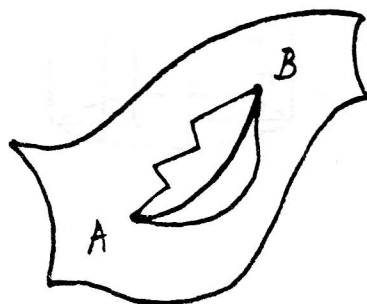


VOYAGE SUR GEODESIQUE... OU ENCORE LA PARESSE

René GAUTHIER - Lyon

C

OMMENT, sur une surface, aller d'un point à un autre par le chemin le plus court... vieux problème du paresseux, bien connu des marcheurs, certains d'entre eux au moins...



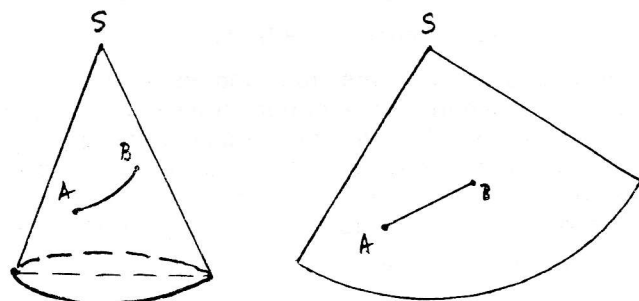
Jean Bernoulli, pour la première fois, se l'est posé, semble-t-il vers 1697. Son frère Jacques contesta fortement ses assertions, ce qui donna lieu à une de ces querelles scientifiques dont l'histoire des sciences est remplie. Euler formula le problème, en 1732, en termes d'équations différentielles. Newton, Gauss et Leibniz ne furent pas en reste. Ce n'est que vers 1900 que Hilbert démontra l'existence d'un plus court chemin entre deux points quelconques d'une surface "complète".

Le bricoleur peut toujours s'armer de ficelle et de piquets et chercher ce plus court chemin de manière pragmatique...

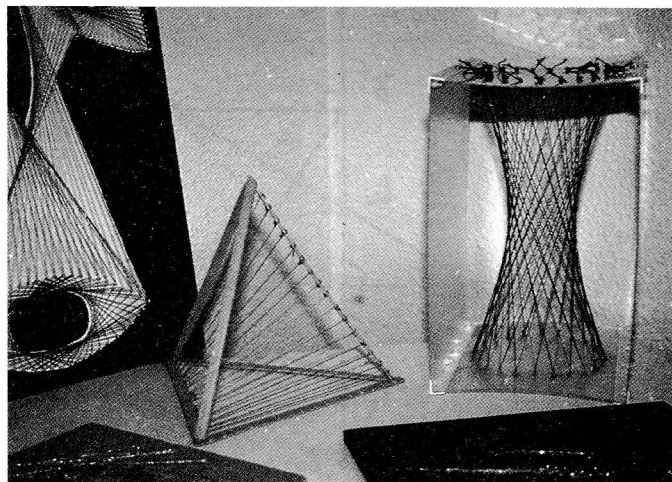
Si la surface est un plan, pas de problème : le segment [AB] fait l'affaire. Encore que, dans l'espace temps de la relativité, ce ne soit pas tout à fait aussi simple...

Si les deux points A et B sont deux points d'une génératrice rectiligne d'une surface réglée, pas de problème non plus : ce plus court chemin est encore le segment de droite, mais si A et B ne sont plus deux points d'une génératrice, c'est une autre histoire !

Prenez donc deux points A et B d'un cône, non alignés avec S.

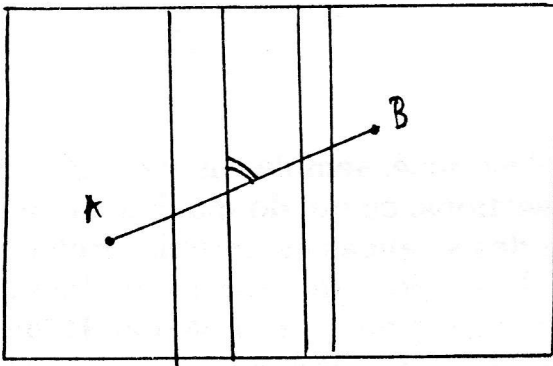
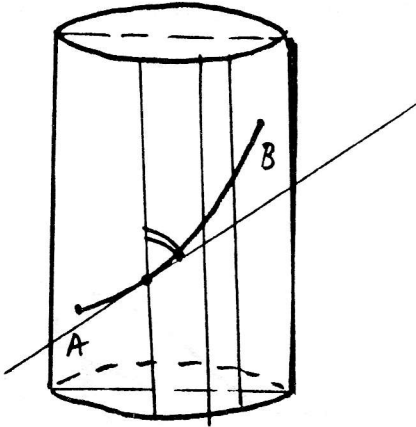


