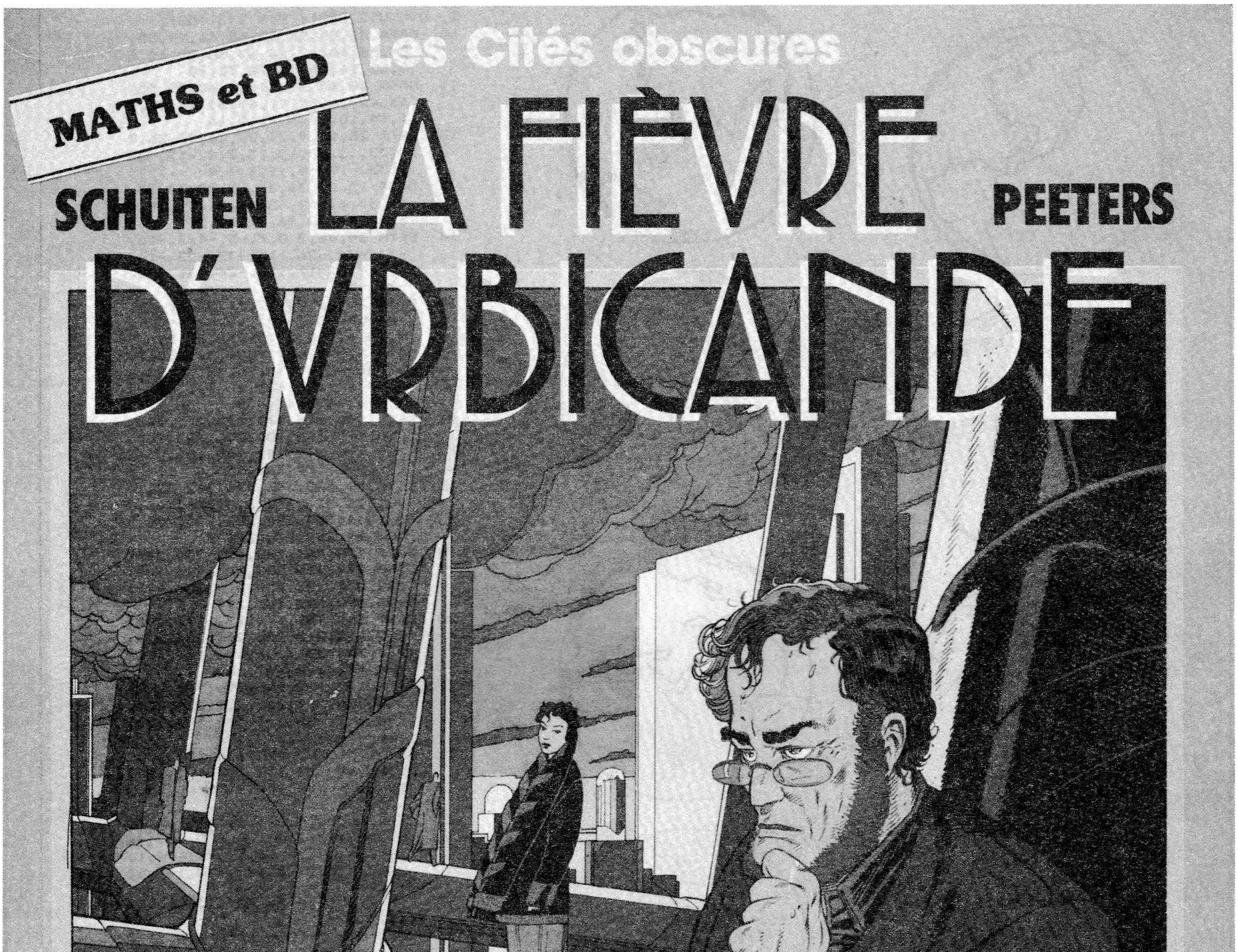
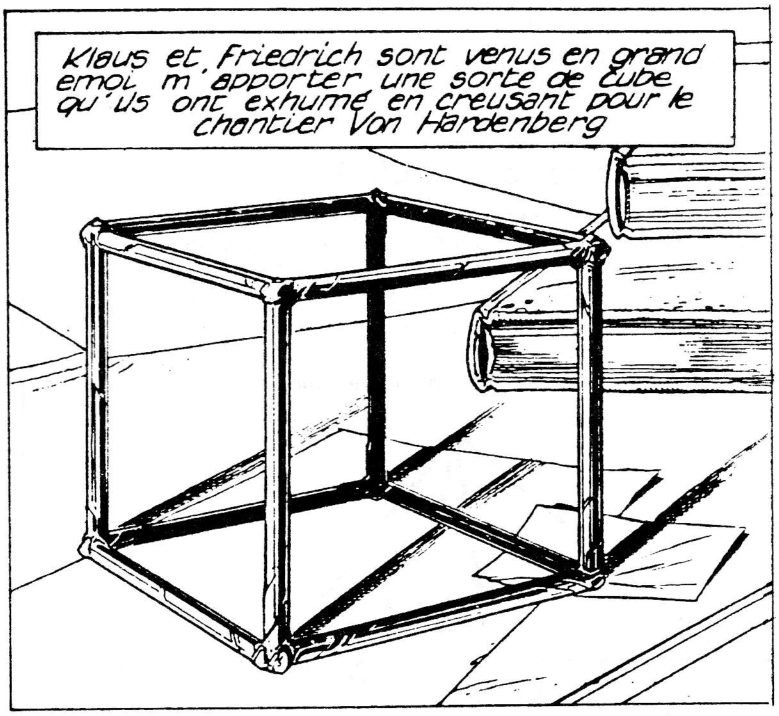

