APPROXIMATIONS ET TABLEURS

Jean-Marie CHEVALLIER - Orléans

EN attendant un futur, mais proche, numéro spécial sur "Maths et tableurs" coproduit avec le bulletin enseignement et informatique "La Source" (cf. publicité in Plot 40 - page 10), l'un des membres de cette équipe nous livre, en avant-première, deux exemples d'utilisation du tableur Multiplan en Collège.

1 - Les fractions Egyptiennes

Les Egyptiens de l'empire n'utilisaient que des fractions de numérateur 1 (sauf 2/3 !).
Une fraction quelconque s'exprimait comme somme de fractions de numérateur 1. Pour les calculs, ils utilisaient des tables donnant une décomposition des fractions de type $\frac{2}{n}$. Les calculs sur les fractions n'en étaient pas simplifiés, d'autant qu'ils utilisaient des fractions de l'unité de dénominateurs distincts.

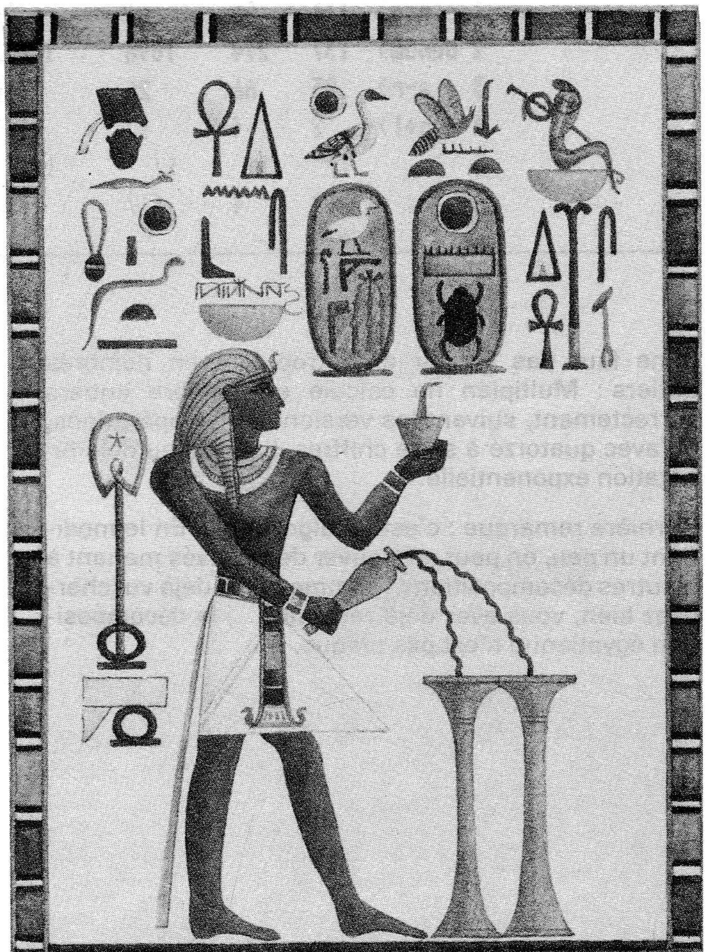
Il n'est pas évident, au départ, que tout rationnel compris entre 0 et 1 puisse s'exprimer comme somme de fractions unitaires distinctes.

Le premier algorithme décrit se trouve chez **Léonard de Pise**, qui utilisait ce type de décomposition.
L'algorithme fut redécouvert et prouvé par **Sylvester** en 1880.

L'idée est simple :
si a/b est la fraction, on prend pour premier terme la plus grande fraction unitaire inférieure à a/b. On soustrait cette fraction unitaire de a/b, et on recommence avec la fraction obtenue.

La démonstration se fait en raisonnant à partir de la division euclidienne de b par a.

Je laisse le plaisir au lecteur de s'en convaincre. Cet algorithme se déclare sans problème dans Multiplan (la recopie de colonne permettant de "recommencer avec la fraction obtenue...").



Voici le tableau des formules ; on introduit le numérateur et le dénominateur du rationnel à décomposer en ligne 1 colonne 2 et ligne 2 colonne 2 respectivement.