Si votre cône est de révolution, vous avez toujours la possibilité de "l'étaler" sur un plan : sur le développement, il vous reste à tracer le segment [AB], réenvelopper le tout, et vous avez sur la surface conique, le plus court chemin de A à B. C'est une courbe en forme "d'hélice conique"... Et si, par hasard $SA = SB$, cette courbe n'est autre qu'un arc de cercle parallèle, intersection de la surface avec le plan contenant (AB) et perpendiculaire à l'axe.



Sur un cylindre de révolution, même problème et même méthode.

Le cylindre s'applique (se déroule...?) sur un plan. Le segment [AB] tracé sur le développement vous donne la réponse.



Mais ce segment [AB] est cette fois particulièrement intéressant: il fait le même angle avec toutes les génératrices qui le coupent, propriété conservée après l'enroulement sur le cylindre: l'arc de courbe AB admet en chaque point une tangente qui forme un angle constant avec la direction de l'axe. C'est une propriété de l'hélice circulaire bien connue de nos élèves de TC.

La ligne de plus court chemin est donc ici un arc d'hélice sur le cylindre. Rappelons au passage une représentation paramétrique d'une telle courbe:

$$M(x = R \cos t; y = R \sin t; z = kt)$$

Envisageons deux points quelconques A et B non situés sur une génératrice et non situés dans un plan perpendiculaire à l'axe. Il est facile de montrer que par ces deux points passe une seule hélice du cylindre. Pour A, on peut prendre $t = 0$ (choix du repère de l'espace): A(R; 0; 0) B étant donné, il s'agit de trouver k et t: B(x₁; y₁; z₁) avec $x_1^2 + y_1^2 = R^2$

$$\cos t = \frac{R}{x_1} \text{ et } \sin t = \frac{R}{y_1}$$

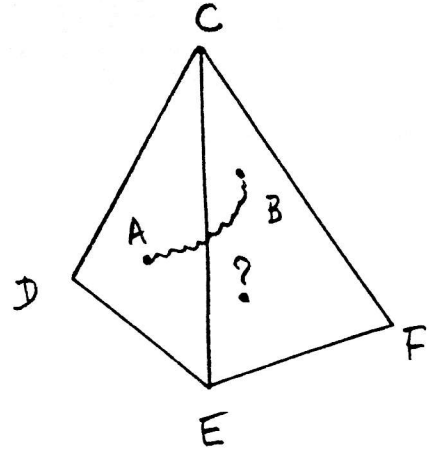
permettent de déterminer le réel t de $[0; 2\pi]$

$k = \frac{z_1}{t}$ détermine le réel k. L'hélice est bien unique.

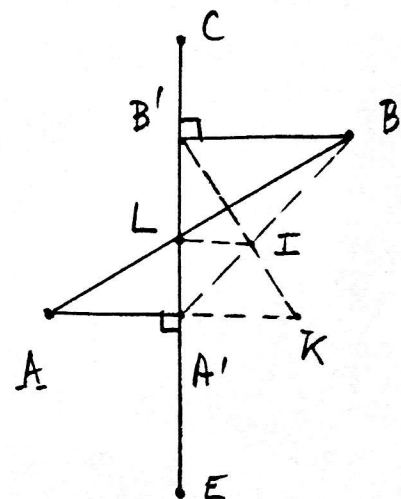
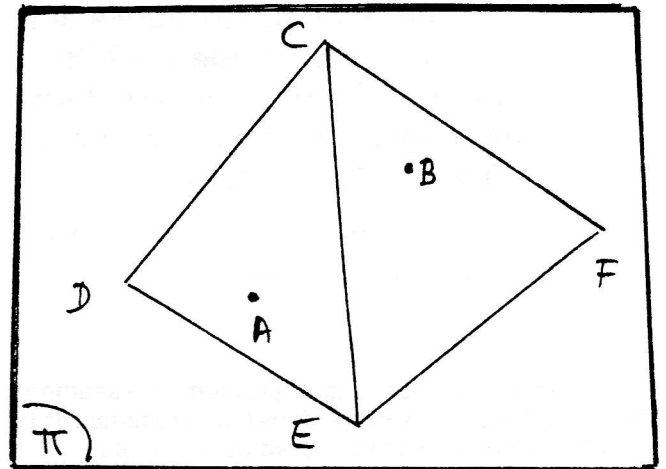
Et sur cette hélice, la longueur $\widehat{AB}$ est donnée par