MATHS et BD
Les Cités obscures
SCHUITEN
LA FIÈVRE
PEETERS
D'VRBICANDE
les romans
(A SUIVRE)
casterman

MATH ET BD : DU CUBE A L'OCTAEDRE

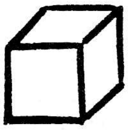
Michel CLINARD - Orléans

Une lecture mathématique de la BD de Schuiten et Peeters, très belle, très géométrique, très philosophique : la fièvre d'Urbicande.

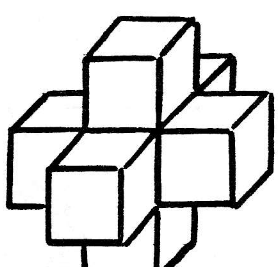
(Série "les cités obscures" - Roman à suivre -Casterman)



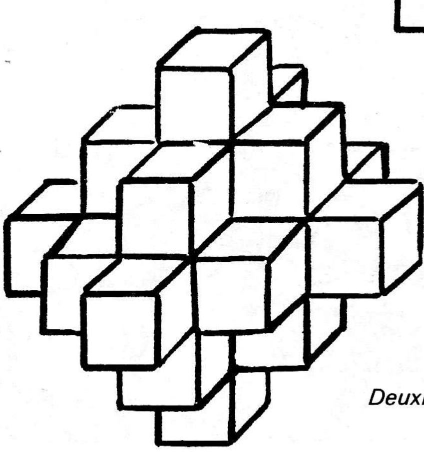
En vérité, je vous le dis, au début de toute chose, il y a le cube. Et ce cube - divin - possède plusieurs propriétés étonnantes : la matière inconnue qui forme ses arêtes, lui permet de s'agrandir et conjointement une auto-reproduction conduit à la création d'un réseau de cubes s'approchant de plus en plus de l'octaèdre.



Cube de départ



Première génération



Deuxième génération

Schuiten et Peeters illustrent par une bande dessinée de qualité les différentes phases de cette croissance sans fin et les conséquences sociales et politiques pour la ville d'Urbicande.

On peut se limiter aux aspects calculatoires que rapporte l'urbatecte Eugène ROBICK (l'étude de ce fameux ROBICK'S CUBE se ramène souvent à des calculs de séries et diffère donc nettement de celle du célèbre et presque homonyme RUBICK'CUBE : clin d'œil des auteurs de la BD et coup d'œil sur les articles de Chauvat-Nury - Plot nos 16-17-18).

