UN NOUVEAU FLIRT SUR NOS PAGES : UNE CALCULATRICE TENTE UNE APPROCHE

▶▶

Yves OLIVIER - Blois

1re tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un logarithme décimal. Sa démarche est la suivante :
Pour s'approcher de $\log_{10} a$, elle procède par élévations successives à la puissance 10. Mais dans le calcul de a^{10^n} la machine est vite saturée (en général la valeur maximale correspond à $10^{12}—1$). En conséquence de quoi, après chaque élévation à la puissance 10 on divise le résultat par une puissance entière de 10 de telle façon que le résultat trouvé a soit compris entre 1 et 10.

Voici par exemple $\log_{10} 2$:

$2^{10} \simeq 1.024 \times 10^3$

$2^{100} = 2^{10\times 10} \simeq 1.024^{10} \times 10^{30} \simeq 1.26765 \times 10^{30}$

$2^{1000} = 2^{100\times 10} \simeq 1.26765^{10} \times 10^{300}$
$\simeq 1.07150 \times 10^{301}$

$2^{10^5} \simeq 9.99002 \times 10^{30\,102}$

$2^{10^8} \simeq 3.68454 \times 10^{30\,102\,999}$

$2^{10^{12}} \simeq 6.90178 \times 10^{301\,029\,995\,663}$
ainsi $\log_{10} 2 \simeq 0.301\,029\,995\,663$

Quelques remarques

Ce processus peut s'exécuter même avec une calculatrice "non scientifique" entendons par là une calculatrice quatre opérations.

Ce processus peut se généraliser avec plus ou moins de bonheur pour un logarithme de base quelconque puisqu'il est justifié par la formule :

$\log_{10} a^{10^n} = 10^n \times \log_{10} a$

2eme tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un logarithme décimal. La démarche est la suivante :
on considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par les relations suivantes :

$a_0 = 10$ et $b_0 = 1$ $\quad (a_0 = 10^{b_0})$

$a_1 = \sqrt{10}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$ $\quad (a_1 = 10^{b_1})$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$ pour $n \geqslant 0$

Soit c le réel strictement supérieur à 1 dont on veut déterminer le logarithme, et k le plus petit entier tel que $a_k \leqslant c$.

On a alors $\log c = \log \frac{c}{a_k} + b_k$. Si $\frac{c}{a_k} = 1$ alors $\log c = b_k$ sinon on a $\frac{c}{a_k} > 1$ et on peut itérer le procédé en considérant comme nouveau c la quantité $\frac{c}{a_k}$. On obtient log c en faisant la somme des b_k trouvés. On itère jusqu'à ce que $\log c = \log y + L$ où $L \in \mathbf{R}$ et $a_p \leqslant y < a_{p-1}$ pour trouver log c avec une précision de l'ordre de $\frac{1}{2^p}$. D'où l'algorithme suivant :

```
L ←— O, B ←— 1, A ←— 10, Pres ←— 10—6
lire C
si C < 1 alors C ←— 1/C, Z ←— 1
          sinon Z ←— 2
tant que C ≠ 1 et B > Pres faire
   début
      tant que C ⩾ A faire
         début
            L ←— L + B, C ←— C/A
         fin
      A ←— rac(A), B ←— B/2
   fin
L ←— L*(—1) ^ Z
afficher L
```

Quelques remarques sur cet algorithme :
On peut approcher n'importe quel logarithme d'un nombre réel strictement positif car Z est ici le témoin de l'appartenance de ce réel à l'un des 2 intervalles]0,1[ou [1,+∞[.

Pour le calcul d'un logarithme de base A, il suffit d'initialiser A à la bonne valeur.

La traduction de cet algorithme sur des calculatrices programmables en basic ou dans un langage simple ne doit pas poser de problèmes. Il n'en est pas de même pour des petites calculatrices du style Casio fx180p ou TI57. En effet, le nombre de pas est limité à 50 au plus et ce nombre diminue de 8 à chaque fois que l'on utilise une mémoire supplémentaire !