$$\int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + t'^2} dt \quad \text{Soit} \quad t \sqrt{R^2 + K^2}$$

Les choses se compliquent encore dans le cas de deux points du tétraèdre.



Ici, la géométrie plane va encore nous venir en aide. Etalons les deux-plans contenant les deux points sur le même plan: les spécialistes diraient que l'on rabat l'un sur l'autre. Le plus court chemin de A à B est (encore !) le segment [AB]. Le problème est alors de déterminer concrètement le point L de la frontière commune aux deux faces.



Où est-L ?

On utilisera pour cela les projetés orthogonaux A' et B' de A et B sur (CE) . (KB') coupe (BA') en I , K étant le symétrique de A autour de (CE) . Les propriétés élémentaires de la projection conduisent à constater que le projeté de I sur (CE) est précisément L , intersection de (AB) avec (CE) . Voilà donc construite la ligne du plus court chemin de A à B : (ALB) . Il va de soi que si la droite (AB) est orthogonale à (CE) , alors L , A' et B' sont confondus. La ligne (ALB) est alors sur l'intersection du tétraèdre avec le plan perpendiculaire à (CE) contenant (AB) .

Question :

Cherchez donc la ligne de plus court chemin entre deux points A et B situés sur deux faces opposées d'un parallélépipède...

Le problème du plus court chemin peut facilement se résoudre si la surface s'étale sur un plan.

Prenons maintenant deux points d'une sphère et supposons-les non diamétralement opposés sur cette sphère.

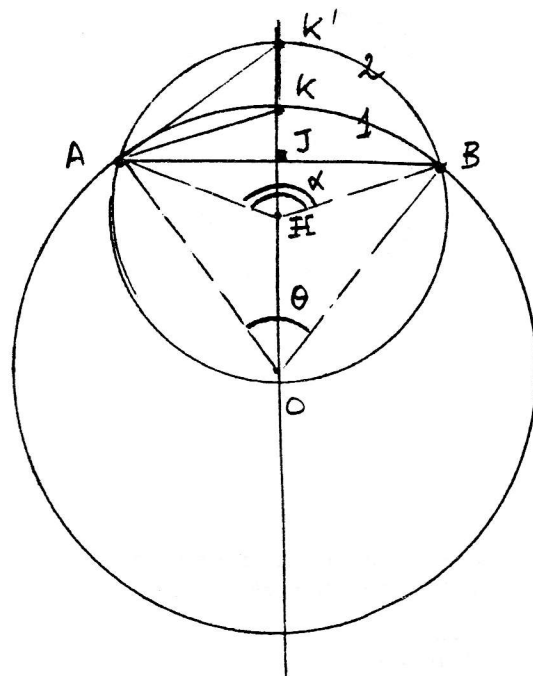
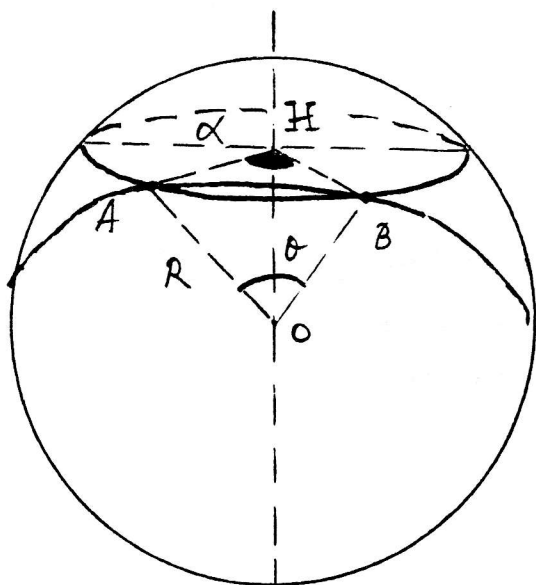
Le plan (OAB) coupe la sphère selon un grand cercle (O, R) : sur ce cercle l'arc $(AB)_1$ est un chemin de A à B .