La formule de ROBICK - à trouver dans les illustrations - où Un représente le nombre de cubes du réseau à la génération Gn peut s'écrire d'une manière plus condensée :

$$Un = 2n + 1 + 4 \sum_{i=1}^{n} i\,[2n - (2i - 1)]$$

ou

$$Un = \frac{(2n + 1)\,(2n^2 + 2n - 3)}{3}$$

(on rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n + 1)}{2}$

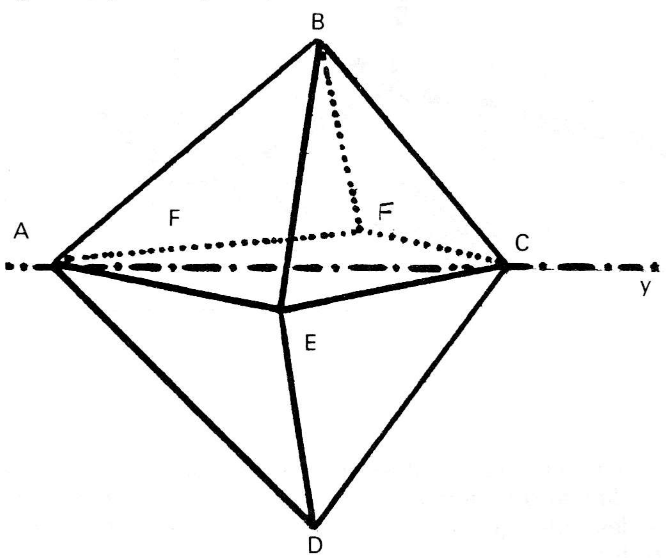
et $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n + 1)\,(2n + 1)}{6}$

voir aussi PLOT n° 27 : la somme des puissances $k^{\text{ième}}$ des n premiers naturels).

D'où vient cette formule ?

Le plus simple consiste peut-être à se placer sur la demi-droite [Cy) (voir fig. 1) et regarder cet "octaèdre-cube". A la génération gn la diagonale [AC] fait apparaître une "barre" de 2n + 1 cubes, puis tout autour 4 barres de 2n − 1 cubes, puis 8 barres de 2n − 3 cubes, etc.

Fig. 1 vue (très simplifiée) d'un octaèdre-cube



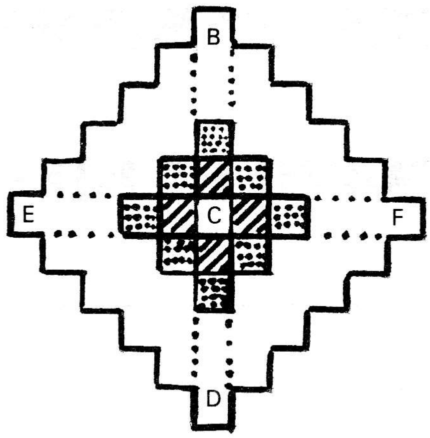
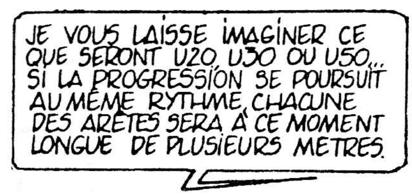