Le résultat se lit dans les lignes 5-6. Une tentative de convivialité a consisté à écrire le texte "+ 1/" dans chaque case de la ligne 5, au dessus du dénominateur correspondant. Le processus s'arrête lors du test en haut de chaque colonne ; s'il n'y a plus rien à calculer, on y met un **texte vide**. Les cases de la même colonne qui calculent avec le contenu numérique de la première case indiquent un profond mécontentement en affichant le message d'erreur **VALEUR** !

	1	2	3
1	"num>"	111	SI(LC(-1)=L(+2)C(-1);"";L(+2)C(-1))
2	"denom>"	137	L(+2)C(-1)*LC(-1)
3	"a-r>"	L(-2)C-MOD(L(-1)C;L(-2)C)	L(-2)C-MOD(L(-1)C;L(-2)C)
4	"q+1>"	1+((L(-2)C-(MOD(L(-2)C;L(-3)C)))/L(-3)C)	1+((L(-2)C-(MOD(L(-2)C;L(-3)C)))/L(-3)C)
5		"+ 1/"	"+ 1/"
6		SI(MOD(L(-4)C;L(-5)C)=0;L(-4)C/L(-5)C;L(-2)C)	SI(MOD(L(-4)C;L(-5)C)=0;L(-4)C/L(-5)C;L(-2)C)

Et voici deux calculs :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	num>	131	125	101	87	84	72	36		VALEUR!
2	denom>	137	274	822	7398	636228	4819427100	322595524246025000	2,891E+33	VALEUR!
3	a-r>	125	101	87	84	72	36	36	VALEUR!	VALEUR!
4	q+1>	2	3	9	86	7575	66936488	8960986784611800	VALEUR!	VALEUR!
5		+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	+ 1/	1/
6		2	3	9	86	7575	66936488	8960986784611800	VALEUR!	REF!

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	num>	111	85	66	26	10	6	
2	denom>	137	274	1096	18632	13359144	17846680856760	5,308E+25
3	a-r>	85	66	26	10	6	6	VALEUR!
4	q+1>	2	4	17	717	1335915	2974446809461	VALEUR!
5		1/	1/	1/	1/	1/	1/	1/
6		2	4	17	717	1335915	2974446809460	VALEUR!

Il ne faut pas vouloir aller trop loin en nombres entiers : Multiplan ne calcule en nombre entiers correctement, suivant les versions et les opérations, qu'avec quatorze à seize chiffres. Il passe au delà en notation exponentielle.

Dernière remarque : c'est un algorithme. En le modifiant un peu, on peut en trouver des dérivés menant à d'autres décompositions : comme on l'a déjà vu (cherchez bien, vous avez déjà rencontré...) la décomposition égyptienne n'est pas unique.

Bibliographie

- "Fractions Egyptiennes", in *Histoire de Mathématiques pour les collèges CEDIC*

- "Mains casse-tête et problèmes sur les nombres issus de curieuses fractions utilisées dans l'Egypte Ancienne" in *Jeux Mathématiques par Martin Gardner* - Editions "Pour la Science", reprise d'articles du n° Décembre 78.

- "1932 exercices posés à l'oral du CAPES" Luc Moisotte

et, dans nos régionales :

- Taol Lagad : bulletin de l'Irem de Brest n° 50 et 51 - 1987

- Compte-rendu de l'Université d'été "Histoire des maths" 84 - Irem du Mans - 1986

- Algèbre et calcul en Egypte antique. Irem de Lyon - 1986.

- Cahiers d'histoire des Maths - Irem de Poitiers - 1980

2 - L'inverse d'un nombre par des multiplications

La méthode de Newton (encore elle !) permet de calculer l'inverse d'un nombre en utilisant uniquement des multiplications.

On montre, sans trop de peine (ndlr : pour ceux qui peinent, le dire à l'auteur !), que la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 \in [0, \frac{2}{b}] \\ a_{n+1} = a_n (2 - b \times a_n) \end{cases}$$

converge vers 1/b. On peut obtenir cette suite en cherchant, par Newton, les solutions de l'équation

$$\frac{1}{x} - b = 0$$

Un logiciel de bon aloi, PHASER, appelé à la rescousse, peut d'ailleurs nous donner une image graphique "en escalier" de la suite ainsi définie, ainsi que les quinze premières valeurs obtenues pour $b = 0{,}425$, $a_0 = 0{,}1$.