Dans un plan ne passant pas par le centre O , le cercle, de centre H et de rayon r , passant par A et B , détermine un autre arc $(AB)_2$ sur la sphère : c'est un autre chemin pour aller de A à B . Certes, il y a bien d'autres chemins. Contentons-nous de comparer ces deux arcs : celui du grand cercle et celui d'un petit cercle passant par A et B .

$$(\widehat{AB})_1 = R\theta \text{ et } (\widehat{AB})_2 = r\alpha.$$

On a $R > r$ mais $\theta < \alpha$!

Il nous faut donc comparer $\frac{R}{r}$ et $\frac{\alpha}{\theta}$



Mais pour des points "voisins" A et B , l'inégalité entre les cordes : $AK < AK'$ nous convainc de l'inégalité entre les arcs : $\widehat{AK} < \widehat{AK'}$ d'où $(AB)_1 < (AB)_2$.

Pour plus de rigueur, on pourra faire appel à un paramétrage des cercles et au calcul intégral.

Le plus court chemin de A à B sur la sphère est donc l'arc $(\widehat{AB})_1$ du grand cercle (unique...) qui passe par A et B . Il va de soi d'abord, que sur ce grand cercle, il faut choisir le plus petit des deux arcs. D'autre part, si $[AB]$ est un diamètre, vous avez le choix entre les grands cercles, qui sont plusieurs... On comprend mieux, peut-être, cette fantaisie aérienne qui consiste à passer par le pôle pour aller de Paris à Tokyo.

Un peu de vocabulaire.

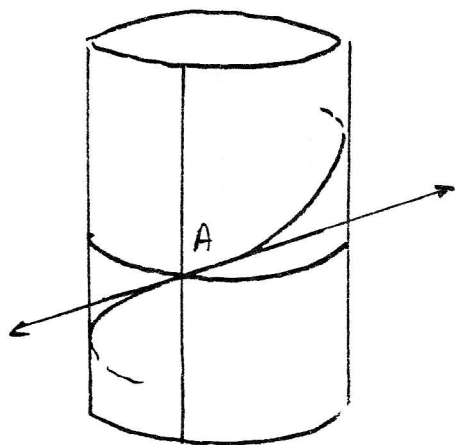
Examinons toutes les courbes d'une surface passant par deux points A et B de la surface. S'il y en a une pour laquelle la longueur AB est **minimum**, on l'appelle alors la **ligne la plus courte**.

Par deux points, il se peut qu'il y ait plus d'une ligne la plus courte (deux extrémités d'un diamètre sur une sphère). Il se peut aussi qu'il n'y en ait pas, pour certaines surfaces bizarres.

Une courbe de la surface S est une **géodésique** de S si elle est la ligne la plus courte entre deux quelconques de ses points assez "proches".

Sur la sphère, les géodésiques sont les grands cercles. Sur un cylindre de révolution, les géodésiques sont les génératrices, les parallèles et les hélices. Par un point du cylindre passent une infinité d'hélices, mais il n'y en n'a qu'une dans une "direction" donnée, c'est-à-dire si l'on donne une tangente en ce point.

C'est une propriété générale d'une courbe dite "régulière" : l'unicité de la géodésique, pour toute direction, en un point régulier.



C'est le paramétrage de la courbe C tracée sur S qui conduit à la détermination de la plus courte distance de A à B.

Soit $\vec{X} = \overrightarrow{OM}(t)$ avec $(x(t), y(t), z(t))$ comme coordonnées de M.

$$ds = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dt = \|\vec{d(X)}\|$$

$$\text{d'où : } \widehat{AB} = \int_0^t \left\| \frac{d(\vec{X})}{dt} \right\| dt$$

C'est donc (encore !) un problème de calcul intégral ! Mais là s'arrêtent les choses simples (si l'on peut dire...). La suite est affaire de spécialiste. Ajoutons simplement le fait que le vecteur dérivée seconde en A, $\vec{X}$, se décompose en deux composantes : sur la tangente en A, $\vec{X}$, et sur la normale $\vec{n}$ en A.

$$\vec{X} = \alpha \vec{n} + \beta \vec{X}$$

α donne la courbure "normale" à C en A et β la courbure géodésique en ce point.