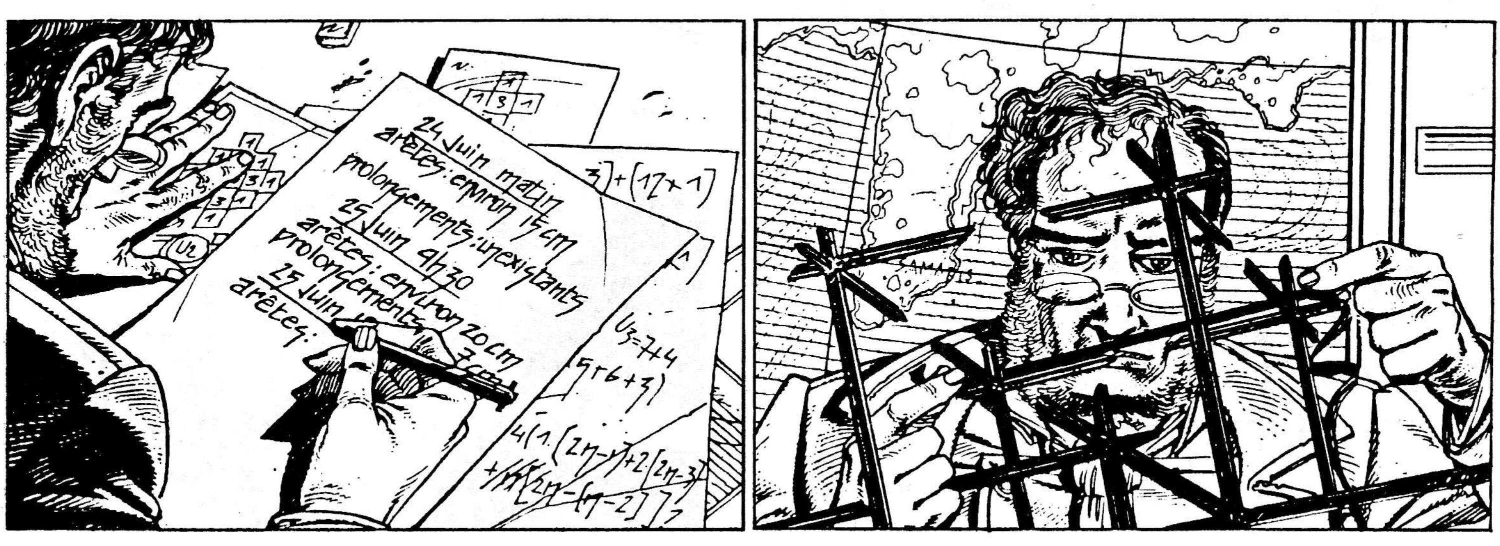
Fig. 2 : vue de l'octaèdre-cube à partir d'un point de [Cy)

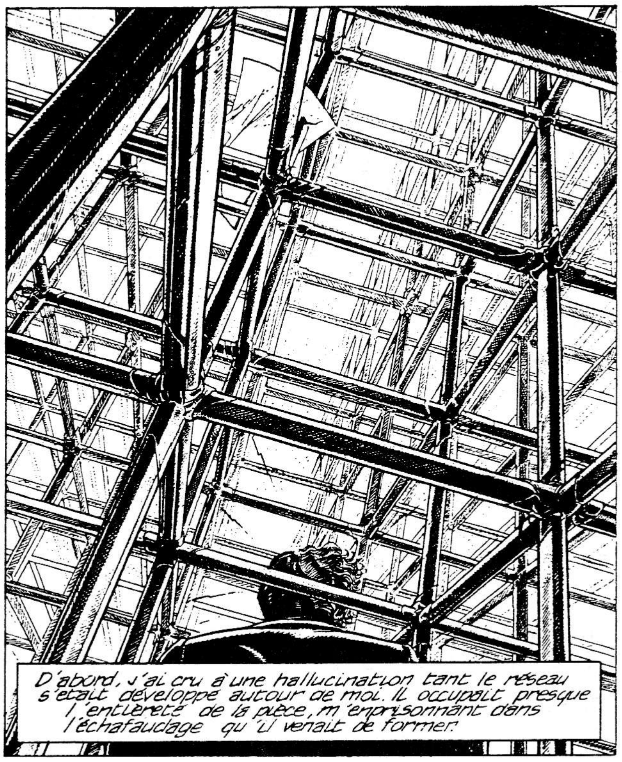
Chaque nouvelle barre compte deux cubes de moins que les précédentes, par contre pour conserver la régularité de la construction 4 barres de plus sont nécessaires pour entourer le niveau précédent.

On termine avec 4n barres d'un cube (carré BFDE). On retrouve la formule et vraisemblablement la méthode de ROBICK.