De plus la Casio ne permet pas de relire les instructions afin de corriger d'éventuelles erreurs de programmation !

Reportez-vous au BGV de septembre 87 qui donne quelques recommandations de choix.

3ème tentative d'approche

Une inconnue se rapproche d'un nombre avec une suite (dans les idées ?). Nous ne parlerons pas ici de cas limite que la morale mathématique réprouve.

Comment extraire une racine carrée ?

Nous redonnons ici la méthode classique dite des babyloniens. Elle correspond à une méthode plus générale utilisée dans l'approximation de solutions d'une équation à savoir la méthode de Newton.

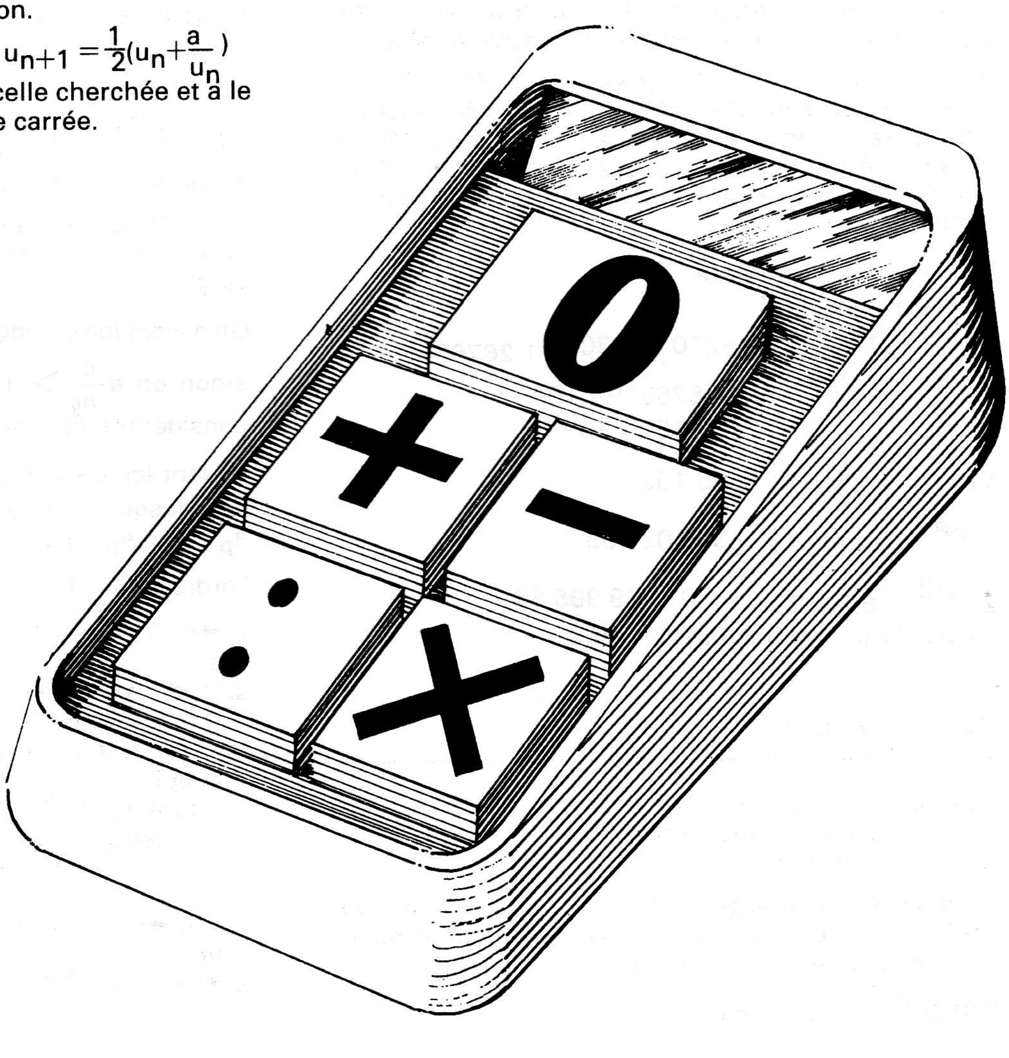
La suite est définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$
α désigne une valeur proche de celle cherchée et a le nombre dont on cherche la racine carrée.

