinchan) mérite quelque attention.

Il s'agit d'une variante de méthodes anciennes, en particulier celle d'Alkarchi (algébriste se référant à Diophante - début 11e siècle), qui est une interpolation linéaire conduisant à des approximations par défaut de $\sqrt{A}$: ... x_n, x_{n+1}, ...

avec $x_{n+1} = x_n + \dfrac{A - x_n^2}{1 + 2x_n}$ et $x_0 < \sqrt{A}$

Si on considère la courbe représentative de la fonction $f : f(x) = x^2 - A$,

x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite (PQ) telle que

$P(x_n ; f(x_n))$ et $Q(1 + x_n ; f(1 + x_n))$

La correction apportée à x_n est toujours inférieure à 1. En effet :

$(x_n)^2 < A < (1 + x_n)^2$

Soit $0 < A - x_n^2 < 1 + 2x_n$

L'extraction de racine proposée apparaît quelque peu mystérieuse pour ceux qui la découvre ou la redécouvre. Elle repose sur une double séquentialité : celle des approximations successives et celle des unités d'ordre n : ... milliers, centaines, dizaines, unités, qui rend possible des calculs simples «à la main».

On considère x_0, l'approximation par défaut de $\sqrt{A}$ telle que $x_0 = \bar{x}_0 \times 10^n$ (x_0 est le nombre d'unité d'ordre x : $\bar{x}_0$ entier et $1 < x_0 < 9$). Il existe h tel que

$A = (x_0 + h)^2 = x_0^2 + 2x_0 h + h^2$

soit $A - x_0^2 = (2x_0 + h) \times h$.

Il s'agit alors de trouver h' de la forme $h' = \bar{h}' \times 10^{n-1}$ ($\bar{h}'$, nombre d'unités d'ordre n-1, $\bar{h}'$ entier et $1 \leqslant \bar{h}' \leqslant 9$) tel que $(2x_0 + h') \times h' \leqslant A - x_0^2$. On comprend alors l'algorithme décrit : multiplier l'approximation par 2, rechercher l'entier h' qui convient, prendre la nouvelle approximation $x_1 = x_0 + h'$.

Le fait de ne travailler qu'avec des «tranches de deux chiffres», correspond à la seconde séquentialité décrite précédemment, permet d'«alléger» les calculs et se justifie par le fait que

$(\bar{x}_0 \times 10^n)^2 \leqslant A < [(\bar{x}_0 + 1) \times 10^n]^2$

Bien que cet algorithme corresponde à une convergence d'ordre 1 (comme celui d'Alkarchi), son efficacité (en l'absence de calculettes), réside dans la simplicité des calculs, il demande toutefois un effort d'apprentissage et de mémorisation tel qu'il est présenté ici, en l'absence de toute construction susceptible de lui donner un sens.

De tels algorithmes risquent fort de contribuer à développer une vision magique des mathématiques même si - ou parce que - ils sont efficaces ; ils deviennent alors des obstacles à la compréhension ou à la formation des notions sous-jacentes.

Paradoxalement, c'est parce que ces algorithmes simples existent que les concepts associés sont si performants (pour plus de détails voir «Introduction du débat scientifique en situation d'enseignement» [5]).

Bibliographie

[1] Mathématiques et informatique. A. Engel, Cedic.

[2] Démarches algorithmiques en classe de mathématiques. Bouquard, Clinard. IREM Orléans-Tours, Novembre 1986.

[3] Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. G. Brousseau. Thèse d'état, Bordeaux I, Décembre 1986.

[4] Introduction à l'analyse numérique. Baranger. Hermann.

[5] Textes et comptes rendus de la 4e Ecole d'Eté de Didactique. Orléans, Juillet 1986, IREM - Paris - Sud.

[6] Nombre, Mesure, Continu. Jean Dhombres. Cedic, IREM - Nantes.

[7] A la recherche de ses racines... M. Glaymann - in B. Vert 354, p. 331.