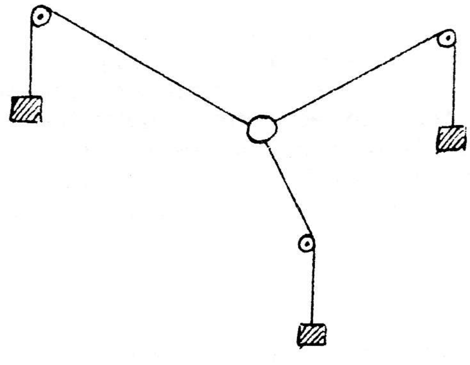
EQUILIBRE D'UN CORPS QUASI PONCTUEL

Dominique GAUD - Yves CACOUGNOLE - POITIERS

Expérience :

Expérience classique de l'étude de l'équilibre d'un corps de petites dimensions (anneau) soumis à 3 forces réalisées par des systèmes poulie et poids tenseur.



Cas particulier : l'une des forces est verticale (pas de poulie).

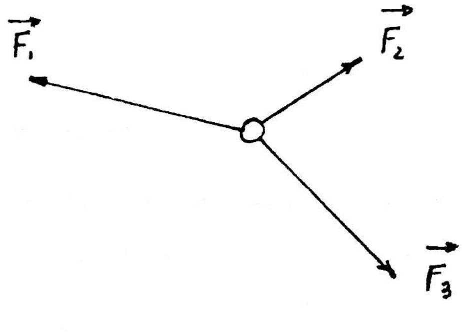
Etude de l'équilibre

1 - Description des forces :

L'anneau est soumis à 3 forces exercées par les 3 fils.
Pour chaque force, orientation : celle du fil
intensité : celle du poids tenseur

2 - Représentation des forces

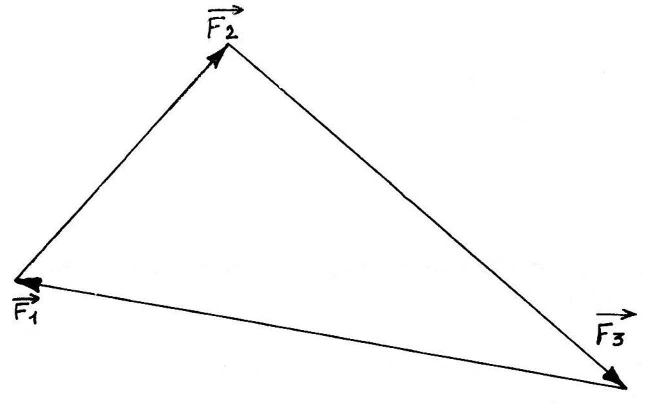
a) représentation graphique :
flèche - origine O
- orientation : celle du fil
- longueur : proportionnelle à celle du poids tenseur



b) représentation mathématique : point secteur $(O, \vec{F})$

3 - Condition d'équilibre

a) Formulation graphique : polygone des forces fermé.



b) Formulation mathématique :
Somme des "vecteurs-forces" nulle

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{O}$$

Exercice de géométrie (graphique)

La position des 3 poulies étant imposée, et les 3 poids tenseurs étant connus, trouver la position d'équilibre de l'anneau.

L'intensité des 3 forces étant connue, les angles que font entre elles les forces (les fils) sont imposés.