Générations Gn	nombre de cubes Un
0	1
1	7
2	25
3	63
4	139
5	231
6	377
7	575
8	833
9	1 159
10	1 561



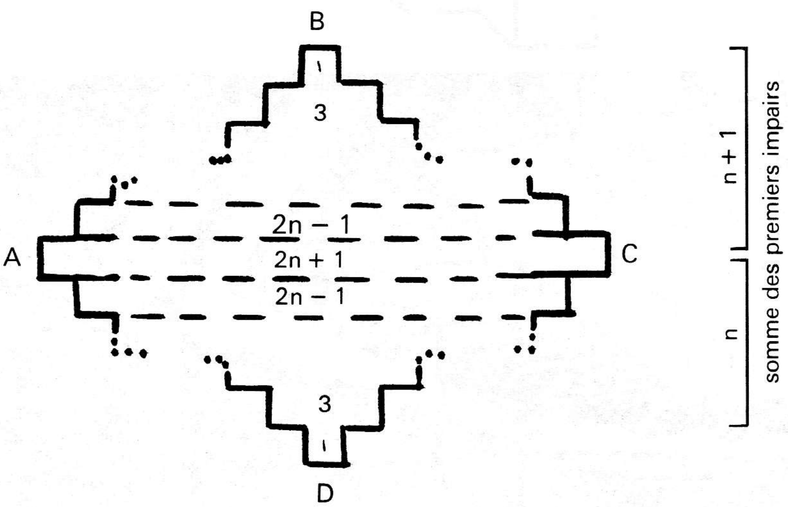




Un autre point de vue des choses

Il consiste à faire des coupes parallèlement au plan ABCD. L'observateur se place cette fois sur la droite (EF).

Pour la première coupe (le carré ABCD lui-même) on compte $n^2 + (n+1)^2$ cubes.



On rappelle que la somme des n premiers impairs vaut n^2.

Sur cette coupe vient se "coller" deux nouvelles coupes de $2n-1$ cubes pour la plus grande longueur, etc.

On obtient :

$$U_n = n^2 + (n+1)^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + (i+1)^2.$$

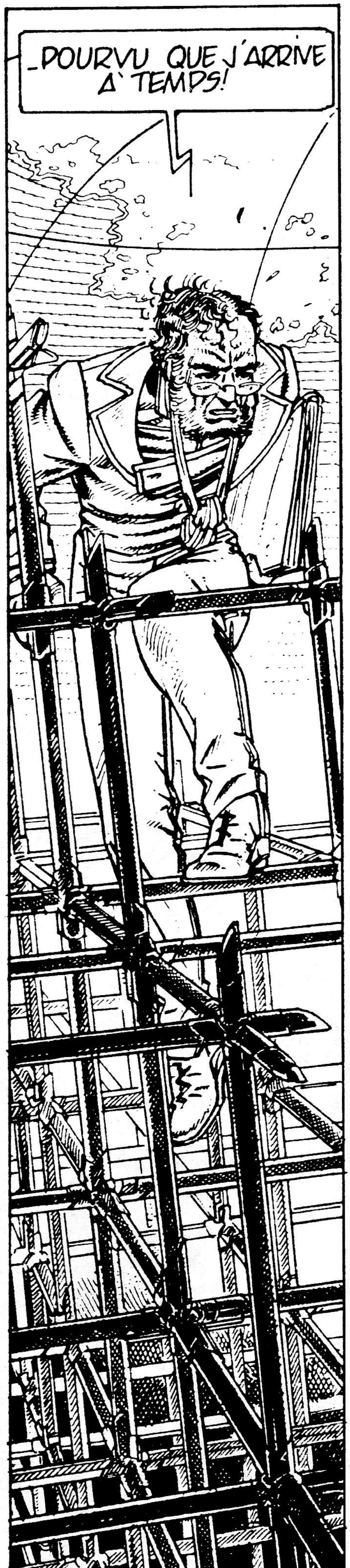
Après un calcul simple, on retrouve l'expression :

$$U_n = \frac{(2n+1)(2n^2+2n+3)}{3}$$

Notons que si l'on écrit d la mesure de la diagonale [AC] formée de $2n+1$ cubes, alors chaque cube a pour volume

$$\left(\frac{d}{2n+1}\right)^3$$

et le cube-octaèdre a un volume $V_n = U_n \times \left(\frac{d}{2n+1}\right)^3$.



