PLOT MENINGES

POUR faire chercher les élèves et leurs profs, voici quelques petits problèmes proposés dans nos régionales. Notez le TOURNOI du LIMOUSIN qui propose une formule innovante où il n'y a pas que les profs qui posent des problèmes, les élèves aussi !

UN EXERCICE DE CALCUL

Serge Parpay - Niort

Les nombres a, a', b, b' peuvent être chacun soit $+1$ soit -1.
Trouver le maximum de preuves montrant que
$|ab - ab' + a'b + a'b'| = 2$.

En voici quelques-unes.

1 - Seize cas possibles. Pourquoi ? Comment les trouver ? Comment conduire les calculs ? Faut-il faire un tableau ? Et toujours $|A| = 2$.

2 - On a $A = a(b - b') + a'(b + b')$, alors :
ou b et b' sont égaux, alors $b - b' = 0$ et $b + b' = 2b$ donc $A = 2a'b$ et $|A| = 2$,
ou b et b' sont opposés, alors $b + b' = 0$ et $b - b' = 2b$, $A = 2ab$ et $|A| = 2$.

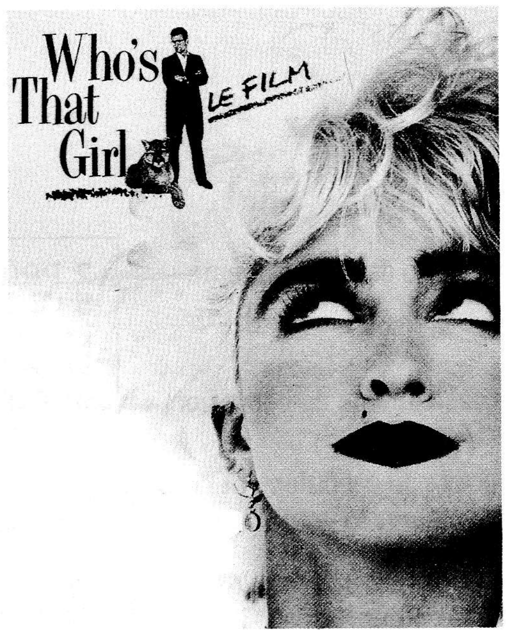
3 - Un et un seul des deux nombres $b - b'$ et $b + b'$ est nul.
En effet $(b - b')(b + b') = b^2 - b'^2 = 1 - 1 = 0$ et $(b - b') + (b + b') = 2b$ $(\neq 0)$.
Alors ou $b - b' = 0$ et... ou $b + b' = 0$ et..., on retrouve la discussion ci-dessus.

4 - On a $A = (a + a')(b + b') - 2ab'$. Alors,
ou $a = a'$ et $b = b'$ alors $A = 2a.2b - 2ab = 2ab$ et $|A| = 2$,
ou un des couples (a,a') et (b, b') est formé de deux valeurs opposées et l'une des deux sommes $a + a'$ et $b + b'$ est nulle, alors $A = -2ab'$ et $|A| = 2$.

5 - On a $A = a^2(b - b')^2 + a'^2(b + b')^2 + 2aa'(b - b')(b + b')$
Mais $a^2 = a'^2 = 1$ et $(b - b')(b + b') = b^2 - b'^2 = 0$
donc $A^2 = (b - b')^2 + (b + b')^2 = 2(b^2 + b'^2) = 2(1 + 1)$ soit $|A| = 2$.

Remarque : on peut même calculer A^2 directement à partir de la forme initiale, on retrouve facilement $A^2 = 4$.

Référence : Le cantique des cantiques. Ortoli et Pharabod. Ed. La Découverte. 1982. (Inégalités de Bell et expérience de M. Alain Aspect).



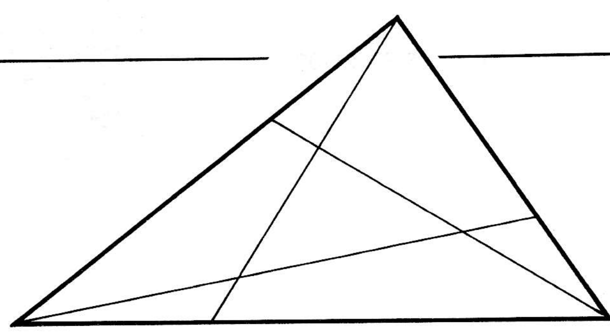
Cherche blonde, moins de quarante ans,...