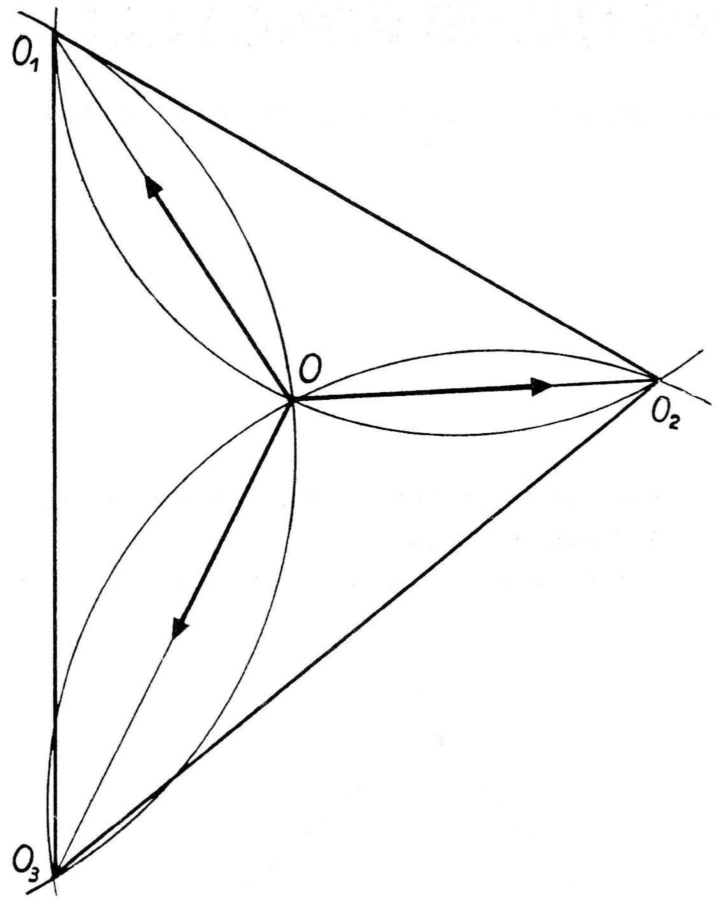
Les angles étant connus, la position d'équilibre de l'anneau se trouve à l'intersection des 3 arcs capables correspondant aux angles connus et construits à partir des positions O_1 O_2 O_3 des poulies.

Exemple de construction de la position d'équilibre

O_1 O_2 O_3 : Position des 3 poulies;

3 poids tenseurs identiques (3 forces de même intensité).

On obtient le point de Fermat dans le cas de 3 masses identiques.

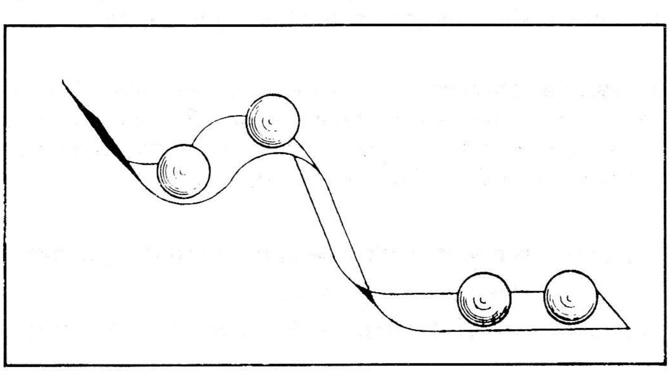


Extrait de Vilenkiem et Cie - Quelques applications des maths - éditions Mir 75 :

Principe du Minimum de l'énergie potentielle

Toute masse élevée à une certaine hauteur est susceptible en tombant de fournir un travail, i.e. elle possède de l'énergie potentielle. Du cours élémentaire de physique on sait qu'un corps de poids q placé à une hauteur h a une énergie potentielle qh. Nous voyons que pour un corps donné plus h est petit plus l'énergie potentielle est faible. L'énergie potentielle a toujours tendance à diminuer, c'est pourquoi tout corps pesant tend à occuper sa position la plus basse. Si ce corps est attaché à un fil, à sa position la plus basse son énergie potentielle sera minimale. C'est pourquoi la proposition (A), capitale dans la démonstration des théorèmes relatifs aux tangentes et selon laquelle à l'état de repos tout corps pesant occupe sa position la plus basse, est équivalente à la proposition suivante :

(U) Si un solide se trouve en état d'équilibre, son énergie potentielle prend sa valeur minimale.



La proposition (U) (et donc la proposition (A)) est à son tour une conséquence de la proposition (E) relative à l'unicité de l'état d'équilibre et de la proposition suivante :

(D') Si l'énergie potentielle d'un solide prend sa valeur minimale, celui-ci se trouve en état d'équilibre.