Par exemple si $a = 2$ et si on prend $u_0 = 1$, on obtient :
$u_1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{1}) \simeq 1.5$ $u_2 \simeq \frac{1}{2}(1,5 + \frac{2}{1,5}) \simeq 1.4166667$
$u_3 \simeq 1,4142157$ $u_4 \simeq 1,4142136$ $u_5 \simeq 1,4142136$

Quelques remarques : on appréciera toujours la rapidité de convergence de cette méthode

l'algorithme peut s'écrire :
```
lire A, U, PRES
V ← (U+A/U)/2
tant que abs (U—V) > PRES faire
  début
    écrire V
    U ← V
    V ← (U+A/U)/2
  fin
écrire V
```

ou encore :
```
lire A, U, PRES
répète
  écrire U
  V ← U
  U ← (U+A/U)/2
jusqu'à ce que abs (U—V) ⩽ PRES
écrire U
```



MACHINE A CALCULER SIMPLIFIÉE
Dès l'école maternelle apprenez à vos enfants le maniement des machines à calculer modernes. Celle-ci, avec son chiffre unique, sera une bonne initiation aux machines plus complexes dont ils auront à se servir plus tard.

Avec une T157, on modifie l'algorithme en supprimant le test de précision mais en gardant la boucle évidemment.

Cela donne : lire A, U
  répète
    U ← (U+A/U)/2
    écrire U
  tant que l'on veut

D'où la série d'instructions :

AND Part 2 .... cela réserve deux mémoires
LRN .... on passe en mode programmation
R/S .... le programme s'arrêtera pour
STO 0 .... entrer A dans la mémoire 0
R/S .... même remarque pour entrer u_0
STO 1 .... dans la mémoire 1
LBL 1 .... début de la boucle 1
RCL 0 .... rappel du contenu de la mémoire 0
/ .... divisé par
RCL 1 .... le contenu de la mémoire 1
\+ .... Plus
RCL 1 .... le contenu de la mémoire 1
= .... effectue les calculs précédents
/ .... divisé par
2 2
= .... effectue le calcul précédent qui
STO 1 .... est mis dans la mémoire 1
R/S (ou PAUSE) ... stoppe le programme pour lire le résultat
GTO 1 .... retour au début de la boucle 1

Pour conclure un autre exemple de convergence vers une racine carrée : deux suites pour encadrer un réel !

L'utilisation des suites adjacentes est classique. Elles permettent à chaque itération d'avoir un encadrement du réel cherché !