Une ligne géodésique est précisément caractérisée par $\beta = 0$...

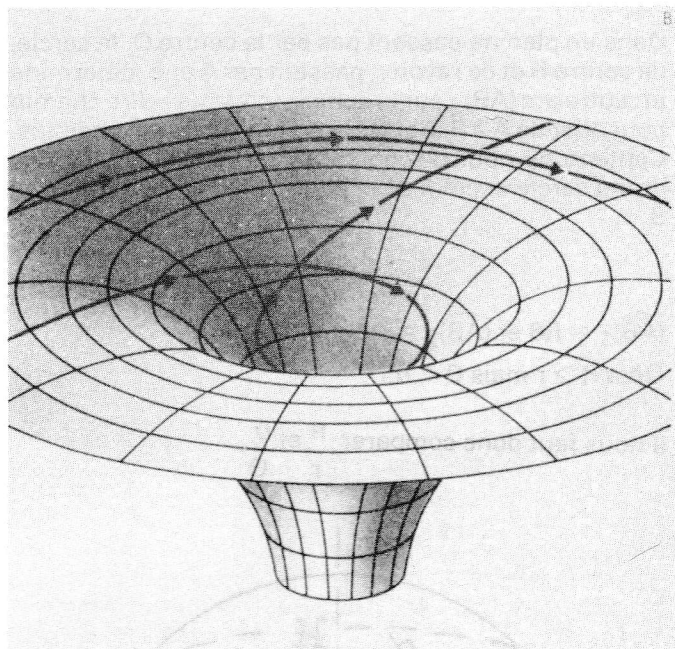
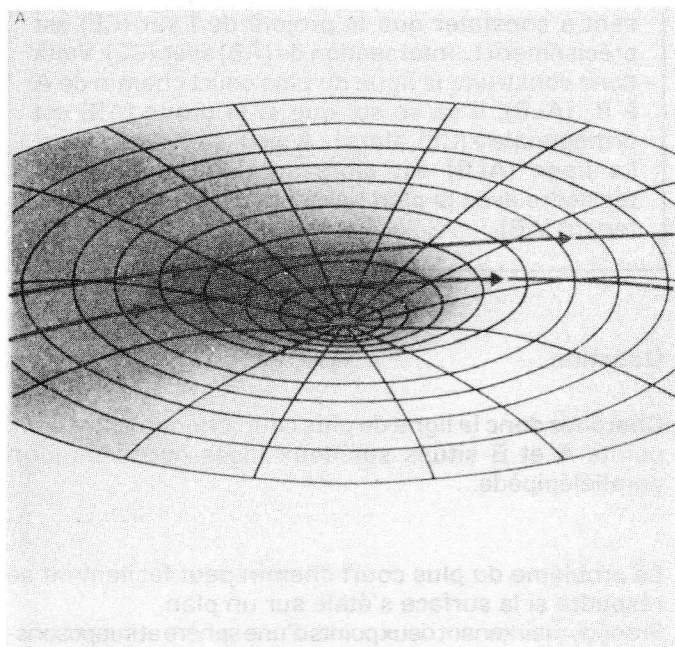
Ce qui entraîne que dans ce cas, le plan osculateur à C en A contient la normale $\vec{n}$ en ce point : il est donc perpendiculaire à la tangente en A à la courbe, c'est-à-dire perpendiculaire en A au plan tangent en ce point à la surface.

C'est semble-t-il, le fin du fin pour caractériser les géodésiques d'une surface... Veuillez donc consulter vos ouvrages de spéciales.

* * *

Finalement, tout cela n'est pas très compliqué dans notre espace euclidien. Par contre, dans l'espace-temps de la relativité, vous pensez bien que tout se complique. La géodésique rectiligne naturelle n'est plus rectiligne... Tout cela est perturbé par l'existence de masses parasites, (les étoiles) ou de trous particuliers (trous noirs) qui font que, à leur voisinage, se

produisent des "effets de courbures" très particuliers. Les distributions d'énergie perturbent le champ gravitationnel... et la géodésique n'est plus ce qu'elle était.



Conclusion

Pour en savoir plus

* Catalogue exposition : Mosaïque Mathématique