On peut y vérifier que la tangente au point d'intersection de $y = x$ et $y = x(2 - bx)$ y est horizontale, et que le nombre de décimales exactes y double à chaque étape.

```
EQUATION = invers
PARAMETERS:
b = 0.425000

     TIME = 0.0.
IC 1: x1 = 0.1000000000

     TIME = 1.000000
IC 1: x1 = 0.1957500000

     TIME = 2.000000
IC 1: x1 = 0.3752148234

     TIME = 3.000000
IC 1: x1 = 0.6905955273

     TIME = 4.000000
IC 1: x1 = 1.1784991271

     TIME = 5.000000
IC 1: x1 = 1.7667326724

     TIME = 6.000000
IC 1: x1 = 2.2068940021

     TIME = 7.000000
IC 1: x1 = 2.3438760212

     TIME = 8.000000
IC 1: x1 = 2.3529062512

     TIME = 9.000000
IC 1: x1 = 2.3529411760

     TIME = 10.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

     TIME = 11.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

     TIME = 12.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

     TIME = 13.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

     TIME = 14.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765

     TIME = 15.000000
IC 1: x1 = 2.3529411765
```

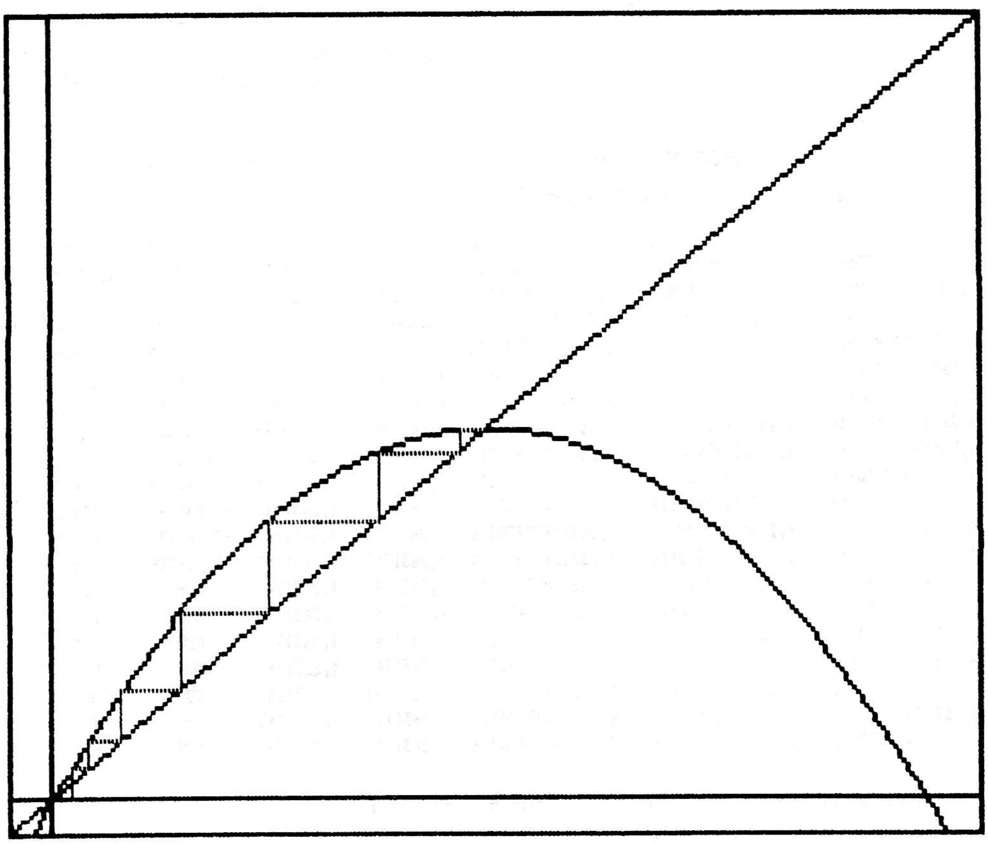
Multiplan peut nous permettre, à peu de frais, une visualisation numérique pour une série de valeurs initiales, pouvant mettre en évidence plusieurs propriétés de cette suite :

si $a_0 < 0$ la suite à l'air de diverger
$a_0 = 0$ suite constante nulle

$\frac{2}{b} > 0$, même petit : convergence vers 1/b

$a_0 = \frac{2}{b}$: retour à l'origine !