Bernard d'Espagnat parle des inégalités de Bell dans son livre «A la recherche du réel. Le regard d'un physicien» paru chez Gauthier-Villars en 82. En guise d'introduction à la présentation de ces inégalités, il cite (page 27 du livre) le théorème :

«Dans une population quelconque, le nombre de femmes de moins de quarante ans est inférieur ou égal au nombre de femmes qui fument augmenté des individus âgés de moins de quarante ans qui ne fument pas !»
C'est très facile à prouver. Sans faire de concurrence à A-P^L^ot-strophe, inutile de dire que le livre de Bernard d'Espagnat est à lire (mais cela va mieux en le disant, ce qui est fait (et n'est plus à faire). La rédaction).

Dans la tempête de Bretagne. (Valabrègue - Loctudy).

Un triangle. Trois droites qui joignent les sommets aux points qui divisent les côtés dans le rapport 1/3. Que dire de l'aire du triangle ainsi formé ?



LES VRAIES RACINES DU TRINOME

Bernard Revranche - Mandegault

Vous êtes élève de première ou terminale, vous voulez surprendre votre professeur de mathématique. Demandez-lui de résoudre, dans R, l'équation $25x^2 - 70x + 38 = 0$.
Il lui faudra un certain temps, alors que votre calculatrice, munie du programme qui suit, affichera en quelques secondes de calcul, les deux solutions : $(7 + \sqrt{11})/5$ et $(7 - \sqrt{11})/5$.

Ce programme demande les trois coefficients entiers A, B, C du trinôme $Ax^2 + Bx + C$, et en donne les zéros exacts, réels ou complexes.
Toutes les simplifications sont effectuées ; ainsi :
>$\sqrt{50}$ apparait sous la forme $5\sqrt{2}$.
>$(8 - i\sqrt{12})/2$ apparait sous la forme $4 - i\sqrt{3}$.

La version qui suit, fonctionne sur une Sharp PC 1245. Pour qu'elle loge (de justesse !) dans la machine, il a fallu utiliser quelques astuces propres à cette calculatrice ; elles sont signalées dans l'explication du programme.

```
2: PRINT = LPRINT
5: CLEAR : DIM B(7) :
B(0)=4:B(1)=2:B(2)=4:B(3)=2
B(4)=4:B(5)=6:B(6)=2:B(7)=6
10: INPUT "A=";A, "B=";B ,
   "C=";C: IF A=Ø THEN 10

20: Z = Ø: T$ = "√"
30: B=B* SGN A:C = C*
   SGN A:A = ABS A
40: K = B : L = 2A
50: GOSUB " P.G.C.D."
60: E = L
70: D = BB - 4AC
80: IF D=0 THEN
   LET X = B/E: Y = 2A/E:
GOSUB "PRINT 1":GOTO 10
90: IF D<Ø THEN LET D=-D:
   Z$ = "I"
100: Q=√D:
   IF (INT Q=Q)*(Z$="I")
   THEN LET T =Ø: M=Ø:
   G=1: F=Q: GOTO 130
110: IF INT Q=Q THEN LET
   X=-B +Q: Y=2A: W=-B-Q:
   U=2A:GOSUB "PRINT 2":
   GOTO 10
130: GOSUB "SLPF. √D"
140: K=E: L=F: IF G<>1
   THEN LET M$=STR$ G
150: GOSUB "P.G.C.D."
160: X=-B/L: Y=2A/L: F=F/L
170: GOSUB "PRINT 3"
180: GOTO 10
190: END
```

- 2 : Commande de l'imprimante
- 5 : Chargement du vecteur B(i) i = 0 à 7. Ce vecteur sert à générer les entiers supérieurs à 7, non divisibles par 2, 3, 5.
- 10 : Les coefficients de l'équation, avec A non nul.
- 20–60 : Au cours du déroulement du programme, la variable chaîne Z$ contient "i" ou est vide, la variable T$ contient "√" ou est vide. Pour "vider" Z$, on peut sur le PC, poser Z=Ø.
- 30 : On peut toujours choisir A > 0
- 40–60 : La variable E contient le pgcd de 2A et de |B|.
- 70 : Le virus bien connu de la trinômite (ici * peut être omis -soi qui mal y pense) (rappel des Plot précédents : connaissez-vous :BB - 3AC ?)
- 80 : Si D=Ø, on écrit la racine double avec le sous-programme "Print 1".
- 90 : Si D<Ø, alors on travaille dans C; on met i dans Z$.
- 100 : Si -D est un carré, on vide T$ et M$ pour écrire les racines sous la forme (a ± ib)/c.
- 110 : Si D est un carré, on écrit les 2 racines rationnelles avec le sous programme "Print 2".
- 130 : On sort les carrés de √D. On a √D = F√G.
- 160 : Simplification éventuelle de X, F, Y.
- 170 : Ecriture des solutions.

```
500: "P.G.C.D."
510: K = ABS K
520: R = K - L * INT (K/L)
     :IF R = Ø THEN RETURN
530: K = L: L = R: GOTO 520
540: *
```