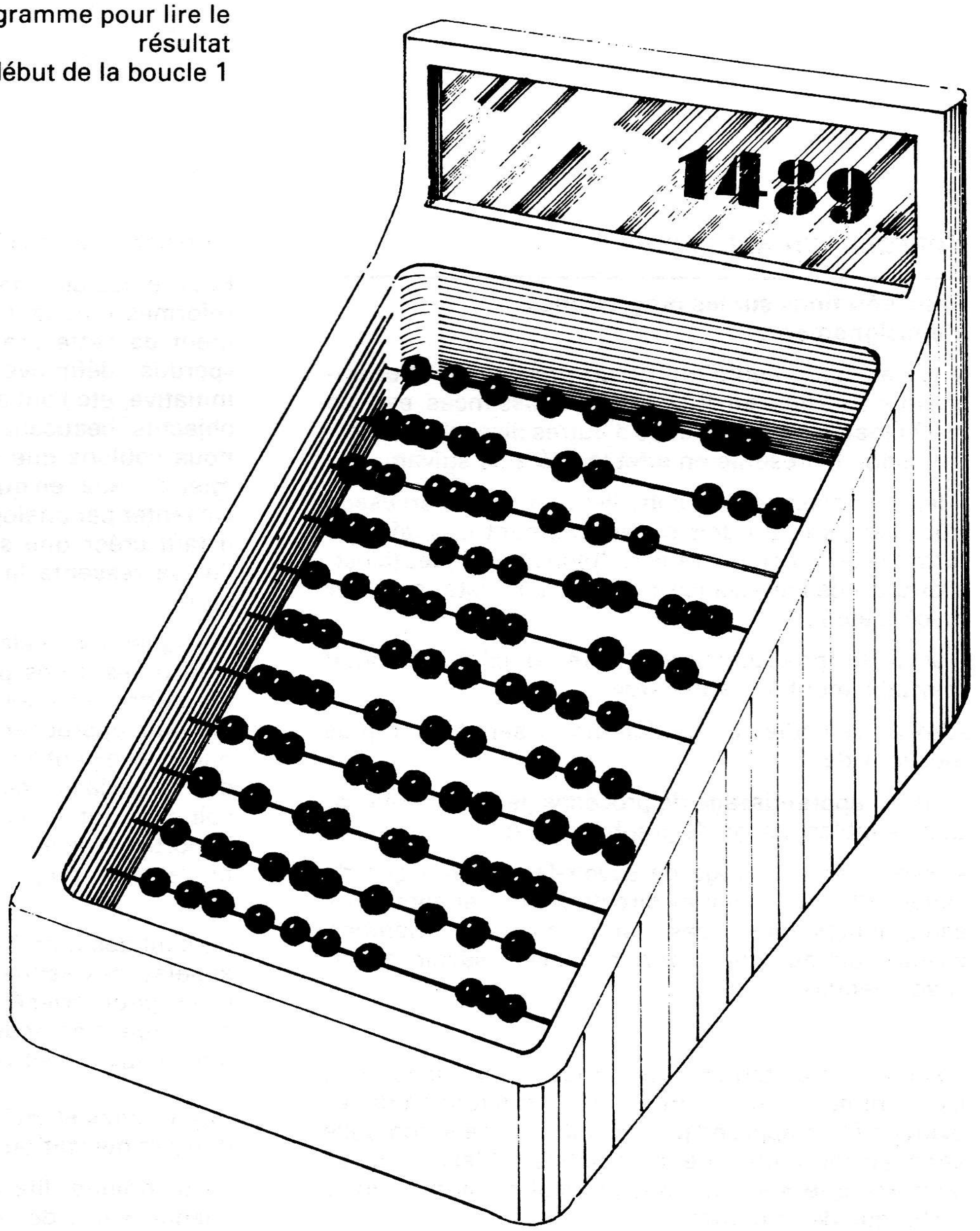
On pose ici $u_0 = A$ et $v_0 = 1$ si $A > 1$ sinon on inverse les valeurs de u_0 et de v_0.

Ensuite on pose : $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$

En effet le terme u_n correspond à la moyenne géométrique tandis que le terme v_n à la moyenne arithmétique des termes précédents.

On peut montrer facilement que les suites sont adjacentes. De ce fait elles ont même limite l qui vérifie $l^2 = A$ car d'une part la suite $(u_n v_n)$ est constante et d'autre par $u_0 v_0 = 1 \times A = A$.

■



BOULIER ÉLECTRONIQUE
Les Anciens Chinois ont inventé le boulier. Les Japonais modernes, eux, l'ont amélioré en le dotant de tous les perfectionnements de la technologie contemporaine. Vous utilisez ce boulier comme son ancêtre, et grâce à un subtil circuit électronique les chiffres s'inscrivent sur un écran.