Pour déduire (U) il suffit de remarquer que si à l'état d'équilibre l'énergie potentielle n'était pas minimale, en vertu de (D') il existerait un autre état d'équilibre qui correspondrait à la valeur minimale de l'énergie potentielle ; or, cela contredit la proposition (E).

La proposition (D') est un cas particulier d'un principe général de la mécanique appelé principe du minimum de l'énergie potentielle ou encore principe de Dirichlet. Le principe de Dirichlet s'énonce comme suit :

Si l'énergie potentielle d'un système est minimale, celui-ci est en état d'équilibre.

Si cet état d'équilibre est unique, le principe de Dirichlet admet une conséquence importante :

L'énergie potentielle du système en état d'équilibre est minimale.

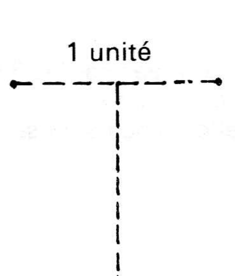
Cette conséquence se déduit comme la proposition (U). Dans la suite nous ne considérerons que les cas où l'état d'équilibre est unique (d'autres cas sont éventuellement possibles ; ainsi, sur la figure on voit que la boule possède quatre états d'équilibre).

Il n'y a certes plus lieu de recourir au principe du minimum de l'énergie potentielle pour résoudre les problèmes relatifs aux tangentes; le fait que le solide pesant occupe sa position la plus basse est évident en soi. Cependant dans nombre de cas lorsque nous avons affaire non plus à un seul mais à plusieurs solides liés entre eux, il est incorrect d'affirmer qu'en état d'équilibre chacun d'eux occupe sa position la plus basse ; dans ce cas il importe de définir l'état de tous les corps, et pour cela il est souvent commode d'intro duire la notion d'énergie potentielle.

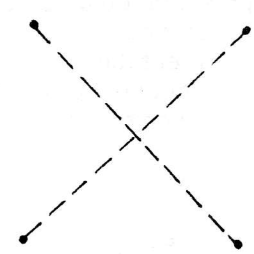
Mathématiques et physique

Quatre fermes sont situées en chacun des sommets d'un carré. Le conseil municipal propose de construire des routes qui les relient entre elles... et bien sûr le projet le plus économique sera retenu !

Solution intruitive



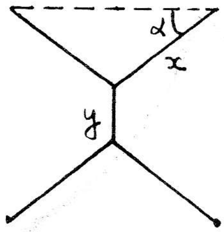
longueur obtenue : 3 unités

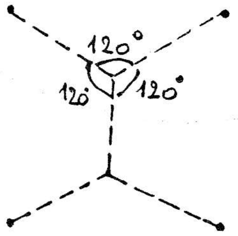


longueur obtenue $2\sqrt{2}$ unités

Comment savoir s'il existe un projet plus économique ?

L'étude du problème peut se faire de manière théorique.





- posons $F(\alpha) = 4x + y$ avec $0 < \alpha < 45°$

On peut alors étudier le minimum de cette fonction F, en écrivant x et y en fonction de α.

$x = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$ $\quad y = 1 - \tan\alpha$.

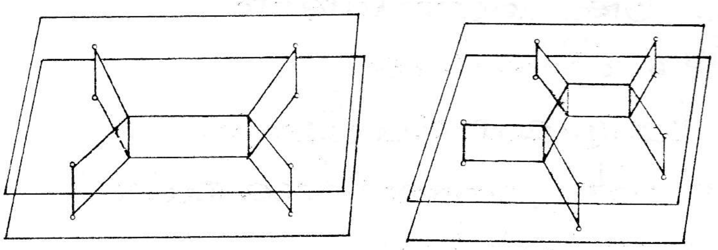
d'où $F(\alpha) = \dfrac{2}{\cos\alpha} + 1 - \tan\alpha \Leftrightarrow F(\alpha) = 1 + \dfrac{2 - \sin\alpha}{\cos\alpha}$

$F'(\alpha) = \dfrac{2\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha}$ avec $\cos\alpha \neq 0$

$F'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \quad \alpha = 30°$.