Si d est fixé (contrairement à l'histoire) et si l'on ne peut enrayer l'apparition de nouvelles générations de cubes, on obtiendra à la limite :

$\lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{d^3}{6}$, on retrouve le volume de l'octaèdre en fonction d'une de ses diagonales.

Un dernier point de vue développant une analyse récurrente

Les points de vue précédents s'attachaient à une vue globale de l'octaèdre-cube (OC) de génération n ; on considère maintenant la transformation entre deux OC de générations successives qui rend mieux compte de l'évolution de l'histoire : un OC de génération n s'obtient en prenant un OC de génération n − 1 que l'on "recouvre" de nouveaux cubes.

Il s'agit de déterminer le nombre de nouveaux cubes de cette enveloppe, pour cela il suffit de voir qu'une coupe de "2n + 1 cubes de longueur" nécessite 4 x (n + 1) cubes pour l'envelopper, en prenant en considération toutes les coupes on trouve pour l'enveloppe complète :

$4(n+1)$	pour la coupe ABCD
$+$	
$2\sum_{i=1}^{n} 4i$	pour les autres coupes
$+$	
2	pour fermer l'enveloppe aux points E et F (voir figure 1)

Cette méthode est en fait un compromis des deux points de vue précédents. On trouve tout calcul fait :

$U_n = U_n + (4n^2 + 8n + 6)$

ou

$U_n = U_{n-1} + (4n^2 + 2)$

Une procédure récursive permet de calculer Un en "recopiant" simplement la relation :

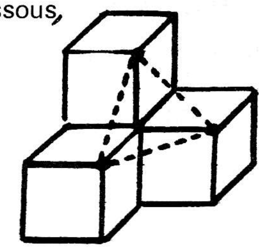
```
NBCUBE (naturel N) → naturel U_N
Choix N = 0 → 1
        N ≠ 0 → NBCUBE (N − 1) + 4N² + 2

Fin choix
FIN NBCUBE
```

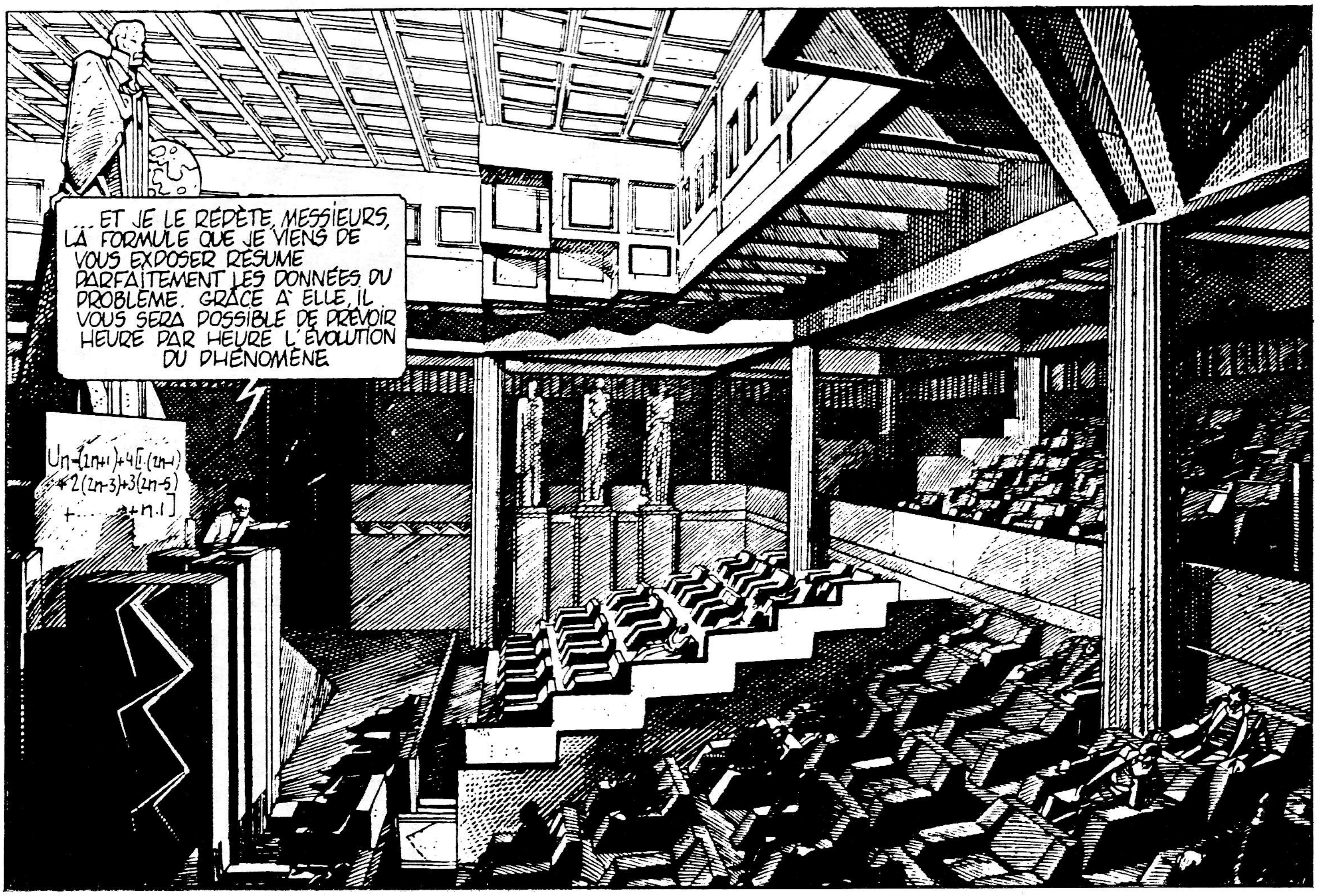
Comme précédemment si on fixe la longueur d de la diagonale [AC] et si on considère les $8n^2$ triangles d'aire