1. Sous-programme PGCD
Il calcule le pgcd de K et L et l'inscrit dans L.

```
600: "SLPF. √D"
610: F = 1: G = D
620: N = 2:GOSUB "DIVICAR"
     : IF Y = 1 THEN RETURN
630: N = 3:GOSUB "DIVICAR"
     : IF Y = 1 THEN RETURN
640: N = 5:GOSUB "DIVICAR"
     : IF Y = 1 THEN RETURN
650: N = 7:GOSUB "DIVICAR"
     :IF Y = 1 THEN RETURN
660: I = Ø
670: IF I > 7 THEN LET I = Ø
680: N = N + B(I)
690: GOSUB "DIVICAR"
     :IF Y = 1 THEN RETURN
695: I = I + 1: GOTO 670
699: *
700: "DIVICAR"
710: IF NN >G THEN LET Y=1
     : RETURN
720: P = G/(NN): IF INT P = P
     THEN LET F = FN: G = P
     : GOTO 710
730: Y = Ø
740: RETURN
750: *
```

2. Sous-programme de simplification de √D.
Il donne √D sous la forme F√G où G n'est pas divisible par un carré.

- de 610 à 660 on teste si N^2 divise D pour 2, 3, 5, 7; et, le cas échéant, pour N supérieur à 7 et non divisible par 2, 3, 5. On décrit, pour cela, les entiers de la forme 30.n + k, où k=1 ; 7, 11,13,17,19, 23, 29.

- la variable Y, "booléenne" , provoque la fin du déroulement du sous-programme dès que la valeur prend la valeur 1.

```
800: "PRINT 1"
810: IF Y = 1 THEN PRINT
     "X1 = X2 = "; STR$ X
     : RETURN
820: PRINT "X1 = X2 ="
     STR$ Y: RETURN
```

3. Sous-programme d'écriture des solutions quand D=Ø.

```
830: "PRINT 2"
840: K = X: L = Y
     : GOSUB "P.G.C.D."
     : X=X/L: Y=Y/L: K=W: L=U
     : GOSUB "P.G.C.D."
     : W=W/L: U=U/L
850: IF Y = 1 THEN PRINT
     "X1="; STR$ X: GOTO 870
860: PRINT "X1="; STR$ X;
     "/"; STR$ Y
880: PRINT "X2="; STR$ W;
     "/"; STR$ U: RETURN
```

4. Sous-programme d'écriture des solutions quand D est un carré.

- en 840, simplification des fractions.

- en 850 et 870, si le dénominateur est égal à 1, on n'écrit que le numérateur.

5. Sous-programme d'écriture des solutions quand D<Ø ou quand D n'est pas un carré.

```
900: "PRINT 3"
     : J = (F=1)+2*(Y=1)+4*(X=Ø)
     : GOTO 910 + J
910: PRINT " X1 = ("; STR$ X;
     "+"; Z$; STR$ F; T$; M$;
     ")/"; STR$ Y:
     PRINT "X2 = ("; STR$ X;
     "-"; Z$; STR$ F; T$; M$;
     ")/"; STR$ Y: RETURN
911: PRINT " X1 = ("; STR$ X;
     "+"; Z$;T$; M$;")/"; STR$ Y
     : PRINT "X2 = ("; STR$ X;
     "-"; Z$;T$; M$;")/"; STR$ Y:
     RETURN
912: PRINT "X 1="; STR$ X;
     "+"; Z$; STR$ F T$; M$
     : PRINT "X2 ="; STR$ X;
     "-"; Z$; STR$ F; T$; M$:
     RETURN
913: PRINT "X1 ="; STR$ X;
     "+"; Z$; T$; M$
     : PRINT "X2 ="; STR$ X;
     "-"; Z$; T$; M$ : RETURN
914: PRINT "X1 ="; Z$;
     STR$ F; T$; M$; "/"; STR$ Y
     : PRINT "X2 =-"; Z$;
     STR$ F; T$; M$; "/"; STR$ Y
     : RETURN
915: PRINT "X1 ="; Z$; T$;
     M$; "/";STR$ Y
     : PRINT "X2 =-"; Z$; T$;
     M$; "/"; STR$ Y
     : RETURN
916: PRINT "X1="; Z$;
     STR$ F; T$; M$
     : PRINT "X2=-"; Z$;
     STR$ F; T$; M$
     : RETURN
917: PRINT "X1="; Z$; T$; M$
     : PRINT "X2=-";Z$; T$; M$
     : RETURN
```

.En 900, aiguillage
.La variable J prend les valeurs entières de 0 à 7 suivant que :
- le dénominateur Y = 1 ou non
- le facteur F = 1 ou non,
- le terme x = Ø ou non