Ainsi le projet le plus économique sera :

$F(30°) = 1 + \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < 3$.



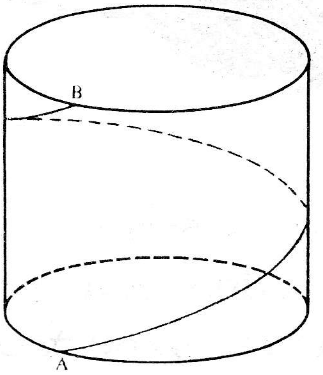
Passage de 4 à 5 fermes

Savez-vous que c'est ainsi que les abeilles construisent leurs alvéoles ?

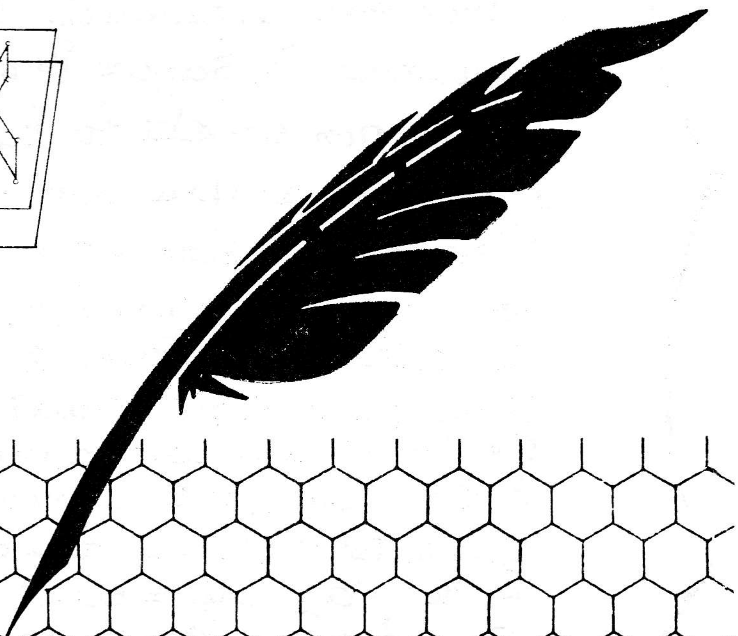
La Nature est Paresseuse !!!