$a_0 = \frac{2}{b}$: divergence rapide vers $+\infty$



ligne 7 colonne 3	on y place la première valeur initiale
ligne 8 colonne 2	on a nommé la cellule PAS et l'on y place (on change) la valeur numérique du pas de parcours des valeurs initiales
ligne 9 colonne 2	on a nommé la cellule B, et on y place le nombre à inverser.

Dans les cellules suivant la ligne 7, on place la formule LC (-1) + pas [ajoute à la valeur de la cellule précédente de la même ligne la valeur qui se trouve dans la cellule de nom : PAS !].

La formule fondamentale L(-1) c* (2 - B* L(-1) C) est placée en ligne 8 colonne 4, recopiée vers le bas le nombre de fois désiré et la colonne de formule recopiée dans les colonnes suivantes en une seule commande. La colonne 3 est un compteur précisant l'indice i de l'a_i.

Voici le tableau des formules :

	1	2	3	4	5
7		"x0 = "		6	LC(-1)+pas
8	"pas = "	0,6	1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
9	"nombre B ="	0,234567	L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
10			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
11			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
12			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
13			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
14			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
15			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
16			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
17			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)
18			L(-1)C+1	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)	L(-1)C*(2-B*L(-1)C)

Voici un des tableaux obtenu, en partant de la valeur initiale 6 (calcul dans la colonne) et avec les autres valeurs initiales obtenues par addition du pas.

On peut y voir la convergence (d'ailleurs de plus en plus lente) pour les valeurs initiales comprises entre 0 et 2/b, et une divergence rapide pour les valeurs plus grandes que 2/b. Pour voir les autres cas, il suffit de changer valeur initiale et pas sur une feuille de calcul assez grande.

Bibliographie :

- "Analyse 1" Léonard Epistemon CEDIC Nathan.
- "Mathématiques et Informatique" Arthur Engel CEDIC Nathan. 1986 - 2e édition.
- "Faire des Mathématiques avec Multiplan" t1 et 2 - CEDIC/VIFI - Nathan Informatique. 1987.

Avec un guide pour apprendre Multiplan, cf. Aplostrophe dans ce même numéro du Plot.

Et, bien entendu, la documentation Multiplan fournie avec le logiciel par la maison MICROSOFT !

CALCUL DE L'INVERSE D'UN NOMBRE PAR LA METHODE DE NEWTON

pas = 0,6 nombre B =0,234567

x0 =	6	6,6	7,2	7,8	8,4	9	9,6	10,2
1	3,555588	2,98226148	2,24004672	1,3289437	0,2489525	-0,999927	-2,417695	-4,004351
2	4,14573165915931	3,87831138082413	3,30308096410132	2,2436207	0,4833671	-2,234387	-6,206492	-11,76994
3	4,25993894612457	4,22843034002937	4,04695530107103	3,3064701	0,9119291	-5,639846	-21,44863	-56,03481
4	4,26317181900664	4,26289111886556	4,25220811589978	4,0484791	1,6287889	-18,74076	-150,8083	-848,5865
5	4,26317427429974	4,26317425549428	4,26314606606421	4,2523621	2,6352825	-119,8653	-5636,411	-170608,7
6	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427411451	4,2631469	3,6415643	-3609,915	-7463261	-6,83E+09
7	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,1725378	-3063977	-1,31E+13	-1,09E+19
8	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2612473	-2,2E+12	-4E+25	-2,81E+37
9	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631734	-1,14E+24	-3,76E+50	-1,85E+74
10	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-3,03E+47	-3,3E+100	-8E+147
11	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-2,16E+94	-2,6E+200	-1,5E+295
12	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	-1,1E+188	NUM!	NUM!
13	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
14	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
15	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
16	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
17	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
18	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!
19	4,26317427430116	4,26317427430116	4,26317427430116	4,2631743	4,2631743	NUM!	NUM!	NUM!

inverse de L19C4 = 0,234567 précision =2,776E-17