$(d\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2n+1)^2}$

s'appuyant sur les $4n^2 + 2$ cubes de l'enveloppe comme cidessous,



on constate que la limite de l'aire de tous ces triangles quand n tend vers l'infini est $d^2\sqrt{3}$, aire de l'octaèdre.



Que faire en classe de tout cela ?

Il semble difficile de structurer ces différents points de vue pour en faire une véritable situation-problème conduisant les élèves à mettre en place un concept mathématique nouveau, toutefois on peut sûrement dépasser le stade anecdotique et trouver de nombreuses ouvertures selon le niveau des classes :

- applications des travaux sur les suites et les séries,
- activités calculatoires pour les jeunes élèves : à partir de la formule proposée par Robick calculer u_1, u_2, u_3..., vérifier que la formule polynomiale $\frac{(2n+1)(2n^2+2n+3)}{3}$ convient et "est plus économique" (si l'on ne sait pas programmer, ou si l'on n'a pas de machine).
- Mise en place d'une démarche expérimentale conduisant à déterminer le nombre de cubes de la génération Gn.

La recherche de la formule Un est une activité à préparer minutieusement : difficulté pour manipuler une telle forme algébrique ; nécessité de construire une approche séquentielle (les différents points de vue précédents peuvent être utile pour analyser les démarches des élèves ou leur en imposer une).

- Observations, hypothèses vérifiables (avec des petits cubes emboîtables - ça existe - avec des dessins - difficultés liées à la représentation dans l'espace, au comptage des cubes cachés) ;
favoriser une induction ; ou au contraire faciliter une analyse récurente (en donnant le nombre de cubes de l'enveloppe à la génération Gn par exemple...)
- Enfin, on peut privilégier une démarche interdisciplinaire : math-français en particulier - lecture, compréhension, interprétation d'une bande dessinée tant pour le texte que pour le dessin).

On peut terminer en évoquant les conceptions platoniciennes du monde : les cinq polyèdres réguliers (les solides de Platon), tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre sont associés respectivement au feu, la terre, l'air, l'eau, le divin.

Du cube à l'octaèdre, cette BD de qualité nous élève de la terre à l'air, du ras des pâquerettes aux pensées les plus hautes à conditions qu'elles ne soient pas fumeuses. ■

M.C.