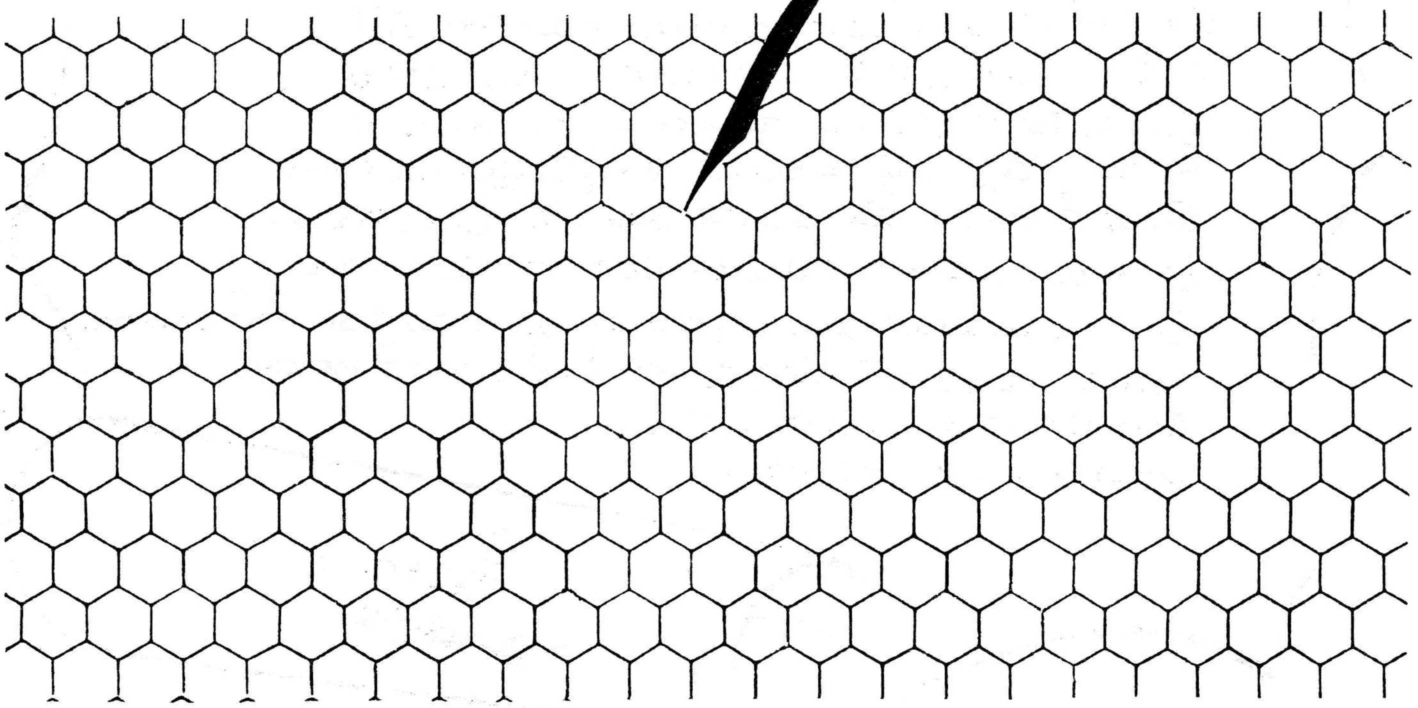
La spirale et la fourmi

1987 - Une fin d'année en seconde. Une élève (Farrugia Sandrine) face à un exercice - type manuel scolaire -Dimathème - quand la poésie s'empare des maths. Envoyé par C. Frattini - Lycée Carnot - Cannes.



Les mesures seront données en centimètres.
Du cylindre étudié, dix est le diamètre
Et la hauteur AB est de onze et demi.
Du point A au point B chemine une fourmi,
Mais elle ne veut pas, en ligne droite, aller :
Elle a choisi de suivre un chemin spiralé.
C'est à 0,001 près...,
Que vous calculerez la longueur du chemin,
Et les explications que vous apporterez
Pourront, si vous voulez, être en alexandrins.





La spirale et la fourmi

Voici la solution, en vers de douze pieds;
Ainsi donc nous cherchons, du chemin emprunté
Par la dame fourmi, la longueur convenue
Nous fiant aux données, sans savoir rien de plus.
Nous allons tout d'abord le cylindre couper:
Un rectangle apparaît; l'ouvrage achevé
La spirale fait place à une diagonale
Et là nous décelons, vraiment sans aucun mal
Deux triangles rectangles, là où est applicable
Le théorème unique du Grec incomparable
J'ai nommé Pythagore, le mathématicien
Qui va nous révéler la longueur du chemin.
Il nous manque un côté, comment le calculer?
Il est tout simplement le cercle déployé.
Nous savons le diamètre, déduisons le rayon
Puis calculons le tour, égal à $2\pi R$,
Trente et un virgule quatre, cet outil on s'en sert:
On l'élève au carré, comme l'autre côté.
Et les deux ajoutés donnent l'hypoténuse,
Ou plutôt le chemin, lui aussi au carré.
Il ne s'agit alors sans employer de ruse
Que d'avoir la racine du chiffre obtenu;
Et on aura trouvé alors, comme convenu
La longueur du chemin qu'arpentait la fourmi
soit 33 quarante cinq, les calculs me l'ont dit;
Quatre et six après cinq,
pour plus de précision!

Farrugia
Sandrine